Metode Iterasi Tiga Langkah Bebas Turunan Untuk Menyelesaikan Persamaan Nonlinear

M. Nizam[1], Lendy Listia Nanda[2]
[1,2] Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
email: nizam_ys86@yahoo.com

Abstrak

Penelitian ini membahas tentang kombinasi metode double Newton dengan metode Liang-Fang, menjadi metode iterasi tiga langkah untuk mencari akar-akar persamaan nonlinear. Selanjutnya, fungsi turunan yang ada pada metode tersebut dihilangkan dengan menggunakan beda hingga, iterpolasi Lagrange dan interpolasi Hermite sehingga diperoleh metode iterasi tiga langkah yang bebas turunan. Secara analitik, ditunjukkan bahwa metode yang dihasilkan mempunyai kekonvergenan orde tujuh dengan indeks efisiensi $7^{\frac{1}{4}} \approx 1{,}6266$*. Komputasi numerik juga menunjukkan metode yang dihasilkan lebih unggul dengan metode lain yang didiskusikan.*

Kata kunci: *Indeks efisiensi, metode Liang-Fang, metode Newton, orde konvergensi, persamaan nonlinear*

Abstract

This project, discusses modification Double Newton method combined with Liang Fang method, then removed all existing derivative in order to obtain the new iteration method to solve nonlinear equations. Analytically, indicated that the method has produced seven order of convergence. Numerical computation shows the resulting method is superior to the other methods discussed.

Keywords: *free derivative method, iterative method, nonlinear equations, order of convergence*

1. Pendahuluan

Dalam Matematika, metode numerik merupakan salah satu cabang ilmu yang menarik untuk dibahas. Salah satu materi dalam metode numerik yang sering dibahas adalah teknik untuk mencari penyelesaian persamaan nonlinear dalam bentuk

$$f(x) = 0. \tag{1}$$

Untuk menyelesaikan persamaan (1) kadangkala metode analitik tidak dapat menyelesaikan. Untuk itu, diperlukan suatu metode yang dapat digunakan dalam menyelesaikan persamaan (1. Dalam metode numerik, penyelesaian yang diperoleh dari untu persamaan (1) adalah hanyalah berupa nilai hampiran yang bersifat iterasi. Salah satu metode iterasi klasik yang sangat populer dan sering digunakan untuk menyelesaikan (1) adalah metode Newton dengan bentuk iterasi diberikan oleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ f'(x_n) \neq 0 \text{ dan } n = 0,1,2,\dots, \tag{2}$$

memiliki orde konvergensi dua [4, h.83]. Banyak peneliti yang telah mengembangkan persamaan (2) dengan tujuan untuk memperoleh orde konvergensi yang lebih tinggi, sehingga nilai hampiran yang diperoleh semakin baik atau mendekati nilai analitiknya. Traub [7] mengembangkan persamaan (2) dengan menambahkan langkah kedua sehingga diperoleh metode iterasi dalam bentuk

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{3}$$

$$x_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}. \tag{4}$$

memiliki orde konvergensi empat [7] yang selanjutnya dikenal dengan metode doble-Newton.

Berdasarkan persamaan (3) – (4), Khattri dan Argyros [6] mengaproksimasikan fungsi $f'(y_n)$ dengan menggunakan interpolasi Hermit orde dua dengan bentuk

$$f'(y_n) \approx 2\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n} - f'(x_n),$$

$$= 2f[x_n, y_n] - f'(x_n). \quad (5)$$

Sehingga diperoleh metode iterasi sebagai berikut:

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

$$x_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{-f'(x_n) + 2\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n - x_n}}. \quad (6)$$

Orde konvergensi dari (5) adalah empat [6].

Selain itu, Liang Fang [2] juga mengembangkan metode baru dengan menambahkan langkah kedua dari persamaan (2), sehingga diperoleh metode iterasi

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (7)$$

$$x_{n+1} = y_n - \frac{5f'^2(x_n) + 3f'^2(y_n)}{f'^2(x_n) + 7f'^2(y_n)} \frac{f(y_n)}{f'(x_n)}. \quad (8)$$

yang memiliki orde konvergensi lima.

Pada artikel ini, dibahas metode iterasi bebas turunan untuk memperoleh penyelesaian persamaan (1) dengan cara mengkombinasikan metode double-Newton dan metode Liang Fang serta mengaprok-simasikan $f'(x_n)$ menggunakan definisi turunan [5, h.162], dan $f'(y_n)$ menggunakan interpolasi Hermite orde dua seperti persamaan (4), serta $f'(z_n)$ menggunakan interpolasi Lagrange orde tiga. Kemudian ditunjukkan orde konvergensi [1, h.75] metode yang dikemukakan dan dilanjutkan dibagian tiga dengan melakukan komputasi numerik terhadap empat fungsi uji.

2. Hasil dan Pembahasan

Untuk meningkatkan order konvergensi metode iterasi double-Newton yang memiliki orde konvergensi empat maka metode tersebut di kombinasi dengan metode Liang Fang pada langkah ketiga dalam bentuk berikut

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (9)$$

$$\boldsymbol{z_n = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}}, \quad (10)$$

$$\boldsymbol{x_{n+1} = y_n - \frac{5f'^2(y_n) + 3f'^2(z_n)}{f'^2(y_n) + 7f'^2(z_n)} \frac{f(z_n)}{f'(y_n)}}. \quad (11)$$

Selanjutnya, $\boldsymbol{f'(x_n)}$ pada persamaan (9) diaproksimasikan menggunakan beda hingga, yaitu

$$\boldsymbol{f'(x_n) \approx \frac{f(w_n) - f(x_n)}{w_n - x_n} =: f[x_n, w_n]}, \quad (12)$$

dengan $\boldsymbol{w_n = x_n + \beta f(x_n)^3}$. $\boldsymbol{f'(y_n)}$ diaproksimasikan menggunakan interpolasi Hermit orde dua seperti pada persamaan (5), selanjutnya subtitusikan persamaan (12) ke dalam persamaan (5) sehingga diperoleh

$$\boldsymbol{f'(y_n) = 2f[x_n, y_n] - f[x_n, w_n] =: FD(y_n)}. \quad (13)$$

Untuk $\boldsymbol{f'(z_n)}$ diaproksimasikan menggunakan interpolasi Lagrange orde tiga sebagai berikut

$$\boldsymbol{f'(z_n) \approx \frac{f(z_n) - f(y_n)}{z_n - y_n} - \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} + \frac{f(z_n) - f(x_n)}{z_n - x_n}},$$

$$\boldsymbol{= f[y_n, z_n] - f[x_n, y_n] + f[x_n, z_n]},$$

$$\boldsymbol{=: FD(z_n)}. \quad (14)$$

Dengan mensubtitusikan persamaan (12) ke (9), (13) ke (10) dan (11), serta (14) ke (12) maka diperoleh metode iterasi berikut

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f[x_n, w_n]}, \quad (15)$$

$$\boldsymbol{z_n = y_n - \frac{f(y_n)}{FD(y_n)}}. \quad (16)$$

$$\boldsymbol{x_{n+1} = y_n - \frac{5FD^2(y_n) + 3FD^2(z_n)}{FD^2(y_n) + 7FD^2(z_n)} \frac{f(z_n)}{FD(y_n)}}, \quad (17)$$

dengan $\boldsymbol{w_n = x_n + \beta f(x_n)^3}$. Persamaan (15) – (17) merupakan metode iterasi tiga langkah kombinasi metode doble-Newton dengan metode Liang-Fang dengan bebas turunan.

Berikut ini akan ditunjukkan orde konvergensi metode iterasi (15) – (17) sebagaimana disajikan pada Teorema 1.

Teorema 1 (Kekonvergenan Metode Iterasi) Misalkan $\boldsymbol{f: D \to R}$ fungsi yang mempunyai turunan pada interval *D*. Selanjutnya asumsikan bahwa *α* adalah akar sederhana dari persamaan $\boldsymbol{f(x) = 0}$. Misalkan diberikan tebakan awal x_0 cukup dekat ke *α*, maka metode iterasi (15) –(17) mempunyai orde konvergensi tujuh dan memenuhi persamaan *error*:

$$\boldsymbol{e_{n+1} = \left(\frac{c_3^2 c_2^2}{c_1^4} - \frac{c_3 c_2^4}{c_1^5}\right) e_n^7 + O(e_n^8)}, \tag{18}$$

dengan $\boldsymbol{c_j = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha) j!}, j \geq 1, \text{dan } e_n = x_n - \alpha}$.

Bukti:

Misalkan *α* akar sederhana dari $\boldsymbol{f(x) = 0}$, maka $\boldsymbol{f(\alpha) = 0}$. Ekspansi Taylor [5, h.189] berdasarkan $\boldsymbol{f(x_n)}$ di sekitar $\boldsymbol{x_n = \alpha}$ dan dengan mengabaikan suku yang memuat $(\boldsymbol{x_n - \alpha})^{\boldsymbol{j}}$, dengan $\boldsymbol{j \geq 7}$ maka diperoleh

$$\boldsymbol{f(x_n) = f(\alpha) + f^{(1)}(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{1}{2} f^{(2)}(\alpha)(x_n - \alpha)^2 + \frac{1}{6} f^{(3)}(\alpha)(x_n - \alpha)^3 + \frac{1}{24} f^{(4)}(\alpha)(x_n - \alpha)^4 + \frac{1}{120} f^{(5)}(\alpha)(x_n - \alpha)^5 + \frac{1}{720} f^{(6)}(\alpha)(x_n - \alpha)^6 + O((x_n - \alpha)^7)}. \tag{19}$$

Kemudian, misalkan $\boldsymbol{c_j = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha) j!}}$ dengan $\boldsymbol{j = 1, 2, 3, \ldots, 7}$ dan $\boldsymbol{x_n - \alpha = e_n}$ maka setelah penyederhanaan, maka persamaan (19) dapat ditulis lagi dalam bentuk

$$\boldsymbol{f(x_n) = f'(\alpha)[c_1 e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + c_4 e_n^4 + c_5 e_n^5 + c_6 e_n^6 + c_7 e_n^7 + O(e_n^8)]}. \tag{20}$$

Oleh karena $\boldsymbol{x_n = e_n + \alpha}$ maka berdasarkan persamaan (20) diperoleh

$$\boldsymbol{w_n = \alpha + e_n + \beta c_1^3 e_n^3 + 3\beta c_2 c_1^2 e_n^4 + \cdots + O(e_n^8)}. \tag{21}$$

Dengan menggunakan ekspansi deret Taylor untuk $\boldsymbol{f(w_n)}$ disekitar $\boldsymbol{x = w_n}$ pada persamaan (21) diperoleh

$$\boldsymbol{f(w_n) = f'(\alpha)[c_1 e_n + c_2 e_n^2 + (\beta c_1^4 + c_3) e_n^3 + \cdots + O(e_n^8)}. \tag{22}$$

Berdasarkan persamaan (20), (21) dan (22), maka diperoleh

$$\boldsymbol{f[x_n, w_n] = c_1 + 2c_2 e_n + 4c_3 e_n^2 + (4c_4 + \beta c_1^3 c_2) e_n^3 + \cdots + O(e_n^8)} \tag{23}$$

Bagi persamaan (20) dengan (23) maka diperoleh

$$\boldsymbol{\frac{f(x_n)}{f[x_n, w_n]} = e_n - \frac{c_2}{c_1} e_n^2 + \left(-\frac{2c_3}{c_1} + \frac{2c_2^2}{c_1^2}\right) e_n^3 + \cdots + O(e_n^8)}. \tag{24}$$

Substitusikan persamaan (24) ke (15) sehingga diperoleh

$$\boldsymbol{y_n = \alpha + \frac{c_2}{c_1} e_n^2 + \left(\frac{2c_3}{c_1} - \frac{2c_2^2}{c_1^2}\right) e_n^3 + \cdots + O(e_n^8)}. \tag{25}$$

Kemudian, gunakan ekspansi deret Taylor untuk memperoleh $\boldsymbol{f(y_n)}$ disekitar $\boldsymbol{x = y_n}$ sehingga

$$\boldsymbol{f(y_n) = f'(\alpha)\left[c_2 e_n^2 + \left(2c_3 - \frac{2c_2}{c_1}\right) e_n^3 + \cdots + O(e_n^8)\right]}. \tag{26}$$

Berdasarkan persamaan (20), (25) dan (26), maka diperoleh

$$\boldsymbol{f[x_n, y_n] = c_1 + c_2 e_n + \left(c_3 + \frac{c_2^2}{c_1}\right) e_n^2 + \cdots + O(e_n^8)} \tag{27}$$

Substituiskan persamaan (23) dan (27) ke (13) sehingga diperoleh

$$\boldsymbol{FD(y_n) = c_1 + \left(-c_3 + \frac{2c_2^2}{c_1}\right) e_n^2 + \cdots + O(e_n^8)}. \tag{28}$$

Bagi persamaan (26) dengan (28), maka diperoleh

$$\boldsymbol{\frac{f(y_n)}{FD(y_n)} = \frac{c_2}{c_1} e_n^2 + \left(\frac{2c_3}{c_1} - \frac{2c_2^2}{c_1^2}\right) e_n^3 + \cdots + O(e_n^8)}. \tag{29}$$

Substitusikan persamaan (25) dan (29) ke (16) sehingga diperoleh

$$\boldsymbol{z_n = \alpha + \left(-\frac{c_2 c_3}{c_1^2} + \frac{c_2^3}{c_1^3}\right) e_n^4 + \cdots + O(e_n^8)}. \tag{30}$$

Untuk mendapatkan $\boldsymbol{f(z_n)}$, gunakan ekspansi Taylor disekitar $\boldsymbol{x = z_n}$ sehingga

$$\boldsymbol{f(z_n) = f'(\alpha)}\left[\left(-\frac{c_2c_3}{c_1^2}+\frac{c_2^3}{c_1^3}\right)\boldsymbol{e_n^4} + \cdots + \boldsymbol{O(e_n^8)}\right]. \tag{31}$$

Berdasarkan persamaan (20), (25), (30) dan (31) maka diperoleh

$$\boldsymbol{f[x_n, z_n] = c_1 + c_2e_n + c_3e_n^3 + \cdots + O(e_n^8)}, \tag{32}$$

dan

$$\boldsymbol{f[y_n, z_n] = c_1} + \frac{c_2^2}{c_1}\boldsymbol{e_n^2} + \left(\frac{2c_2c_3}{c_1} - \frac{2c_2^3}{c_1^2}\right)\boldsymbol{e_n^3} + \cdots + \boldsymbol{O(e_n^8)} \tag{33}$$

Sehingga

$$\frac{5FD^2(y_n)+3FD^2(z_n)}{FD^2(y_n)+7FD^2(z_n)} = \boldsymbol{8c_1^2 + \left(-10c_3c_1 + 20c_2^2\right)e_n^2 + \cdots + O(e_n^8)}. \tag{34}$$

Substitusikan persamaan (25) dan (34) ke (17) sehingga diperoleh

$$\boldsymbol{x_{n+1} = \alpha} + \left(\frac{c_3^2c_2^2}{c_1^4} - \frac{c_3c_2^4}{c_1^5}\right)\boldsymbol{e_n^7 + O(e_n^8)}. \tag{35}$$

Oleh karena $\boldsymbol{e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha}$, maka berdasarkan persamaan (35) diperoleh

$$\boldsymbol{e_{n+1}} = \left(\frac{c_3^2c_2^2}{c_1^4} - \frac{c_3c_2^4}{c_1^5}\right)\boldsymbol{e_n^7 + O(e_n^8)}. \tag{36}$$

Berdasarkan definisi orde konvergensi maka diperoleh orde konvergensi berorde tujuh, maka Teorema terbukti.

3. Simulasi Numerik

Pada bagian ini dilakukan simulasi numerik untuk membandingkan beberapa metode iterasi seperti metode Newton (MN) Persamaan, metode double-Newton (MDB), metode Liang-Fang (MLF), dan metode Bebas Turunan Double-Newton-Liang-Fang (MBT) dalam menemukan akar dari persamaan nonlinear. Untuk melakukan perbandingan ini, ada beberapa persamaan nonlinear yang digunakan. Komputasi dilakukan dengan menggunakan bantuan software Maple dengan ketelitian sampai 800 digit. Adapun kriteria pemberhentian program komputasi adalah jika $|f(x_{n+1})| \leq Tol$, $|x_k - x_{k-1}| \leq Tol$, dan jumlah iterasi mencapai maksimum iterasi. Tol yang digunakan adalah sebesar 10^{-16}.

Selanjutnya, hasil simulasi numerik untuk jumlah iterasi yang diperoleh untuk beberapa metode yaitu Metode Newton (MN), Metode Doble-Newton, Metode Liang-Fang (MLF), dan Metode Bebas Turunan (MBT) dapat dilihat pada Tabel 1 – 4 berikut.

Tabel 1. Perbandingan Jumlah Iterasi untuk Fungsi f_1

$f(x)$	x_0	Jumlah iterasi dari				α
		MN	MDN	MLF	MBT	
$f_1 = \sqrt{x} - x$	-0.5	14	7	7	6	1.000000000000000
	1.2	11	6	5	4	
	1.5	10	5	5	4	
	2.0	11	6	5	5	
	2.5	11	6	6	5	

Tabel 2. Perbandingan Jumlah Iterasi untuk Fungsi f_2

$f(x)$	x_0	Jumlah iterasi dari				α
		MN	MDN	MLF	MBT	
$f_2 = e^x + x^2 + 3x$	0	10	5	5	4	-0.278181447374428
	-2.0	*	*	*	5	
	-0.1	11	6	5	4	
	-1.2	12	6	8	6	
	-0.5	11	6	5	4	

Tabel 3. Perbandingan Jumlah Iterasi untuk Fungsi f_3

$f(x)$	x_0	Jumlah iterasi dari				α
		MN	MDN	MLF	MBT	
$f_3 = \cos(x) - x$	1	10	5	5	4	0.739085133215161
	2	10	5	5	5	
	1.7	10	5	5	5	
	3	12	6	6	5	

	0.5	10	5	5	4	

Tabel 4. Perbandingan Jumlah Iterasi untuk Fungsi f_4

$f(x)$	x_0	Jumlah iterasi dari				α
		MN	MDN	MLF	MBT	
$f_4 = (x-1)^3 - 1$	1.2	17	9	15	5	2.000000000000000
	2.4	11	6	5	4	
	1.8	11	6	5	4	
	1.6	12	6	6	5	
	2.1	10	5	5	4	

Berdasarkan Tabel 1-4 dapat dilihat jika MDN, MLF, dan MBT memberikan hasil iterasi yang sebanding, tidak terdapat perbedaan jumlah iterasi yang signifikan. Dan secara keseluruhan, MN memiliki jumlah iterasi yang lebih banyak dari tiga metode lainnya. Pada Tabel 1-4 kolom pertama merupakan fungsi, kolom kedua merupakan tebakan awal yang dinotasikan dengan x_0, kolom ketiga sampai kolom ke enam merupakan metode yang dibandingkan, dan kolom terakhir merupakan nilai dari akar real yang dinotasikan dengan α. Tanda * menyatakan iterasi belum berhenti sampai iterasi ke dua puluh.

Berdasarkan jumlah iterasi, maka dari Tabel 1-4 dapat dilihat bahwa MBT mempunyai hasil iterasi yang lebih unggul dari ketiga metode lainnya. Pada Tabel 2 untuk $x_0 = -2$, MN, MDN, dan MLF memiliki tanda *, sedangkan MBT tidak. Sehingga MBT mempunyai perbandingan Komputasi yang unggul dengan metode iterasi lain yang diteliti.

Definisi 1 *COC* (*Computational Orde of Convergence*) Misalkan α adalah akar suatu persamaan nonlinear $f(x)$, dan x_{n-1}, x_n, x_{n+1} adalah tiga iterasi berturut yang dekat dengan α, maka *COC* dapat diaproksimasikan dengan menggunakan rumus

$$COC \approx \frac{ln|(x_{n+1}-\alpha)/(x_n-\alpha)|}{ln|(x_n-\alpha)/(x_{n-1}-\alpha)|} \tag{37}$$

Untuk melihat perbandingan COC untuk beberapa metode yang dibandingkan dapat di lihat pada Tabel 5 di bawah ini.

Tabel 5. Perbandingan Nilai *COC*

$f(x)$	x_0	Nilai COC			
		MN	MDB	MLF	MBT
$f_1(x)$	1.2	1.999999999999999	3.999999999999999	4.999999999999999	6.999999999684866
$f_2(x)$	-0.5	1.999999999999999	3.999999999999999	5.000000000000000	7.000007436594958
$f_3(x)$	0.5	1.999999999999999	3.999999999999999	5.000000000000000	7.000000001140538
$f_4(x)$	2.1	1.999999999999999	3.999999999999999	4.999999999999999	6.999999844381324

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan metode bebas turunan yang merupakan kombinasi dari metode Double-Newton dan metode Liang-Fang bebas turunan memiliki orde konvergensi tujuh dan memiliki empat evaluasi fungsi,sehingga diperoleh indeks efisiensi $7^{\frac{1}{4}} \approx 1{,}6266$ lebih besar jika bandingkan dengan metode Newton yang memiliki indeks efisiensi $2^{\frac{1}{2}} \approx 1{,}4142$ dan metode Liang Fang memiliki indeks efisiensi $5^{\frac{1}{4}} \approx 1{,}4954$. Simulasi numerik juga menunjukkan bahwa kombinasi dari metode Double-Newton dan metode Liang-Fang bebas tusunan memiliki jumlah iterasi yang lebih sedikit dibandingkan metode lain yang didiskusikan. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa MBT lebih efektif dan efisien dalam menyelesaikan persamaan nonlinear.

Referensi

[1] J. H. Mathewa dan K. D Fink, *Numerical Method Using Matlab, 3rd Ed*, Prentice Hall, New Jersey, 1999.

[2] Liang Fang, Li Sun, dan Guoping He, *An Efficient Newton-Type Method with Fifth-Order Convergence for Solving Nonlinear Equations*, Computational & Applied Mathematics, 27 (2008), 269-274.

[3] Neha Choubey dan J. P . Jaiswal, *Derivative-Free Method of Eight-Order For Finding Simple Root of Nonlinear Equation*, Communication in Numerical Analysis, 2 (2015), 90-103.

[4] Rao V. Dukkipati, *Numerical Method* New Age International (p) Limited, New Delhi, 2010.

[5] R. G. Bartle dan D. R. Shebert. *Introduction to Real Analysis, 4st Ed*, Jhon Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.

[6] S. K. Khattri dan I. K. Argyros, *How to Develop Fourth and Seventh Order Iterative Methods?*, Novi Sad J. Math, 48 (2010), 61-67.

[7] Traub, J. F., *Iterative Methods for the Solution of Equations*, Chelsea Publishing Company, New York, 1977.

[8] Weerakon, S., T. G. I Fernando, *A Variant of Newton’s Method with Accelerated Third-Order Convergence*, Applied Mathematics Latters, 13 (1999), 87-93.