Nilai Eigen dan Vektor Eigen Universal Matriks Interval Atas Aljabar Max-Plus

Fitri Aryani[1], Tri Novita Sari[2]
Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Suska Riau
e-mail: khodijah_fitri@uin-suska.ac.id

Abstrak

Pembahasan mengenai nilai eigen dan vektor eigen pada suatu matriks telah banyak dilakukan. Entri-entri matriks dapat berupa rill, kompleks, fuzzy, dan interval. Penelitian ini membahas mengenai nilai eigen dan vektor eigen pada matriks interval atas aljabar max-plus. Matriks interval mempunyai nilai eigen dan vektor eigen universal. Nilai eigen universal dari matriks interval A adalah nilai eigen untuk setiap $A \in \boldsymbol{A}$.Vektor eigen universal dapat dicari dengan menyelesaikan sistem persamaan dua-sisi. Untuk nilai eigen sama dengan 0 dapat menggunakan sistem dua-sisi $C \otimes y = D \otimes y$ dengan $C_i = \overline{A} \otimes v_i$ dan $D_i = v_i$ untuk semua $i = 1,2,\dots,m$. Sedangkan untuk nilai eigen tidak sama dengan nol dapat menggunakan sistem dua-sisi $C \otimes w = F \otimes w$ dengan $C_i = \overline{A} \otimes v_i$ dan $F_i = \lambda(\overline{A}) \otimes v_i$ untuk semua $i = 1,2,\dots,m$.

Kata kunci: *Aljabar max-plus, matriks interval, nilai eigen dan vektor eigen, nilai eigen dan vektor eigen universal.*

Abstract

Discussion of eigenvalue dan eigenvector of a matrix has much to do. Matrix entries can be the real, complex, fuzzy, and interval. This paper discusses the eigenvelue and eigenvector of interval matrix over max-plus algebra. An interval matriks has universal eigenvalue and eigenvector. Universal eigenvalue of an interval matrix $\boldsymbol{A}$ is the eigenvalue of each$A \in \boldsymbol{A}$. The universal eigenvector can be found by solving two-sided systems. For the eigenvalue is equal to 0 can use two-sided system $C \otimes y = D \otimes y$ with $C_i = \overline{A} \otimes v_i$ and $D_i = v_i$ for all $i = 1,2,\dots,m$. While the eigenvalue not equal to 0 can use two-sided system$C \otimes w = F \otimes w$ with $C_i = \overline{A} \otimes v_i$ and $F_i = \lambda(\overline{A}) \otimes v_i$ for all $i = 1,2,\dots,m$.

Keywords: *eigenvalue and eigenvector, eigenvalue and universal eigenvector, interval matrix, Max-plus algebra.*

1. Pendahuluan

Matriks yang elemen-elemen di dalamnya berupa interval tertutup dengan matriks batas bawah dan matriks batas atas sebagai penyusunnya disebut matriks interval. Matriks interval sama dengan matriks biasa yang mempunyai nilai eigen dan vektor eigen. Matriks interval juga mempunyai nilai eigen yang mungkin dan nilai eigen universal serta vektor eigen yang mungkin dan vektor eigen universal. Aljabar *max-plus* adalah aljabar atas bilangan rill yang dilengkapi dengan operasi maksimum yang dinotasikan dengan $\oplus$ dan penjumlahan yang dinotasikan dengan $\otimes$, yangdidefinisikan sebagai berikut: $\forall\, a, b \in \mathbf{R}_\varepsilon$,

$$a \oplus b = \max(a, b) \text{ dan } a \otimes b = a + b.$$

Operasi-operasi yang berlaku dalam aljabar *max-plus* bersifat *assosiatif*, *komutatif*, dan *distributif* seperti pada aljabar biasa.jika A adalah matriks graf berarah berbobot yang terhubung kuat maka A mempunyai nilai eigen tunggal $\lambda_{max}(A)$ yaitu

$$\lambda_{max}(A) = \oplus_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} trace(A^{\otimes k})_{ii}\right),$$

dengan maksimum dari bobot maksimum semua sirkuit dengan panjang k dengan titik i sebagai titik awal dan titik akhir dalam $\boldsymbol{G}(A)$ atas seluruh titik i adalah$trace(A^{\otimes k})$ dan rata-ratanya adalah $\frac{1}{k} trace\,(A^{\otimes k})_{ii}$.Selanjutnya, untuk $H = -\lambda_{max}(A) \otimes A$ jika $H_{ii}^{+} = 0$ maka kolom ke-*i* matriks H^* merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_{max}(A)$. Kolom-kolom ke-*i* matriks H^*, merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_{max}(A)$ dan disebut dengan vektor-vektor eigen fundamental yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_{max}(A)$.

Suatu skalar $\lambda \in \mathbf{R}_\varepsilon$ dinamakan nilai eigen dan vektor $x \neq \varepsilon \in \mathbf{R}_\varepsilon$ dinamakan vektor eigen matriks $A \in \mathbf{R}_{max}^{n\times n}$ jika $A \otimes x = \lambda \otimes x$. Penelitian yang diakukan [12], aljabar *max-plus* digunakan untuk membahas ketunggalan nilai eigen dan vektor eigen matriks atas aljabar *max-plus* interval. Aljabar *max-plus* juga digunakanuntuk memodelkan suatu permasalahan tentang sistem linear *max-plus* interval waktu invariant [10]. Kemudian [13] membahas tentang penerapan aljabar *max-plus* interval pada jaringan antrian dengan waktu aktifitas interval. Penelitian selanjutnya [5] membahas tentang aplikasi aljabar *max-plus* pada pemodelan dan penjadwalan busway yang diintegrasikan dengan kereta api komuter. Aljabar *max-plus* juga digunakan dalam penyelesaian sistem dua sisi menggunakan iterasi seperti penelitian [9].

Penyelesaian sistem dua sisi dalam aljabar *max-plus* banyak dibahas oleh peneliti, seperti: $A \otimes x = B \otimes y$ dan$A \otimes x = B \otimes x$ yang diselesaikan [3] dengan menggunakan metode alternatif. $A \otimes x \otimes b = C \otimes x \otimes d$ dengan matriks $A, C \in \boldsymbol{R}_{maks}^{n\times n}$ dibahas pada [1] tentang program linear dengan fungsi kendala. Sistem persamaan linear tersebut diselesaikan dengan menggunakan metode alternating, kemudian dicari solusi optimal dari permasalahan program linear tersebut. Penyelesaian sistem persamaan dua sisi dapat digunakan untuk mencari vektor eigen universal untuk $\lambda = 0$ yang telah diselesaikan [8]. Pada penelitian ini akan membahas mengenai nilai eigen dan vektor eigen universal matriks interval atas aljabar *max-plus* untuk $\lambda \neq 0$ dengan menggunakan sistem persamaan dua sisi.

2. Bahan dan Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode studi literatur. Berikut diberikan literatur-literatur yang diperlukan untuk menunjang hasil dan pembahasan.

2.1 Matriks Interval atas Aljabar Max-Plus

Bagian ini membahas tentang teknik pengoperasian matriks interval atas aljabar *max-plus.* Pembahasan lebih lengkap dapat diliihat pada [8]. Diberikan matriks $\underline{A} = (\underline{a}_{ij})$ dan $\overline{A} = (\overline{a}_{ij}) \in \mathbf{R}_{max}^{n\times n}$ sedemikian sehingga $\underline{a}_{ij} \leq \overline{a}_{ij}$ dengan $i, j = 1,2, \dots, n$. Matriks interval atas aljabar max-plus berordo n didefinisikan dengan

$$A = [\underline{A}, \overline{A}] = \{A = (a_{ij}) | \underline{a}_{ij} \leq a_{ij} \leq \overline{a}_{ij};\ i, j = 1,2, \dots, n\}.$$

Definisi operasi maksimum dan penjumlahan matriks interval atas aljabar *max-plus* sama halnya dengan definisi operasi maksimum dan penjumlahan pada matriks atas aljabar *max-plus*. Perbedaannya pada matriks interval yaitu, hanya mengikuti definisi operasi maksimum dan penjumlahan pada suatu interval. Berikut definisi operasi tentang matriks interval atas aljabar *max-plus*:

a) Misalkan matriks $A, B \in M_{n\times m}(R_{max})$, penjumlahan matriks $A \oplus B$, didefinisikan dengan
$$[A \oplus B]_{ij} = [\underline{a}, \overline{a}]_{ij} \oplus [\underline{b}, \overline{b}]_{ij}$$
$$= [\max(\underline{a}_{ij}, \underline{b}_{ij}), \max(\overline{a}_{ij}, \overline{b}_{ij})]$$
b) Misalkan matriks $A \in M_{n\times m}(R_{max})$ dan $\beta \in R_\varepsilon$, pergandaan skalar β dengan matriks A yaitu $\beta \otimes A$ didefinisikan dengan
$$[\beta \otimes A]_{ij} = \beta \otimes [\underline{a}, \overline{a}]_{ij}$$
$$= [\underline{a}_{ij} + \beta, \overline{a}_{ij} + \beta]$$
c) Misalkan matriks $A \in M_{n\times l}(R_{max})$ dan $B \in M_{l\times m}(R_{max})$ perkalian matriks $A \otimes B$ didefinisikan dengan
$$[A \otimes B]_{ik} = \oplus_{j=1}^{l} (\underline{a}, \overline{a})_{ij} \otimes (\underline{b}, \overline{b})_{ij}$$
$$= [\max_{j\in \underline{l}}\{\underline{a}_{ij} + \underline{b}_{jk}\}, \max_{j\in \underline{l}}\{\overline{a}_{ij} + \overline{b}_{jk}\}]$$

2.2 Penyelesaian Sistem Persamaan Dua-Sisi

Penyelesaian sistem persamaan dua-sisi dapat digunakan dalam menentukan vektor eigen universal matriks interval atas aljabar *max-plus.* Pembahasan selengkapnya dapat di lihat pada [3].

Sistem persamaan linear dua-sisi atas aljabar *max plus* yang berbentuk

$C \otimes y = D \otimes y$ dengan $C \geq D$, (1)

$\underline{n}$ menotasikan himpunan indeks baris $\{1,2,\ldots,n\}$ dan $\underline{m}$ himpunan indeks kolom $\{1,2,\ldots,m\}$ dari matriks C dan D. Ukuran matriks C dan D harus sama. Berikut ini akan diberikan lemma yang menyatakan syarat bahwa dua-sisi tidak mempunyai penyelesaian.

Lemma 1. Jika ada sebuah baris *i* sehingga $c_{ij} > d_{ij}$untuk setiap *j*, maka sistem dua sisi tidakmempunyai penyelesaian.

Bukti:
Akan dibuktikan dengan menggunakan kontradiksi. Anggap bahwa sebuah vektor $y$adalah sebuah penyelesaian dari Persamaan (1). Nilai maksimum pada ruas kiri adalah $c_{ij} + y_j = max_k\{c_{ik} > y_k\}$ dan nilai maksimum pada ruas kanan adalah $d_{il} + y_l = max_k\{d_{ik} > y_k\}$. Maka didapatkan $c_{ij} + y_j \geq c_{il} + y_l > d_{il} + y_l$. Karena $c_{il} + y_l > d_{il} + y_l$, berarti bahwa $y$bukan merupakan penyelesaian dari Persamaan (1) sebab jika $y$merupakan penyelesaian seharusnya $c_{il} + y_l = d_{il} + y_l$. ■

Dari Lemma 1 di atas, memberikan akibat sebagai berikut:

Akibat 1. Untuk setiap Persamaan (1) yang mempunyai penyelesaian, ada untuk setiap baris*i* suatu indeks *j* sehingga $c_{ij} = d_{ij}$.

Bukti:
Misalkan vektor $y$adalah penyelesaian dari Persamaan (1), Sehingga nilai maksimum pada ruas kiri adalah $c_{ij} + y_j = max_k\{c_{ik} > y_k\}$.Sedangkan nilai maksimum pada ruas kanan adalah $d_{il} + y_l = max_k\{d_{ik} > y_k\}$. Maka didapatkan $c_{ij} + y_j \geq d_{il} + y_l$. Hal ini berarti untuk tiap baris *i* ada *l* = *j* , sehingga$c_{ij} + y_j \geq d_{ij} + y_j$ dan didapatkan $c_{ij} = d_{ij}$. ■

2.2 Nilai Eigen dan Vektor Eigen yang Mungkin dari Matriks Interval atas Aljabar *Max-Plus*

Diasumsikan bahwa suatu matriks $A \in \boldsymbol{A} = [\underline{A}, \overline{A}]$adalah matriks dari graf berarah berbobot yang terhubung kuat dengan semua entri penyusun$\underline{A}, \overline{A} \in \boldsymbol{R}_{max}^{n\times n}$ adalah berhingga, sehingga masing-masing $A \in \boldsymbol{A}$ mempunyai nilai eigen tunggal. Pembahasan lebih lengkap dapat dilihat pada [3] dan [8].

Suatu skalar λ adalah nilai eigen yang mungkin dari suatu matriks interval $\boldsymbol{A}$, jika skalar tersebut adalah nilai eigen dari sedikitnya satu $A \in \boldsymbol{A}$.

Berikut diberikan teorema nilai eigen yang mungkin dari suatu matriks interval.

Teorema 1. Suatu skalar λ adalah nilai eigen yang mungkin dari suatu matriks interval $\boldsymbol{A}$ jika dan hanya jika $\lambda \in [\lambda(\underline{A}), \lambda(\overline{A})]$.

Bukti :
(⇒) Diketahui λ adalah nilai eigen yang mungkin dari suatu matriks interval $\boldsymbol{A}$.
Sehingga, λ adalah nilai eigen dari sedikitnya satu $A \in \boldsymbol{A}$. Misalkan λ adalah nilai eigen dari suatu matriks $A \in \boldsymbol{A} = [\underline{A}, \overline{A}]$.
Karena A adalah matriks graf berarah berbobot yang terhubung kuat, maka

$$\lambda(A) = \oplus_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} trace\left(A^{\otimes k}\right)_{ii}\right)$$

untuk setiap matriks $A \in [\underline{A}, \overline{A}]$, berlaku $\underline{A} \preccurlyeq_m A_{ij} \preccurlyeq_m \overline{A}$. Karena sifat kekonsistenan operasi $\oplus$dan $\otimes$ pada matriks terhadap urutan "$\preccurlyeq_m$", maka berlaku $\underline{A}^{\otimes k} \preccurlyeq_m A^{\otimes k} \preccurlyeq_m \overline{A}^{\otimes k}$,untuk $k = 1, 2, \ldots, n$, sehingga berlaku

$$\oplus_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} trace\left(\underline{A}^{\otimes k}\right)_{ii}\right) \preccurlyeq_m \oplus_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} trace\left(A^{\otimes k}\right)_{ii}\right) \preccurlyeq_m \oplus_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} trace\left(\overline{A}^{\otimes k}\right)_{ii}\right)$$

atau

$$\lambda_{max}(\underline{A}) \preccurlyeq_m \lambda_{max}(A) \preccurlyeq_m \lambda_{max}(\overline{A}),$$

hal ini menunjukkan bahwa $\lambda \in [\lambda(\underline{A}), \lambda(\overline{A})]$.

(⇐) Diketahui $\lambda \in [\lambda(\underline{A}), \lambda(\overline{A})]$. Akan dibuktikan λ adalah nilai eigen yang mungkin dari matriks interval A, yang artinya λ adalah nilai eigen dari sedikitnya satu $A \in \boldsymbol{A}$. Diambil matriks A dari graf berarah berbobot yang terhubung kuat dengan nilai eigen

$$\lambda(A) = \oplus_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} trace\left(A^{\otimes k}\right)_{ii}\right)$$

untuk setiap matriks $\boldsymbol{A} = [\underline{A}, \overline{A}]$, mempunyai

1. Nilai eigen matriks batas bawah $\underline{A}$, yaitu
$$\lambda(\underline{A}) = \oplus_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} trace\left(\underline{A}^{\otimes k}\right)_{ii}\right)$$
2. Nilai eigen matriks batas bawah $\overline{A}$, yaitu
$$\lambda(\overline{A}) = \oplus_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} trace\left(\overline{A}^{\otimes k}\right)_{ii}\right)$$

akan di tunjukan bahwa matriks $A \in \boldsymbol{A} = [\underline{A}, \overline{A}]$. jika $\lambda \in [\lambda(\underline{A}), \lambda(\overline{A})]$, berarti bahwa

$$\lambda_{max}(\underline{A}) \preccurlyeq_m \lambda_{max}(A) \preccurlyeq_m \lambda_{max}(\overline{A}),$$

sehingga berlaku

$$\oplus_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} trace\left(\underline{A}^{\otimes k}\right)_{ii}\right) \preccurlyeq_m \oplus_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} trace\left(A^{\otimes k}\right)_{ii}\right) \preccurlyeq_m \oplus_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} trace\left(\overline{A}^{\otimes k}\right)_{ii}\right)$$

untuk $k = 1, 2, \dots, n$, dan untuk setiap matriks $A \in [\underline{A}, \overline{A}]$, berlaku $\underline{A} \preccurlyeq_m A_{ij} \preccurlyeq_m \overline{A}$. Hal ini menunjukan bahwa $A \in \boldsymbol{A} = [\underline{A}, \overline{A}]$, dengan kata lain $\lambda(A)$ adalah nilai eigen dari sedikitnya satu matriks $A \in \boldsymbol{A}$. ■

Suatu vektor $x \in \boldsymbol{R}_{max}^{n}$ adalah vektor eigen yang mungkin dari suatu matriks interval $\boldsymbol{A}$, jika terdapat $A \in \boldsymbol{A}$ sedemikian sehingga $A \otimes x = \lambda(A) \otimes x$. Vektor eigen $x \in \boldsymbol{R}_{max}^{n}$ dapat ditentukan dengan cara meningkatkan matriks batas bawah $\underline{A}$dalam setiap koordinat sedemikian sehingga tidak melebihi matriks batas atas $\overline{A}$, tetapi untuk setiap koordinat i dari $A \otimes x$ dipastikan nilainya sekurang-kurangnya $\lambda(x) \otimes x_i$ yang dapat dirumuskan dengan

$$\hat{a_{ij}} = \min\{\overline{a}_{ij}, \lambda(x) + x_i - x_j\},$$

dan

$$\lambda(x) = \max[y_i - x_i]$$

maka $\underline{A} \preccurlyeq_m \hat{A_{ij}} \preccurlyeq_m \overline{A}$dan $\hat{A_{ij}} \otimes x = \lambda(x) \otimes x$, sehingga $x \in \boldsymbol{R}_{max}^{n}$ adalah vektor eigen yang mungkin dari matriks interval A.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Nilai Eigen dan Vektor Eigen Universal dari Matriks Interval atas Aljabar *Max-Plus*

Diasumsikan bahwa suatu matriks $A \in \boldsymbol{A} = [\underline{A}, \overline{A}]$adalah matriks dari graf berarah berbobot yang terhubung kuat dengan semua entri penyusun$\underline{A}, \overline{A} \in \boldsymbol{R}_{max}^{n \times n}$ adalah berhingga, sehingga masing-masing $A \in \boldsymbol{A}$ mempunyai nilai eigen tunggal. Pembahasan selengkapnya dapat dilihat pada [3], [8], dan [12].

Suatu skalar λ dinamakan nilai eigen universal dari suatu matriks interval $\boldsymbol{A}$, jika skalar tersebut adalah nilai eigen dari setiap $A \in \boldsymbol{A}$.
Berikut diberikan teorema tentang matriks interval atas aljabar *max-plus.*

Teorema 2. Diberikan $A \in I(\boldsymbol{R})_{max}^{n \times n}$, dengan $A \approx [\underline{A}, \overline{A}]$. Skalar interval $\lambda_{max}(A) = [\lambda_{max}(\underline{A}), \lambda_{max}(\overline{A})]$, merupakan suatu nilai eigen *max-plus* interval matriks interval A. Vektor interval $v \approx [\underline{v}, \overline{v}]$, di mana $\underline{v}$ dan $\overline{v}$berturut-turut adalah vektor eigen max-plus yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_{max}(\underline{A})$ dan $\lambda_{max}(\overline{A})$, sedemikan hingga $v \preccurlyeq_m v$, merupakan vektor eigen *max-plus* interval matriks $\boldsymbol{A}$ yang bersesuaian dengan $\lambda(A)$.

Bukti:

Untuk setiap matriks $A \in [\underline{A}, \overline{A}]$, berlaku $\underline{A} \preccurlyeq_m A_{ij} \preccurlyeq_m \overline{A}$. Karena sifat kekonsistenan operasi $\oplus$dan $\otimes$ pada matriks terhadap urutan "$\preccurlyeq_m$", maka berlaku $\underline{A}^{\otimes k} \preccurlyeq_m A^{\otimes k} \preccurlyeq_m \overline{A}^{\otimes k}$,untuk $k = 1, 2, \dots, n$, sehingga berlaku

$$\oplus_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\oplus_{i=1}^{n}\left(\underline{A}^{\otimes k}\right)_{ii}\right) \preccurlyeq_m \oplus_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\oplus_{i=1}^{n}\left(A^{\otimes k}\right)_{ii}\right) \preccurlyeq_m \oplus_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\oplus_{i=1}^{n}\left(\overline{A}^{\otimes k}\right)_{ii}\right)$$

atau

$$\lambda_{max}(\underline{A}) \preccurlyeq_m \lambda_{max}(A) \preccurlyeq_m \lambda_{max}(\overline{A}),$$

jadi $[\lambda_{max}(\underline{A}), \lambda_{max}(\overline{A})]$ adalah suatu interval.

Kemudian ambil $\lambda_{max}(A) = [\lambda_{max}(\underline{A}), \lambda_{max}(\overline{A})]$, selanjutnya untuk $\underline{H} = -\lambda(\underline{A}) \otimes \underline{A}$, jika $\underline{H}_{ii}^{+} = 0$, maka kolom ke i matriks $\underline{H}^{*}$ merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_{max}(\underline{A})$, demikian juga analog dengan $\overline{H}$. Ambil $\underline{v}$ dan $\overline{v}$ dimana berturut-turut adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda(\underline{A})$ dan $\lambda(\overline{A})$, sedemikian sehingga $\underline{v} \preccurlyeq_m \overline{v}$, jika diperlukan dapat dibentuk kombinasi linier vektor-vektor eigen fundamental yang terkait, sehingga diperoleh $\underline{v} \preccurlyeq_m \overline{v}$. Ambil vektor interval $v \approx [\underline{v}, \overline{v}]$, maka $[\underline{A}, \overline{A}] \otimes [\underline{v}, \overline{v}] = [\lambda_{max}(\underline{A}), \lambda_{max}(\overline{A})] \otimes [\underline{v}, \overline{v}]$, yang berarti juga bahwa $A \otimes v = \lambda \otimes v$. Jadi, skalar interval $\lambda_{max}(A) = [\lambda_{max}(\underline{A}), \lambda_{max}(\overline{A})]$, merupakan nilai eigen *max plus* matriks interval. ■

Selanjutnya, dalam pembahasan vektor eigen universal akan dibahas nilai eigen universal untuk $\lambda(\underline{A}) = \lambda(\overline{A}) = 0$ dan $\lambda(\underline{A}) = \lambda(\overline{A}) \neq 0$. Vektor eigen universal dibatasi pada kasus nilai eigen universal sama dengan 0. Vektor eigen universal merupakan kombinasi linier atas aljabar *max-plus* dari himpunan vektor eigen fundamental matriks interval batas bawah $\underline{A}$ maupun matriks interval batas atas $\overline{A}$. Berikut diberikan teorema vektor eigen universal matriks interval A.

Teorema 3. Apabila suatu matriks interval A mempunyai $\lambda(\underline{A}) = \lambda(\overline{A}) = 0$ dan $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ adalah himpunan vektor eigen fundamental dari $\underline{A}$, maka terdapat vektor eigen universal dari $\boldsymbol{A}$ jika dan hanya jika sistem dua sisi $C \otimes y = D \otimes y$ dengan $C_i = \overline{A} \otimes v_i$ dan $D_i = v_i$ untuk semua $i = 1,2, \dots, m$ mempunyai penyelesaian.

Bukti:

($\Rightarrow$) Diketahui suatu matriks interval A dengan $\lambda(\underline{A}) = \lambda(\overline{A}) = 0$ dan misalkan $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ adalah vektor eigen fundamental dari $\underline{A}$.

Akan dibuktikan sistem dua sisi $C \otimes y = D \otimes y$ mempunyai penyelesaian. Misalkan vektor eigen universal dari A adalah $x \in \boldsymbol{R}_{max}^{n}$, maka untuk setiap $A \in \boldsymbol{A}$ berlaku

$$A \otimes x = \lambda(A) \otimes x.$$

Karena vektor eigen universal merupakan kombinasi linier atas aljabar *max-plus* dari himpunan *m* vektor eigen fundametal matriks $\underline{A}$, maka

$$x = \oplus_{i=1}^{n} (y_i \otimes v_i)$$

sehingga untuk $\overline{A} \in \boldsymbol{A}$dengan $\lambda(\overline{A}) = 0$, berlaku

$$\overline{A} \otimes \oplus_{i=1}^{m} (y_i \otimes v_i) = \oplus_{i=1}^{m} (y_i \otimes v_i)$$
$$\oplus_{i=1}^{m} ((\overline{A} \otimes v_i) \otimes y_i) = \oplus_{i=1}^{m} (v_i \otimes y_i)$$
$$\oplus_{i=1}^{m} (C_i \otimes y_i) = \oplus_{i=1}^{m} (D_i \otimes y_i)$$
$$C \otimes y = D \otimes y$$

jadi, $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$ adalah penyelesaian dari $C \otimes y = D \otimes y$.

($\Leftarrow$) Diketahui suatu matriks interval $\boldsymbol{A}$ dengan $\lambda(\underline{A}) = \lambda(\overline{A}) = 0$ dan misalkan $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ adalah himpunan vektor eigen fundamental dari $\underline{A}$. Akan dibuktikan terdapat adalah $x \in \boldsymbol{R}_{max}^{n}$, suatu vektor eigen universal dari $\boldsymbol{A}$.

Misalkan $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$ adalah penyelesaian dari sistem persamaan dua sisi $C \otimes y = D \otimes y$, sehingga

$$\bigoplus_{i=1}^{m} (C_i \otimes y_i) \;=\; \bigoplus_{i=1}^{m} (D_i \otimes y_i)$$
$$\bigoplus_{i=1}^{m} ((\overline{A} \otimes v_i) \otimes y_i) \;=\; \bigoplus_{i=1}^{m} (v_i \otimes y_i)$$
$$\overline{A} \otimes \bigoplus_{i=1}^{m} (y_i \otimes v_i) = \bigoplus_{i=1}^{m} (y_i \otimes v_i)$$

Terlihat bahwa dengan $\lambda(\overline{A}) = 0$, $x = \bigoplus_{i=1}^{n} (y_i \otimes v_i)$ adalah vektor eigen matriks $\overline{A}$. Karena x adalah vektor eigen matriks batas $\underline{A}$ dan $\overline{A}$, maka x adalah vektor eigen semua matriks $A \in \boldsymbol{A}$, yang berarti x adalah vektor eigen universal dari $\boldsymbol{A}$. ■

Dalam pembahasan vektor eigen universal dibatasi pada kasus nilai eigen universal tidak sama dengan 0. Berikut diberikan teorema vektor eigen universal matriks interval A.

Teorema 4. Apabila suatu matriks interval A mempunyai $\lambda(\underline{A}) = \lambda(\overline{A}) \neq 0$ dan $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ adalah himpunan vektor eigen fundamental dari $\underline{A}$, maka terdapat vektor eigen universal dari $\boldsymbol{A}$ jika dan hanya jika sistem dua sisi $C \otimes w = F \otimes w$ dengan $C_i = \overline{A} \otimes v_i$ dan $F_i = \lambda(\overline{A}) \otimes v_i$ untuk semua $i = 1,2, \ldots, m$ mempunyai penyelesaian.

Bukti:
($\Rightarrow$) Diketahui suatu matriks interval A dengan $\lambda(\underline{A}) = \lambda(\overline{A}) \neq 0$ dan misalkan $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ adalah vektor eigen fundamental dari $\underline{A}$.
Akan dibuktikan sistem dua sisi $C \otimes w = F \otimes w$ mempunyai penyelesaian.
Misalkan vektor eigen universal dari A adalah $z \in \boldsymbol{R}_{max}^{n}$, maka untuk setiap $A \in \boldsymbol{A}$ berlaku

$$A \otimes z = \lambda(A) \otimes z.$$

Karena vektor eigen universal merupakan kombinasi linier atas aljabar *max-plus* dari himpunan *m* vektor eigen fundametal matriks $\underline{A}$, maka

$$z = \bigoplus_{i=1}^{n} (w_i \otimes v_i)$$

Sehingga untuk $\overline{A} \in \boldsymbol{A}$dengan $\lambda(\overline{A}) \neq 0$, berlaku

$$\overline{A} \otimes \bigoplus_{i=1}^{m} (w_i \otimes v_i) = \lambda(A) \otimes \bigoplus_{i=1}^{m} (w_i \otimes v_i)$$
$$\bigoplus_{i=1}^{m} ((\overline{A} \otimes v_i) \otimes w_i) \;=\; \bigoplus_{i=1}^{m} ((\lambda(A) \otimes v_i) \otimes w_i)$$
$$\bigoplus_{i=1}^{m} (C_i \otimes w_i) \;=\; \bigoplus_{i=1}^{m} (F_i \otimes w_i)$$
$$C \otimes w = F \otimes w \tag{2}$$

jadi, $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}$ adalah penyelesaian dari Persamaan (2)

($\Leftarrow$) Diketahui suatu matriks interval $\boldsymbol{A}$ dengan $\lambda(\underline{A}) = \lambda(\overline{A}) \neq 0$ dan misalkan $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ adalah himpunan vektor eigen fundamental dari $\underline{A}$. Akan dibuktikan terdapat adalah $z \in \boldsymbol{R}_{max}^{n}$, suatu vektor eigen universal dari $\boldsymbol{A}$.

Misalkan $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}$ adalah penyelesaian dari sistem persamaan dua sisi $C \otimes w = F \otimes w$, sehingga

$$\bigoplus_{i=1}^{m} (C_i \otimes w_i) \;=\; \bigoplus_{i=1}^{m} (F_i \otimes w_i)$$
$$\bigoplus_{i=1}^{m} ((\overline{A} \otimes v_i) \otimes w_i) \;=\; \bigoplus_{i=1}^{m} ((\lambda(A) \otimes v_i) \otimes w_i)$$
$$\overline{A} \otimes \bigoplus_{i=1}^{m} (w_i \otimes v_i) = \lambda(A) \otimes \bigoplus_{i=1}^{m} (w_i \otimes v_i)$$

Terlihat bahwa dengan $\lambda(\overline{A}) \neq 0$, $z = \bigoplus_{i=1}^{n} (w_i \otimes v_i)$ adalah vektor eigen matriks $\overline{A}$. Karena w adalah vektor eigen matriks batas $\underline{A}$ dan $\overline{A}$, maka w adalah vektor eigen semua matriks $A \in \boldsymbol{A}$, yang berarti w adalah vektor eigen universal dari $\boldsymbol{A}$. ■

3.2 Contoh Penyelesaian

Untuk lebih jelasnya berikut diberikan contoh matriks yang mempunyai vektor eigen universal yang bersesuaian dengan nilai eigen tidak sama dengan 0.

Contoh . Diberikan matriks interval

$$A = \begin{bmatrix} [4,4] & [2,3] & [-3,1] \\ [-5,-3] & [0,0] & [4,4] \\ [1,2] & [4,4] & [1,2] \end{bmatrix}$$

Dimana $\lambda(\underline{A}) = \lambda(\overline{A}) = 4$.

Himpunan vektor eigen fundamental dari matriks $\underline{A}$ yaitu $\underline{v_1} = \{0,-3,-3\}^T$ dan $\underline{v_2} = \{-2,0,0\}^T$. Kemudian dibentuk matriks

$$C_i = \overline{A} \otimes v_i$$

$$C_i = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Dan matriks

$$F_i = \lambda(\underline{A}) \otimes v_i$$

$$= 4 \otimes \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Salah satu penyelesaian dari sitem persamaan dua sisi

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \otimes w = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \otimes w$$

Adalah $w = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix}$, sehingga vektor eigen universal dari matriks J adalah

$$z = \left(-4 \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}\right) \oplus \left(-3 \otimes \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \max(-4,-5) \\ \max(-7,-3) \\ \max(-7,-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

4. Kesimpulan

Berdasarkan uraian di atas dapat diperoleh beberapa kesimpulan seperti berikut:

a. Matriks interval A mempunyai nilai eigen yang mungkin yang berada pada interval tertutup nilai eigen matriks batasnya. Yang dapat ditulis seperti berikut:

$$\lambda \in [\lambda(\underline{A}), \lambda(\overline{A})].$$

Jika nilai eigen matriks batasnya sama, yaitu

$$\lambda(\underline{A}) = \lambda(A) = \lambda(\overline{A}),$$

maka matriks A mempunyai nilai eigen universal.

b. Vektor eigen yang mungkin dari matriks A dapat ditentukan dengan dengan cara meningkatkan matriks batas bawah $\underline{A}$dalam setiap koordinat sedemikian sehingga tidak melebihi matriks batas atas $\overline{A}$.

c. Vektor eigen universal matriks interval A dapat ditentukan seperti berikut:
   1. Untuk $\lambda(\underline{A}) = \lambda(\overline{A}) = 0$ maka vektor eigen universal $x = \bigoplus_{i=1}^{n} (y_i \otimes v_i)$ dari matriks interval A, dapat di selesaikan dengan menyelesaikan sistem persamaan dua-sisi $C \otimes y = D \otimes y$ dengan matriks $C_i = \overline{A} \otimes v_i$ dan matriks $D_i = v_i$.
   2. Untuk $\lambda(\underline{A}) = \lambda(\overline{A}) \neq 0$ maka vektor eigen universal $z = \bigoplus_{i=1}^{n} (w_i \otimes v_i)$ dari matriks interval A, dapat di selesaikan dengan menyelesaikan sistem persamaan dua-sisi $C \otimes w = F \otimes w$ dengan matriks $C_i = \overline{A} \otimes v_i$ dan matriks $F_i = \lambda(\underline{A}) \otimes v_i$.

Ucapan Terimakasih

Penulis mengucapkan terimakasih kepada kolega dan reviewer yang telah memberikan masukan dalam peningkatan kualitas makalah ini.

Referensi

[1] Aminu, Abdulhadi, Butkovic, P.”Introduction to Max-Linear Programing”. 2009.
[2] Baccelli, Francois., dkk. ”Synchronization and Linearity, An Algebra for Discrete Even Systems”. Second edition. Wiley, Chichester. 2001.
[3] Cechlarova, K.”Eigenvektors of Interval Matrices over Max-plus Algebra”. *Journal of Discrete Applied Mathematics*. Vol.150,hal. 2-15, 2005.
[4] Cunninghame-Green, R. A., Butkovic, P. “The Equation $A \otimes x = B \otimes y$over (max, +)”, *Journal of Theoretical Computer Science*, vol. 293, hal. 3–12, 2003.
[5] Fahim, Kistosil, dkk.”Aplikasi Aljabar Max-plus pada Pemodelan dan Penjadwalan Busway yang Diintegrasikan dengan Kereta Api Komuter”. *Jurnal Teknik Pomits,* Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh November. Surabaya. 2013.
[6] Farlow, Kasie. “Max-Plus Algebra”. Master’s Thesis submitted to the Faculty of the Virginia Polytechnic an State University. Blacksburg, Virginia. 2009.
[7] Gioia, Federica dan Carlo N. Lauro.”Principal Component Analysis on Interval Data”.Universita degli Studi di Napoli. Vol.21, No.2, Hal.3-5. 2006.
[8] Maharani, D.S., dan Suryoto.”Nilai dan Vektor Eigen Matriks Interval Atas Aljabar Max-plus”.*Jurnal Matematika dan Komputer,* Universitas Diponegoro. 2009.
[9] Novitasari, Ratna dan Subiono.”Penyelesaian Sistem Dua Sisi dalam Aljabar Max-Plus”.Jurusan Matematika FMIPA Institud Teknologi Sepuluh November.2010.
[10] Rudhito, M.A.” Sistem Linear Max-Plus Waktu-Invariant”. *Master’s Thesis.* UGM. 2003.
[11] Rudhito, M.A., dkk.” Sistem Linear Max-Plus Interval Waktu Invariant”. *Prosiding Seminar Nasional Mahasiswa S3 Matematika*, UGM. 2008.
[12] Rudhito, M.A., dkk.” Nilai Eigen dan Vektor Eigen Matriks atas Aljabar Max-plus Interval”,*Prosiding Seminar Nasional Mahasiswa S3 Matematika*, UGM. 2008.
[13] Rudhito, M.A., dkk.” Penerapan Aljabar Max-plus Interval pada Jaringan Antrian dengan waktu aktivitas Interval”, *Prosiding Seminar Nasional Mahasiswa S3 Matematika*, UGM. 2009.
[14] Rudhito, M.A., dkk.” Matriks atas Aljabar Max-Plus Interval”. Jurnal Natur Indonesia. Vol. 13, No. 2, Hal. 94-99. 2011.