

# Model Mangsa-Pemangsa dengan Memperhatikan Faktor Internal dan Eksternal

Mohammad Soleh<sup>1</sup>, Riry Sriningsih<sup>2</sup>, Subiono<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau

<sup>2</sup>Department Matematika, Universitas Negeri Padang, Padang, Indonesia

<sup>3</sup>Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Analitika Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya, Indonesia

Email: <sup>1</sup> msoleh@uin-suska.ac.id , <sup>2</sup>subiono2008@matematika.its.ac.id, <sup>3</sup>riryrsriningsih@fmipa.unp.ac.id

## Abstrak

Model mangsa pemangsa Lotka-Voltera (LV) merupakan model matematika tentang persaingan antar individu dalam rantai makanan. Model tersebut banyak digunakan untuk mempelajari keadaan ekosistem dimana disana terjadi peristiwa mangsa dan memangsa. Dalam perkembangannya model LV telah banyak dikembangkan dengan mempertimbangkan berbagai faktor. Tujuan dari paper ini adalah untuk mengeksplorasi dampak yang terjadi ketika model LV dipengaruhi oleh berbagai faktor seperti: pertumbuhan eksponensial, logistik, adanya migrasi, dan adanya penyakit menular menggunakan simulasi model matematika. Dari simulasi disimpulkan bahwa baik pertumbuhan eksponensial ataupun logistik pada populasi mangsa tidak menyebabkan kepunahan keduanya. Terjadi keseimbangan keduanya secara periodik atau berosilasi disekitar titik keseimbangannya. Atau keterbatasan sumber daya lingkungan tidak menjadikan salah satu atau keduanya punah. Kepunahan terjadi jika populasi mangsa dan pemangsa terganggu dengan adanya pemanenan atau pemusnahan. Sedangkan dampak migrasi yang positif menyebabkan populasi mangsa pemangsa tetap lestari dan migrasi yang negatif menyebabkan keduanya punah. Adanya penyebaran penyakit tak fatal pada mangsa, baik bersifat menulari pemangsa ataupun tidak menulari, dampaknya tidak menjadikan keduanya punah, tetapi mengubah dinamika perkembangan populasinya saja.

**Kata Kunci:** Migrasi, model Lotka-Voltera, pemanenan, pemusnahan, penyebaran penyakit.

## Abstract

The Lotka-Volterra (LV) predator prey model is a mathematical model of competition between individuals in the food chain. The model is widely used to study the state of the ecosystem where there is an event of eating and being eaten. In its development, the LV model has been developed by considering various factors. This paper will explore the various impacts that occur when the LV model from various points of view such: exponential and logistics growth, migration; and the presence of infectious diseases. By first providing the parameter values, then the influence of these factors on the prey-predator population dynamics is investigated using simulations. From the simulations, they were concluded that neither exponential or logistic growth in prey populations caused their extinction. Equilibrium occurs both periodically or oscillates around the equilibrium point. Extinction occurs when prey and predator populations are disturbed by harvesting or extermination. While the positive sign impact of migration causes the predator-prey population to remain sustainable and the negative sign of migration causes both to die. The spread of non-fatal diseases in prey, whether infecting predators or not, the impact does not make them extinct but changes the dynamics of population development.

**Keywords:** Culling, disease spread, harvesting, Lotka-Volterra model, migration.

## 1. Pendahuluan

Pemodelan matematika merupakan salah satu cabang ilmu matematika terapan yang cukup penting dan bermanfaat. Salah satu aplikasinya yaitu pada masalah ekologi, suatu cabang biologi yang mempelajari tentang ekosistem. Permasalahan yang penting dalam ekologi diantaranya persoalan rantai makanan. Rantai makanan adalah perpindahan energi dari organisme pada suatu tingkat tropik ke tingkat tropik berikutnya dalam peristiwa mangsa dan pemangsa. Secara sederhana rantai makanan merupakan peristiwa pemangsa yang memakan mangsanya [1].

Model matematika mangsa pemangsa awalnya ditemukan oleh Lotka Volterra (LV). Model ini digunakan untuk mengetahui perkembangan dan kepunahan suatu populasi mangsa yang dimakan pemangsa. Populasi mangsa memiliki sumber makanan yang tersedia setiap

saat tetapi pada populasi pemangsa hanya bisa bertahan hidup dengan memakan mangsa. Dalam populasi diasumsikan hanya terjadi persaingan antara satu jenis mangsa dan satu jenis pemangsa. Dengan menggunakan model tersebut dapat dipelajari dinamika perubahan jumlah baik mangsa atau pemangsa setiap waktunya [1], [2].

Dalam perkembangan selanjutnya model LV telah dikembangkan oleh banyak peneliti. Beberapa penelitian tentang model matematika mangsa-pemangsa atau modifikasinya diantaranya: dalam [3] dibahas model LV dengan mangsa rentan dan terinfeksi. Dari hasil uji kestabilan diperoleh bahwa tingkat kepunahan mangsa dipengaruhi oleh tingkat infeksinya. Kemudian [1] membahas model mangsa-pemangsa dengan sebagian mangsa sakit dengan laju penularan penyakit non-linier. Hasilnya adalah populasi pemangsa naik sebanding dengan kenaikan populasi mangsa sakit. Sedangkan mangsa rentan bergerak menuju konstan. [4] memodifikasi model LV dengan penondimensionalan fungsi respon Michaelis-Menten pada populasi mangsa dan pemangsa pada ekosistem. [2] membahas model LV untuk tiga spesies, yang menyimpulkan bahwa populasi kedua mengalami fluktuasi jumlah yang cukup besar dikarenakan fungsinya sebagai penyalur makanan populasi ketiga. Selanjutnya [5] membahas suatu model populasi mangsa pemangsa dan pemanenan pada pemangsa dengan melibatkan fungsi biaya dan di area bebas. Hasilnya ketiga spesies tidak punah dan dapat tetap lestari meskipun ada usaha pemanenan serta dapat memberikan keuntungan maksimal. Dalam [6] mengembangkan model LV dengan melibatkan adanya migrasi. Disimpulkan bahwa portrait fase pada saat angka imigrasi nol dan angka emigrasi tidak nol akan mirip dengan portrait fase saat angka imigrasi tidak nol dan angka emigrasi nol.

Pada paper ini dibahas perbandingan perkembangan jumlah mangsa dan pemangsa setiap waktunya dari model LV pertumbuhan eksponensial dan model LV pertumbuhan logistik, dengan masing-masing model dipengaruhi oleh: efek pemanenan/pemusnahan, efek migrasi, dan efek penyebaran penyakit pada mangsa dan pemangsa. Melalui simulasi model menggunakan Maple 13, hasil yang diharapkan adalah mendapatkan informasi perkembangan jumlah mangsa-pemangsa dengan faktor-faktor tersebut.

## 2. Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan studi pustaka dengan melakukan simulasi model LV dan melakukan beberapa perubahan asumsi yang terjadi di dalam populasi. Beberapa hal yang akan dikaji adalah:

- a. Model LV dengan laju pertumbuhan eksponensial
- b. Model LV dengan laju pertumbuhan logistik
- c. Model LV dengan pemanenan/pemusnahan
- d. Model LV dengan faktor migrasi
- e. Model LV dengan adanya penyakit pada mangsa atau pemangsa.
- f. Model LV dengan pertumbuhan logistik, adanya pemanenan, migrasi, dan penyebaran penyakit.

Langkah-langkah untuk menyelesaikan permasalahan tersebut dapat diurutkan sebagai berikut:

- a. Menentukan model matematika
- b. Memberikan nilai-nilai berupa angka untuk setiap parameter model
- c. Melakukan simulasi dengan Maple untuk berbagai kemungkinan nilai parameter yang berbeda-beda
- d. Menginterpretasikan simulasi yang didapat
- e. Menarik kesimpulan

## 3. Hasil dan Analisa

### 3.1. Pembentukan Model LV

#### 3.1.1. Model LV dengan pertumbuhan eksponensial

Model LV adalah model dengan dua spesies yang berinteraksi dengan bersaing untuk persediaan makanan atau sumber alami lainnya. Model dua spesies ini dikenal dengan Model Lotka-Volterra (LV) klasik [7], [8] yang memuat sistem persamaan diferensial:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} &= cxy - dy\end{aligned}\tag{1}$$

dengan  $x(t)$  adalah banyaknya populasi mangsa pada waktu  $t$ ,  $y(t)$  adalah banyaknya populasi pemangsa pada waktu  $t$ ,  $a$  adalah laju pertumbuhan alami (eksponensial) mangsa tanpa adanya pemangsa,  $b$  adalah pengaruh predasi terhadap mangsa,  $c$  adalah laju penambahan jumlah pemangsa setelah memakan sejumlah mangsa, dan  $d$  adalah laju kematian alami pemangsa tanpa adanya mangsa. Model Lotka-Volterra klasik menggambarkan adanya persaingan individu antar dua spesies untuk memperoleh persediaan makanan yang terbatas, dimana persediaan makanan diperoleh dari lingkungan [8].

### 3.1.2. Model LV dengan pertumbuhan logistik

Populasi mangsa tidak selamanya meningkat atau populasi pemangsa tidak selamanya menurun, tetapi dapat terjadi jika populasi mangsa naik maka angka pertumbuhan cenderung turun. Bahkan untuk populasi yang cukup besar, bukan mustahil angka pertumbuhannya negatif. Fenomena ini disebabkan area dan fasilitas hidup terbatas atau daya dukung lingkungan atau Kapasitas Batas (*Carrying Capacity*) terbatas. Misalkan dalam populasi terdapat sebanyak  $x(t)$  individu mangsa dan kapasitas batas mangsa, dilambangkan  $K$ . Sehingga kapasitas batas yang tersisa adalah  $K-x(t)$  individu. Jadi masih ada  $\frac{K-x(t)}{K}$  bagian

lingkungan atau area yang masih bisa ditinggali [4], [8].

Model (1) menjadi:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a\left(\frac{K-x}{K}\right)x - bxy \\ \frac{dy}{dt} &= cxy - dy\end{aligned}\tag{2}$$

### 3.1.3. Model LV dengan pemanenan/pemusnahan

Dalam banyak kasus, seringkali mangsa adalah individu yang sengaja dibiakan untuk diambil manfaatnya, misalkan dagingnya. Oleh karena itu, seringkali dilakukan pemanenan secara teratur. Sedangkan pada pemangsa seringkali dilakukan pemusnahan untuk menjaga kelestraian mangsa [4], [8]. Jika  $H(x)$  menyatakan jumlah pemanenan yang dilakukan setiap satuan waktu tertentu dan  $G(y)$  menyatakan banyaknya pemusnahan pada pemangsa setiap satuan waktu tertentu, maka model (1) akan menjadi:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - bxy - H(x) \\ \frac{dy}{dt} &= cxy - dy - G(y)\end{aligned}\tag{3}$$

### 3.1.4. Model LV dengan faktor migrasi

Untuk banyak kasus dinamika populasi, faktor migrasi tak bisa juga diabaikan terutama pada ekosistem yang terbuka. Sebagian mangsa dapat datang dari tempat lain atau pergi ke

tempat lain di luar ekosistemnya. Demikian juga dengan pemangsa. Misalkan  $F(x)$  menyatakan laju netto perpindahan mangsa persatuan waktu dan  $J(y)$  menyatakan laju netto perpindahan pemangsa persatuan waktu, maka model (1) akan mejadi [6]:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - bxy + F(x) \\ \frac{dy}{dt} &= cxy - dy + J(y)\end{aligned}\tag{4}$$

Sekilas model (4) sangat mirip dengan model (3), bedanya adalah pada model (3) maka nilai  $H(x)$  dan  $G(y)$  keduanya nonnegatif, sedangkan di model (4) nilai  $F(x)$  dan  $J(y)$  bisa nonnegatiff atau negatif.

### 3.1.5. Model LV dengan sebagian mangsa sakit

Misalkan terdapat penyakit yang menyerang mangsa, maka populasi mangsa akan terpartisi menjadi dua yaitu kelompok mangsa yang telah sakit  $x_i$  dan kelompok mangsa yang masih sehat  $x_s$ . Diasumsikan tidak terjadi penularan dari mangsa kepada pemangsa,  $\beta$  menyatakan laju transmisi penyakit dari mangsa sakit ke mangsa sehat, dianggap pemangsa hanya memakan mangsa yang sakit karena kondisinya yang mudah tertangkap [1].

$$\begin{aligned}\frac{dx_s}{dt} &= ax - \beta x_s x_i \\ \frac{dx_i}{dt} &= \beta x_s x_i - b x_i y \\ \frac{dy}{dt} &= c x_i y - dy\end{aligned}\tag{5}$$

Sedangkan jika diasumsikan bahwa penyakit pada mangsa bisa menular kepada pemangsa dan pemangsa yang telah terjangkit penyakit tersebut dianggap tidak sembuh lagi. Misalkan  $f$  merupakan laju penularan penyakit dari mangsa ke pemangsa disebabkan pemangsa sehat memakan mangsa yang sakit, maka model (5) dapat dimodifikasi menjadi:

$$\begin{aligned}\frac{dx_s}{dt} &= ax - \beta x_s x_i \\ \frac{dx_i}{dt} &= \beta x_s x_i - b x_i y \\ \frac{dy}{dt} &= c x_i y - (d + f) y\end{aligned}\tag{6}$$

### 3.1.6. Model LV dengan pertumbuhan logistik, adanya pemanenan, migrasi, dan penyebaran penyakit.

Berdasarkan model (1)-(6), dikonstruksi model LV yang dengan pertumbuhan ekponensial atau logistik yang melibatkan pemanenan, migrasi, dan penularan penyakit sebagai berikut: Model (5) dapat dimodifikasi menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{dx_s}{dt} &= ax - \beta x_s x_i - (H + F)(x_s) \\ \frac{dx_i}{dt} &= \beta x_s x_i - b x_i y - (H + F)(x_i) \\ \frac{dy}{dt} &= c x_i y - (d + f)y - (G + J)(y) \\ x &= x_s + x_i \end{aligned} \tag{7}$$

### 3.2. Simulasi Model Matematika

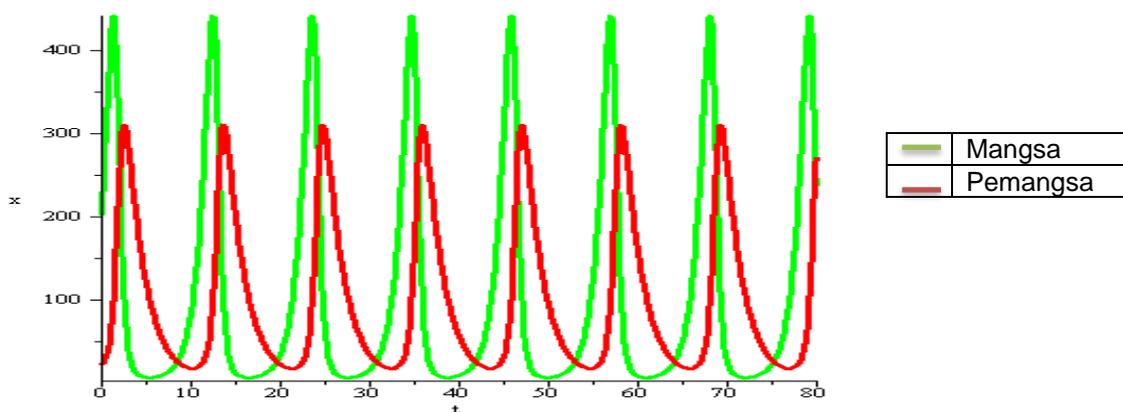
Pada tahap ini akan dilakukan simulasi untuk mengetahui bagaimana dinamika jumlah populasi mangsa-pemangsa setiap waktunya. Simulasi dilakukan untuk semua persamaan (1)-(7). Nilai parameter yang diberikan adalah nilai asumsi.

Tabel 1. Parameter model

Parameter	Keterangan	Nilai	Sumber
$a$	Laju pertumbuhan mangsa tanpa gangguan pemangsa	1.00	asumsi
$b$	Laju predasi mangsa oleh pemangsa	0.01	asumsi
$c$	Laju pertumbuhan pemangsa oleh karena predasi	0.005	asumsi
$d$	Laju kematian pemangsa	0.5	asumsi
$K$	Carrying capacity lingkungan	500	asumsi
$H(x)$	Laju pemanenan/pemusnahan pada mangsa	konstan	asumsi
$G(y)$	Laju pemanenan/pemusnahan pada pemangsa	konstan	asumsi
$F(x)$	Laju netto migrasi pada mangsa	konstan	asumsi
$J(y)$	Laju netto migrasi pada pemangsa	konstan	asumsi
$\beta$	Laju transmisi penyakit dari mangsa sakit ke mangsa sehat	0.00208	[8]
$f$	Laju transmisi penyakit dari mangsa ke pemangsa	0.00208	[8]

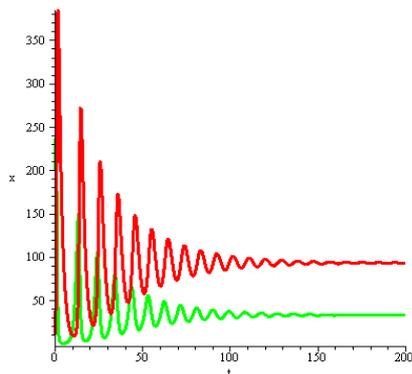
Tabel 2. Nilai awal

$x(0)$	$x_s(0)$	$x_i(0)$	$y(0)$	Sumber
200	150	50	20	Asumsi



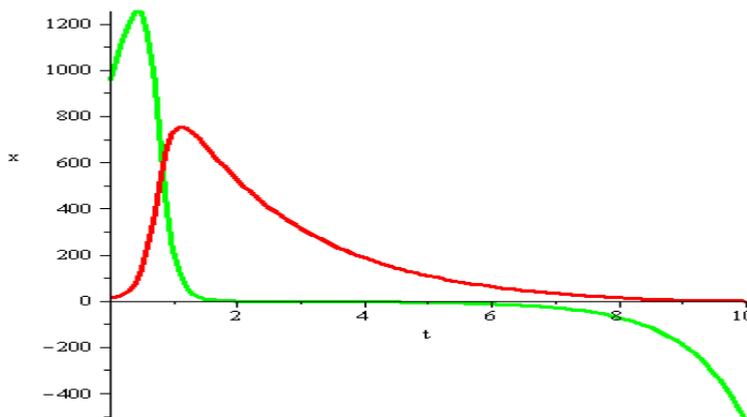
Gambar 1. Model LV Pertumbuhan mangsa eksponensial

Dari Gambar 1 diperlihatkan bahwa dinamika perubahan jumlah mangsa dan pemangsa pada model LV dengan pertumbuhan mangsa secara eksponensial akan beresilasi di sekitar titik kesetimbangan. Pergerakan jumlah mangsa yang naik akan diikuti oleh jumlah pemangsa yang naik juga dan tidak terjadi kepunahan salah satu populasi.



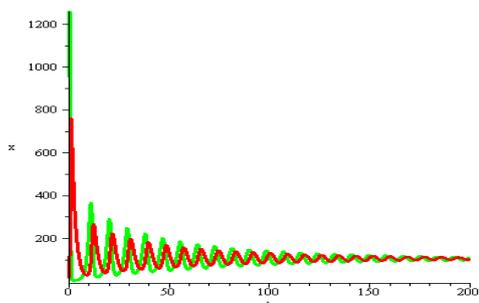
Gambar 2. Model LV Pertumbuhan mangsa logistik

Gambar 2 menunjukkan bahwa dampak dari pertumbuhan mangsa secara logistik pada simulasi ini adalah terjadinya pergeseran osilasi jumlah keduanya. Karena pertumbuhan mangsa tergantung dari kapasitas pendukung lingkungan sementara pemangsa tumbuh secara eksponensial dari banyaknya predasi mangsa, maka memungkinkan jumlah pemangsa melebihi jumlah mangsa. Dari sini tampak bahwa keterbatasan lingkungan tidak menyebabkan mangsa dan pemangsa mengalami kepunahan.

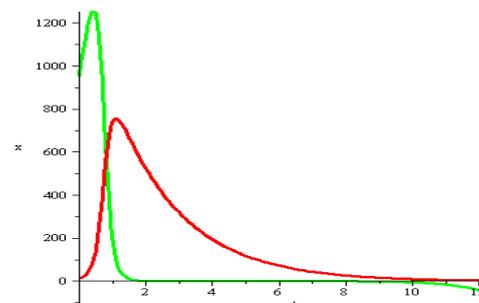


Gambar 3 Model LV dengan pemanenan atau pemusnahan

Terlihat dari Gambar 3 bahwa dampak adanya pemanenan pada mangsa dan pemusnahan pada pemangsa menyebabkan perubahan dinamika populasi yang cukup signifikan. Dibandingkan keadaan sebelumnya di Gambar 1 dan 2, dimana mangsa dan pemangsa bersaing secara alami yang menyebabkan keadaan mangsa dan pemangsa tetap lestari, pengaruh pemanenan atau pemusnahan sebagian dari keduanya bisa menyebabkan kepunahan mangsa pemangsa tersebut.

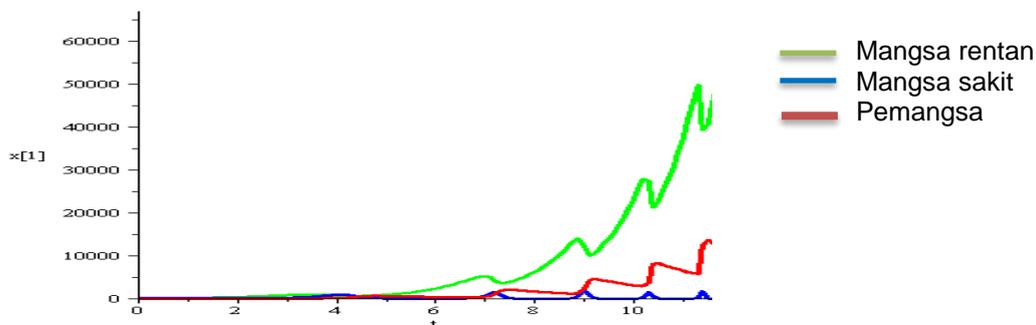


Gambar 4a. Model LV dengan migrasi positif



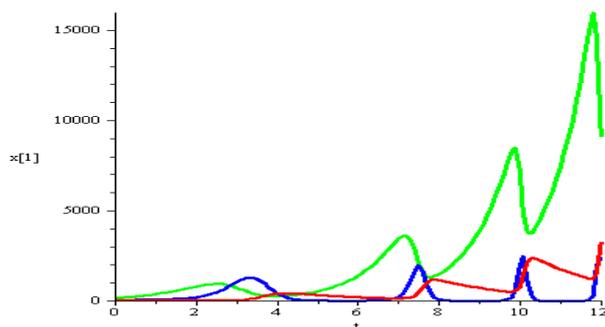
Gambar 4b. Model LV dengan migrasi negatif

Gambar 4 adalah simulasi untuk model LV dengan adanya pengaruh migrasi. Terlihat bahwa pada simulasi model LV ini (Gambar 4b) mirip dengan hasil simulasi model LV dalam Gambar 3, yaitu bahwa dengan adanya migrasi negatif akan sama pengaruhnya dengan adanya pemanenan atau pemusnahan. Gambar 4 juga menginformasikan bahwa jika migrasi tersebut positif (Gambar 4a), maka populasi keduanya akan lestari



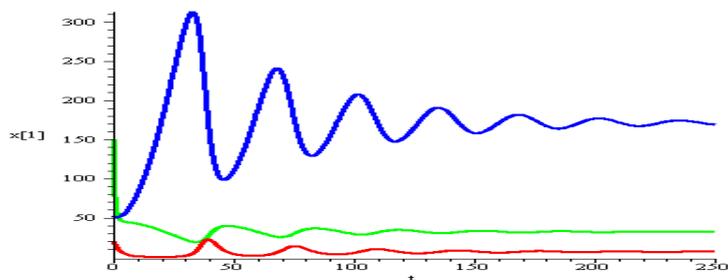
Gambar 5. Model LV pertumbuhan mangsa eksponensial dengan sebagian mangsa sakit dan tidak menulari pemangsa

Gambar 5 menginformasikan bahwa adanya penyakit yang menular pada mangsa tetapi tidak menulari pemangsa, yang dalam keadaan ini dianggap pemangsa hanya memakan mangsa yang sakit karena kondisinya yang mudah tertangkap, menyebabkan mangsa pemangsa tumbuh secara eksponensial tak mulus. Dinamika populasi keduanya secara osilasi tidak lagi terjadi.



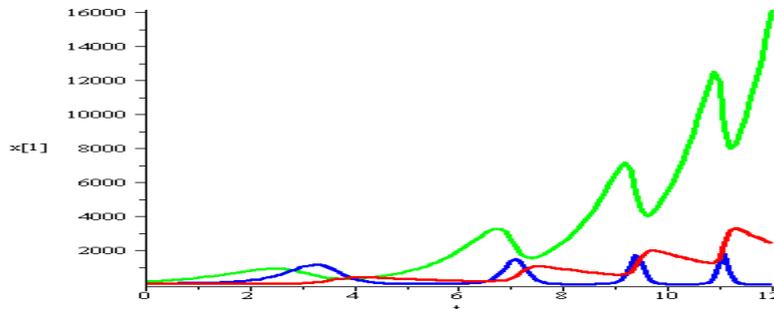
Gambar 6. Model LV pertumbuhan mangsa eksponensial dengan sebagian mangsa sakit dan menulari pemangsa

Tampak dari Gambar 6 bahwa adanya pemangsa yang ikut tertular oleh penyakit yang diderita oleh mangsa. Pemangsa yang tertular penyakit dianggap akan mati dikarenakan tidak sanggup menangkap mangsa. Pengaruh penularan penyakit dari mangsa ke pemangsa menyebabkan mangsa sehat berkembang secara cepat.



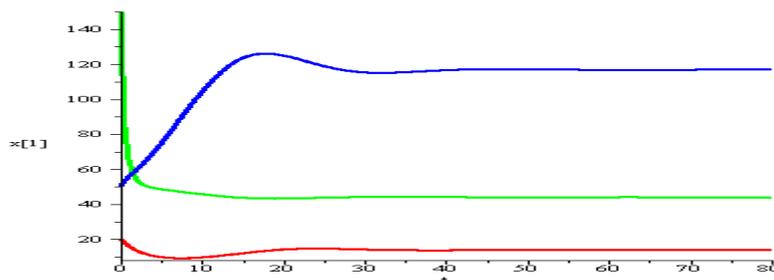
Gambar 7. Model LV pertumbuhan mangsa logistik dengan sebagian mangsa sakit dan menulari pemangsa

Gambar 7 menunjukkan bahwa adanya pengaruh pertumbuhan logistik dan adanya penyakit yang menular dari mangsa ke pemangsa menyebabkan dinamika populasi mangsa sehat, mangsa sakit, dan pemangsa berada pada titik keseimbangannya. Disini dalam waktu singkat, jumlah mangsa sehat turun secara drastis, menjadi mangsa yang sakit.



Gambar 8. Model LV pertumbuhan mangsa eksponensial dengan sebagian mangsa sakit dan menulari pemangsa, pemanenan, dan migrasi

Gambar 8 memberikan informasi bahwa dampak pemanenan, pemusnahan, dan migrasi sangat menentukan kelestarian mangsa dan pemangsa. Jika pemanenan, pemusnahan, dan migrasi bernilai positif maka populasi mangsa dan pemangsa akan terus ada, dan akan terjadi sebaliknya. Pada Gambar 8, kontribusi pemanenan, pemusnahan, dan migrasi masih positif, tampak bahwa populasi mangsa dan pemangsa terjadi secara eksponensial tak mulus.



Gambar 9. Model LV pertumbuhan mangsa logistik dengan sebagian mangsa sakit dan menulari pemangsa, pemanenan, dan migrasi

Dari Gambar 9 diperlihatkan bahwa adanya pertumbuhan logistik pada mangsa, disertai penyebaran penyakit, pemanenan, pemusnahan, dan migrasi menyebabkan populasi mangsa sehat turun secara drastis menjadi mangsa sakit. Pada Gambar 9 digunakan nilai migrasi positif.

#### 4 Kesimpulan

Berdasarkan simulasi untuk berbagai keadaan pada model LV, didapatkan beberapa kesimpulan sebagai berikut:

- Baik pertumbuhan eksponensial ataupun logistik pada populasi mangsa tidak menyebabkan kepunahan keduanya. Terjadi keseimbangan keduanya secara periodik atau berosilasi di sekitar titik keseimbangannya. Bahwa keterbatasan sumber daya lingkungan tidak menyebabkan salah satu atau keduanya punah.
- Kepunahan terjadi jika populasi mangsa dan pemangsa terganggu dengan adanya pemanenan atau pemusnahan. Sedangkan dampak migrasi yang positif menyebabkan populasi mangsa pemangsa tetap lestari tetapi migrasi yang negatif menyebabkan keduanya punah.
- Adanya penyebaran penyakit tak fatal pada mangsa, baik bersifat menulari pemangsa ataupun tidak menulari, dampaknya tidak menjadikan keduanya punah, tetapi mengubah dinamika perkembangan populasinya saja.

## Referensi

- [1] M. Soleh, S. Kholipah, U. (Islam, N. Sultan, and S. Kasim, "Model mangsa pemangsa dengan sebagian mangsa sakit," vol. 10, no. 2, 2013.
- [2] R. P. Ritania Monica, Leli Deswita, "Kestabilan populasi model Lotka-Voltera tiga spesies dengan titik kesetimbangan," *JOM FMIPA*, vol. 1, no. 2, pp. 133–141, 2014.
- [3] Iis Herisman, "Kestabilan Model Mangsa Pemangsa dengan mangsa rentan dan terinfeksi," vol. 8, no. 2, pp. 23–32, 2011.
- [4] S. Maron, "Pembentukan model mangsa pemangsa dengan pemanenan pada pemangsa," *Delta*, vol. 1, no. 2, pp. 181–187, 2013.
- [5] S. Agus, S. Toaha, and K. Kasbawati, "Analisis model populasi mangsa pemangsa dengan area reservasi dan pemanenan pemangsa," *J. Mat. Stat. dan Komputasi*, vol. 15, no. 1, p. 1, 2018, doi: 10.20956/jmsk.v15i1.4418.
- [6] B. R. Chyntia Dwi Yan, "Analisis kestabilan model Lotka-Voltera yang dipengaruhi oleh faktor imigrasi," *J. Mat. UNAND*, vol. 7, no. 4, p. 76, 2019, doi: 10.25077/jmu.7.4.76-80.2018.
- [7] S. Kim, C. Hoffmann, and V. Ramachandran, "Analyzing the parameters of prey-predator models for simulation games," *Lect. Notes Comput. Sci. (including Subser. Lect. Notes Artif. Intell. Lect. Notes Bioinformatics)*, vol. 6243 LNCS, pp. 216–223, 2010, doi: 10.1007/978-3-642-15399-0\_20.
- [8] B. Barnes and G. R. Fulford, *Mathematical modelling with case studies: Using maple™ and MATLAB®, third edition*. 2014.