Seminar Nasional TeknologiInformasi, Komunikasi dan Industri (SNTIKI) 15 *ISSN (Printed) : 2579-7271*
FakultasSains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau *ISSN (Online) : 2579-5406*
Pekanbaru,24Oktober2023

Determinan Matriks Segitiga Bentuk Khusus Ordo 4 × 4 Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Rahmawati*[1], Pera Peti Norpalian[2], Ade Novia Rahma[3]
[1,2,3] Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Email: rahmawati@uin-suska.ac.id, perapetinurpalia@gmail.com, adenoviarahma_mufti@yahoo.co.id

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk mendapatkan bentuk umum dari matriks segitiga ordo 4×4 berpangkat bilangan bulat positif. Diberikan matriks A_4 yang merupakan matriks segitiga bawah bentuk khusus dengan entri-entri yang tidak nol dinyatakan dengan $a \in \mathbb{R}$, dengan langkah awal menghitung A_4^2 hinggah A_4^{10} dan kemudian mendapatkan A_4^n dengan *n* bilangan bulat positif. Selanjutnya membentuk A_4^n dengan induksi matematika dan dicari $|A_4^n|$ dengan menggunakan ekspansi kofaktor baris pertama. Dari penelitian ini didapatkan juga didapatkan B_4^n yang merupakan matriks segitiga atas dengan mentranspos A_4^n . Sehingga didapat hasil akhir dari $|(A_4)^n| = |(B_4)^n| = a^{4n}$.

Kata kunci: *Determinan, Ekspansi Kofaktor, Induksi Matematika, Matriks Segitiga, Perkalian Matriks.*

Abstract

This research aims to obtain the general form of a 4×4 triangular matrix with positive integer powers. Given a matrix A_4 which is a special form of lower triangular matrix with non-zero entries expressed by $a \in \mathbb{R}$, with the initial step calculating A_4^2 to A_4^{10} and then getting A_4^n with n positive integers. Next, form A_4^n by mathematical induction and look for $|A_4^n|$ by using first row cofactor expansion. From this research, it was also found that B_4^n is an upper triangular matrix by transposing A_4^n . So the final result is $|(A_4)^n| = |(B_4)^n| = a^{4n}$.

***Keywords**: Cofactor Expansion, Determinant, Mathematical Induction, Matrix Multiplication, Triangular Matrix.*

1. Pendahuluan

Sejalannya ilmu pengetahuan masa kini, tanpa disadari telah banyak dijumpai pengaplikasian teori matriks dalam kehidupan sehari-hari[1]. Salah satu teori matriks yang digunakan yaitu dalam menganalisis pengeluaran dan pemasukan dalam bisnis menggunakan operasi matriks. Beberapa jenis matriks yang digunakan pada penelitian ini yaitu Matriks Hankel, Matriks Hassenberg[2], Matriks Toeplitz[3], dan salah satunya Matriks Segitiga yang akan menjadi pembahasan pada penelitian ini.

Matriks Segitiga terbagi menjadi dua, yaitu: Matriks Segitiga Atas dan Matriks Segitiga Bawah. Matriks segitiga atas merupakan sebuah matriks bujursangkar yang seluruh entri di bawah diagonal utamanya adalah nol. Sebaliknya matriks segitiga bawah adalah matriks bujur sangkar yang seluruh entri di atas diagonal utamanya adalah nol[4]. Sehingga Bentuk umum dari matriks segitiga bawah dan atas sebagai berikut:

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & a_{i4} & \cdots & a_{ij} \end{bmatrix} B_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1j} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2j} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3j} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \cdots & a_{4j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{ij} \end{bmatrix}$$

Dengan A_{ij} dan B_{ij} adalah entri-entri yang teletak pada baris ke-*i* dan kolom ke-*j.*

Salah satu pembahasan dalam teori matriks adalah menentukan determinan suatu matriks determinan memiliki peranan penting dalam menyelesaikan beberapa persoalan dalam matriks dan banyak dipergunakan dalam ilmu matematika maupun ilmu terapannya. Nilai determinan matriks dapat menentukan Invers matriks[5]. Jika nilai determinan matriks tidak nol, maka matriks tersebut mempunyai Invers. Namun jika nilai determinannya nol, maka matriks

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

tersebut tidak mempunyai Invers. Nilai determinan juga dapat menyelesaikan sistem persamaan linear. Sistem persamaan linear ini banyak digunakan dalam bidang ilmu optimasi, ekonomi dan lainnya. Menghitung nilai determinan suatu matriks dapat menggunakan beberapa metode, diantaranya Metode Sarrus[6], Metode Ekspansi Kofaktor, Metode CHIO, Metode Eliminasi Gauss, Metode Dekomposisi. Pada penelitian ini metode yang akan digunakan adalah Metode Ekspansi Kofaktor [7].

Tahun 2018, Fitri Aryani dkk meneliti mengenai determinan matriks *FLDcirc,* bentuk khusus menggunakan ekspansi kofaktor, pola matriks yang digunakan sebagai berikut :

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

Tahun 2020, Ade Novia Rahma dkk meneliti mengenai determinan matriks segitiga atas bentuk khusus bentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif menggunakan kofaktor. Matriksnya berbentuk :

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \forall a \in R$$

Tahun 2020, Corry Corazon, dkk meneliti mengenai trace matriks segitiga 4×4 berpangkat bilangan bulat. Matriks yang digunakan berbentuk sebagai berikut :

$$A_4 = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \forall a,b,c,d \in R \; B_4 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ c & b & a & 0 \\ d & c & b & a \end{bmatrix}, \forall a,b,c,d \in R$$

Pada penelitian ini matriks yang digunakan adalah matriks segitiga bawah bentuk khusus ordo 4×4 berpangkat bilangan bulat positif. Bentuk matriks yang digunakan sebagai berikut :

$$A_4 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & 0 \\ a & a & a & 0 \\ a & a & a & a \end{bmatrix} \forall a \in R, a \neq 0 \tag{1}$$

2. Metode Penelitian

Pada penelitian ini menggunakan metode studi literatur atau kajian pustaka. Dalam bab ini akan dijelaskan mengenai langkah-langkah atau tahapan-tahapan proses mendapatkan bentuk umum determinan matriks segitiga bentuk khusus ordo 4×4 berpangkat bilangan bulat positif pada Persamaan (1). Berikut diberikan Teorema pendukung dalam penelitian ini.

Teorema 2.1

a) Transpos dari matriks segitiga bawah adalah matriks segitiga atas, dan transpos matriks segitiga atas adalah matriks segitiga bawah.
b) Hasilkali dari matriks-matriks segitiga bawah adalah matriks segitiga bawah, hasilkali matriks-matriks segitiga atas adalah matriks segitiga atas.

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

c) Sebuah matriks segitiga dapat dibalik jika dan hanya jika semua entri-entri pada diagonalnya bilangan tak nol.
d) Invers dari matrik segitiga bawah yang dapat dibalik adalah matriks segitiga bawah, dan invers dari matriks segitiga atas yang dapat dibalik adalah matriks segitiga atas.

Langkah – langkah pada penelitian ini :

1. Diberikan suatu matriks Segitiga bawah A_4 bentuk khusus pada Persamaan (1).
2. Menghitung perpangkatan A_4^2 sampai A_4^{10}.
3. Menduga bentuk umum dari matriks A_4^n dengan n bilangan bulat positif.
4. Membuktikan bentuk umum dari matriks A_4^n dengan menggunakan induksi matematika.
5. Menentukan $\left|A_4^n\right|$ dengan ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama.
6. Mentranspos A_4^n sehingga didapatkan B_4^n yang merupakan matriks segitiga atas.
7. Membentuk $\left|B_4^n\right|$ dengan merujuk ke Teorema 2.1.

3. Hasildan Analisa

Pada penelitian ini akan dibahas mengenai langkah – langkah untuk menentukan bentuk umum matriks segitiga ordo 4×4 berpangkat bilangan bulat positif.

1. Diberikan suatu matriks Segitiga bawah A_4 bentuk khusus pada Persamaan (1).
2. Menghitung perpangkatan matriks A_4^2 sampai A_4^{10}

$$A_4^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 2a^2 & a^2 & 0 & 0 \\ 3a^2 & 2a^2 & a^2 & 0 \\ 4a^2 & 3a^2 & 2a^2 & a^2 \end{bmatrix} A_4^3 = \begin{bmatrix} a^3 & 0 & 0 & 0 \\ 3a^3 & a^3 & 0 & 0 \\ 6a^3 & 3a^3 & a^3 & 0 \\ 10a^3 & 6a^3 & 3a^3 & a^3 \end{bmatrix} A_4^4 = \begin{bmatrix} a^4 & 0 & 0 & 0 \\ 4a^4 & a^4 & 0 & 0 \\ 10a^4 & 4a^4 & a^4 & 0 \\ 20a^4 & 10a^4 & 4a^4 & a^4 \end{bmatrix}$$

$$A_4^5 = \begin{bmatrix} a^5 & 0 & 0 & 0 \\ 5a^5 & a^5 & 0 & 0 \\ 15a^5 & 5a^5 & a^5 & 0 \\ 35a^5 & 15a^5 & 5a^5 & a^5 \end{bmatrix} A_4^6 = \begin{bmatrix} a^6 & 0 & 0 & 0 \\ 6a^6 & a^6 & 0 & 0 \\ 21a^6 & 6a^6 & a^6 & 0 \\ 56a^6 & 21a^6 & 6a^6 & a^6 \end{bmatrix} A_4^7 = \begin{bmatrix} a^7 & 0 & 0 & 0 \\ 7a^7 & a^7 & 0 & 0 \\ 28a^7 & 7a^7 & a^7 & 0 \\ 84a^7 & 28a^7 & 7a^7 & a^7 \end{bmatrix}$$

$$A_4^8 = \begin{bmatrix} a^8 & 0 & 0 & 0 \\ 8a^8 & a^8 & 0 & 0 \\ 36a^8 & 8a^8 & a^8 & 0 \\ 120a^8 & 36a^8 & 8a^8 & a^8 \end{bmatrix} A_4^9 = \begin{bmatrix} a^9 & 0 & 0 & 0 \\ 9a^9 & a^9 & 0 & 0 \\ 45a^9 & 9a^9 & a^9 & 0 \\ 165a^9 & 45a^9 & 9a^9 & a^9 \end{bmatrix} A_4^{10} = \begin{bmatrix} a^{10} & 0 & 0 & 0 \\ 10a^{10} & a^{10} & 0 & 0 \\ 55a^{10} & 10a^{10} & a^{10} & 0 \\ 220a^{10} & 55a^{10} & 10a^{10} & a^{10} \end{bmatrix}$$

3. Menduga bentuk umum A_4^n yaitu:

$$A_4^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 & 0 \\ na^n & a^n & 0 & 0 \\ \left(\frac{n(n+1)}{2!}\right)a^n & na^n & a^n & 0 \\ \left(\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\right)a^n & \left(\frac{n(n+1)}{2!}\right)a^n & na^n & a^n \end{bmatrix} \tag{2}$$

4. Bentuk umum dari matriks A_4^n

Diberikan pada Teorema 3.1 berikut.

Teorema 3. 1 Jika diberikan matriks

$$A_4 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & 0 \\ a & a & a & 0 \\ a & a & a & a \end{bmatrix} \forall a \in R, a \neq 0$$

Maka,

$$A_4^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 & 0 \\ na^n & a^n & 0 & 0 \\ \left(\frac{n(n+1)}{2!}\right)a^n & na^n & a^n & 0 \\ \left(\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\right)a^n & \left(\frac{n(n+1)}{2!}\right)a^n & na^n & a^n \end{bmatrix} \quad (3)$$

Bukti : Pembuktian Teorema diatas menggunakan induksi matematika

1. Basis induksi

   Untuk $n = 1$ maka

$$P(1): A_4^1 = \begin{bmatrix} a^1 & 0 & 0 & 0 \\ 1a^1 & a^1 & 0 & 0 \\ \left(\frac{1(1+1)}{2!}\right)a^1 & 1a^1 & a^1 & 0 \\ \left(\frac{1(1+1)(1+2)}{3!}\right)a^1 & \left(\frac{1(1+1)}{2!}\right)a^1 & 1a^1 & a^1 \end{bmatrix}$$

$$A_4^1 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & 0 \\ a & a & a & 0 \\ a & a & a & a \end{bmatrix}$$

   Karena $P(1) = A_4$ maka $P(1)$ adalah benar.

2. Langkah induksi

   Asumsikan $n = k$, $P(k)$ benar yaitu:

$$P(k): A_4^k = \begin{bmatrix} a^k & 0 & 0 & 0 \\ ka^k & a^k & 0 & 0 \\ \left(\frac{k(k+1)}{2!}\right)a^k & ka^k & a^k & 0 \\ \left(\frac{k(k+1)(k+2)}{3!}\right)a^k & \left(\frac{k(k+1)}{2!}\right)a^k & ka^k & a^k \end{bmatrix}$$

   Atau dapat ditulis:

$$A_4^k = [a_{ij}] = \begin{cases} a^k & i = j = 1,2,3,4 \\ ka^k & i > j = i+1;\ j = 1,2,3 \\ \left(\frac{k(k+1)}{2!}\right)a^k & i > j = i+2;\ j = 1,2 \\ \left(\frac{k(k+1)(k+2)}{3!}\right)a^k & i > j = i+3;\ j = 1 \end{cases}$$

3. Maka akan ditunjukkan untuk $n = k+1$, $P(k+1)$ juga benar yaitu :

$$P(k+1): A_4^{k+1} = \begin{bmatrix} a^{k+1} & 0 & 0 & 0 \\ (k+1)a^{k+1} & a^{k+1} & 0 & 0 \\ \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2!}\right)a^{k+1} & (k+1)a^{k+1} & a^{k+1} & 0 \\ \left(\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3!}\right)a^{k+1} & \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2!}\right)a^{k+1} & (k+1)a^{k+1} & (k+1)a^{k+1} \end{bmatrix}$$

$$P(k+1): A_4^{k+1} = A_4^k \cdot A_4$$

$$A_4^{k+1} = \begin{bmatrix} a^k & 0 & 0 & 0 \\ ka^k & a^k & 0 & 0 \\ \left(\frac{k(k+1)}{2!}\right)a^k & ka^k & a^k & 0 \\ \left(\frac{k(k+1)(k+2)}{3!}\right)a^k & \left(\frac{k(k+1)}{2!}\right)a^k & ka^k & a^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & 0 \\ a & a & a & 0 \\ a & a & a & a \end{bmatrix}$$

   Berdasarkan Teorema 2.1, hasil kali matriks segitiga bawah dengan matriks segitiga bawah adalah matriks segitiga bawah dan entri-entri diatas diagonal utama

 ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

bernilai nol. Dengan kata lain jika $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ maka entri-entri $a_{ij} = a_{(i+1),1}$ dimana $i \geq j$ bernilai tak nol dan selainnya bernilai nol [10]. Sehingga dapat disimpulkan bahwa hasil kali dari $(A_4^k)\cdot(A_4)$ merupakan matriks segitiga bawah. Berikut hasil perkalian $(A_4^k)\cdot(A_4)$

1. Entri-entri diagonal utama dari A_4^{k+1} untuk $i = j = 1,2,3,4$

   $a_{11} = (a^k)a + 0 \cdot a + 0 \cdot a + 0$

   $a_{11} = a^{k+1}$

   Dengan cara yang sama diperoleh $a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = a^{k+1}$

2. Entri – entri dari A_4^{k+1} untuk $i > j = i+1, j = 1,2,3$

   $a_{21} = (ka^k)a + (a^k)a + 0 \cdot a + 0 \cdot a$

   $a_{21} = (k+1)a^{k+1}$

   Dengan cara yang sama $a_{21} = a_{32} = a_{43} = (k+1)a^{k+1}$

3. Entri – entri dari A_4^{k+1} untuk $i > j = i+2, j = 1,2$

   $a_{31} = \left(\frac{k(k+1)}{2!}a^k\right)a + (ka^k)a + (a^k)a + 0 \cdot a$

   $a_{31} = \frac{(k+1)(k+2)}{2!}a^{k+1}$

   Dengan cara yang sama $a_{31} = a_{42} = \frac{(k+1)(k+2)}{2!}a^{k+1}$

4. Entri-entri dari A_4^{k+1} untuk $i > j = i+3, j = 1$

   $a_{41} = \left(\frac{k(k+1)(k+2)}{3!}a^k\right)a + \left(\frac{k(k+1)}{2!}a^k\right)a + (ka^k)a + (a^k)a$

   $a_{41} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3!}a^{k+1}$

Sehingga diperoleh bentuk matriksnya sebagai berikut :

$$A_4^{k+1} = \begin{bmatrix} a^{k+1} & 0 & 0 & 0 \\ (k+1)a^{k+1} & a^{k+1} & 0 & 0 \\ \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2!}\right)a^{k+1} & (k+1)a^{k+1} & a^{k+1} & 0 \\ \left(\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3!}\right)a^{k+1} & \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2!}\right)a^{k+1} & (k+1)a^{k+1} & (k+1)a^{k+1} \end{bmatrix}$$

Dengan melihat persamaan diatas $P(k+1)$ benar. Maka Teorema 2.1 terbukti.

5. Menentukan $|A_4^n|$ dengan ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama.

   Berdasarkan Teorema 3.1 telah diperoleh A_4^n pada Persamaan (3). Dengan menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama dapat dihitung sebagai berikut:

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$\left|A_4^n\right| = a^n \begin{vmatrix} a^n & 0 & 0 \\ na^n & a^n & 0 \\ \left(\frac{n(n+1)}{2!}\right)a^n & na^n & a^n \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} na^n & 0 & 0 \\ \left(\frac{n(n+1)}{2!}\right)a^n & a^n & 0 \\ \left(\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\right)a^n & na^n & a^n \end{vmatrix}$$

$$+0 \begin{vmatrix} na^n & a^n & 0 \\ \left(\frac{n(n+1)}{2!}\right)a^n & na^n & 0 \\ \left(\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\right)a^n & \left(\frac{n(n+1)}{2!}\right)a^n & a^n \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} na^n & a^n & 0 \\ \left(\frac{n(n+1)}{2!}\right)a^n & na^n & a^n \\ \left(\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\right)a^n & \left(\frac{n(n+1)}{2!}\right)a^n & na^n \end{vmatrix}$$

$$\left|A_4^n\right| = a^n \begin{vmatrix} a^n & 0 & 0 \\ na^n & a^n & 0 \\ \left(\frac{n(n+1)}{2!}\right)a^n & na^n & a^n \end{vmatrix}$$

$$\left|A_4^n\right| = a^n\left(a^{3n}\right) + 0 + 0 + 0$$

$$\left|A_4^n\right| = a^{4n} \tag{4}$$

6. Mentranspos A_4^n sehingga didapatkan B_4^n yang merupakan matriks segitiga atas.
   Dengan mentranspos A_4^n pada Persamaan (2) didapatkan B_4^n yang merupakan matriks segitiga atas.

$$B_4^n = (A_4^n)^T$$

$$B_4^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 & 0 \\ na^n & a^n & 0 & 0 \\ \left(\frac{n(n+1)}{2!}\right)a^n & na^n & a^n & 0 \\ \left(\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\right)a^n & \left(\frac{n(n+1)}{2!}\right)a^n & na^n & a^n \end{bmatrix}^T$$

$$B_4^n = \begin{bmatrix} a^n & na^n & \left(\frac{n(n+1)}{2!}\right)a^n & \left(\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\right)a^n \\ 0 & a^n & na^n & \left(\frac{n(n+1)}{2!}\right)a^n \\ 0 & 0 & a^n & na^n \\ 0 & 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}$$

7. Selanjutnya dihitung $\left|B_4^n\right|$ dengan menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang kolom kedua.

$$\left|B_4^n\right| = a^n \begin{vmatrix} a^n & na^n & \left(\frac{n(n+1)}{2!}\right)a^n \\ 0 & a^n & na^n \\ 0 & 0 & a^n \end{vmatrix}$$

$$\left|B_4^n\right| = a^n(a^{3n}) + 0 + 0 + 0$$

$$\left|B_4^n\right| = a^{4n} \tag{5}$$

Berdasarkan Persamaan (4) dan Persamaan (5) ternyata diperoleh

$$\left|A_4^n\right| = \left|B_4^n\right| = a^{4n}$$
.

4. Kesimpulan

Jadi diberikan matriks A_4 yang merupakan matriks segitiga bawah pada Persamaan (1) maka diperoleh

$$A_4^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 & 0 \\ na^n & a^n & 0 & 0 \\ \left(\frac{n(n+1)}{2!}\right)a^n & na^n & a^n & 0 \\ \left(\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\right)a^n & \left(\frac{n(n+1)}{2!}\right)a^n & na^n & a^n \end{bmatrix}$$

Lalu transpos dari A_4 yaitu B_4^n yang merupakan matriks matriks segitiga atas didapatkan

$$B_4^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 & 0 \\ na^n & a^n & 0 & 0 \\ \left(\frac{n(n+1)}{2!}\right)a^n & na^n & a^n & 0 \\ \left(\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\right)a^n & \left(\frac{n(n+1)}{2!}\right)a^n & na^n & a^n \end{bmatrix}^T$$

Sehingga diperoleh $\left|A_4^n\right| = \left|B_4^n\right| = a^{4n}$

.

Referensi

[1] R. Rahmawati, A. Citra, F. Aryani, C. C. Marzuki, and Y. Muda, “Trace of Positive Integer Power of Squared Special Matrix,” *Cauchy J. Mat. Murni dan Apl.*, vol. 6, no. 4, pp. 200–211, 2021, doi: 10.18860/ca.v6i4.10312.

[2] Rahmawati, Saniyah, and A. N. Rahma, “Invers Matriks Toeplitz-Hessenberg Bentuk Khusus Menggunakan Metode Faddeev,” *Semin. Nas. Tek. Informasi, Komun. dan Ind.*, no. November, pp. 405–411, 2019.

[3] Rahmawati, N. A. Putri, F. Aryani, and A. N. Rahma, “Trace Matriks Toeplitz Simetris Bentuk Khusus Ordo 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif,” *J. Sains Mat. dan Stat.*, vol. 5, no. 2, pp. 61–70, 2019.

[4] A. N. Rahma, R. Rahmawati, and S. M. Jauza, “Determinan Matriks segitiga atas Bentuk Khusus Ordo 3x3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif Dengan Kofaktor,” *J. Sains Mat. dan Stat.*, vol. 6, no. 2, p. 89, 2020, doi: 10.24014/jsms.v6i2.10552.

[5] R. H. Vitho, “Invers Matriks Centrosymmetric Bentuk Khusus Ordo n×n Menggunakan Adjoin,” vol. 4, no. 1, pp. 199–210, 2022.

[6] . Rahmawati, W.,& Jelita., M, “Jejak Pangkat Bilangan Bulat Matriks Nyata 3 x 3,” *Int. J. Adv. Sci. Res. Eng.*, pp. 48–56, 2019.

[7] X. Aqilah, “Invers Matriks Hankel Bentuk Khusus Ordo 3 X 3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif Menggunakan Adjoin,” *J. Ekon. Vol. 18, Nomor 1 Maret201*, vol. 2, no. 1, pp. 41–49, 2020.

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

[8] A. N. Rahma, R. Rahmawati, and S. M. Jauza, "Determinan Matriks Centrosymmetric Bentuk Khusus Ordo Berpangkat Bilangan Bulat Positif Dengan Kofaktor," *J. Sains Mat. dan Stat.*, vol. 6, no. 2, p. 89, 2020, doi: 10.24014/jsms.v6i2.10552.
[9] R. Rahmawati, N. Fitri, and A. N. Rahma, "Invers Matriks RSFPLRcircfr (0,b,...,b)," *J. Sains Mat. dan Stat.*, vol. 6, no. 1, p. 113, 2020, doi: 10.24014/jsms.v6i1.9260.
[10] A. N. Rahma, R. Rahmawati, and W. Wahyuni, "Metode Eliminasi Gauss untuk Penyelesaian Sistem Kongruensi Linier," *J. Sains Mat. dan Stat.*, vol. 6, no. 1, p. 30, 2020, doi: 10.24014/jsms.v6i1.9250.
[11] C. C. Marzuki, F. Aryani, and R. Rahmawati, "Trace Matriks n×n Berbentuk Khusus Berpangkat Bilangan Bulat Positif," *J. Sains Mat. dan Stat.*, vol. 7, no. 1, p. 28, 2021, doi: 10.24014/jsms.v7i1.11561.
[12] F. Aryani, M. Zawarnii, K. Susilowati, Y. Muda, C. C. Marzuki, and Rahmawati, "Trace Matriks Segitiga 4x4 Berpangkat Bilangan Bulat," *Semin. Nas. Teknol. Komun. dan Ind. 12*, pp. 651–661, 2020.
[13] A. N. Rahma, F. Aryani, M. Anggelina, and Rahmawati, "Determinan Matriks Blok 2 x 2 Dalam Aplikasi Matriks FLDcircr Bentuk Khusus," *J. Sains Mat. dan Stat.*, vol. 5, no. 2, pp. 34–42, 2019.