Seminar Nasional Teknologi Informasi, Komunikasi dan Industri (SNTIKI) 15 *ISSN (Printed) : 2579-7271*
Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau *ISSN (Online) : 2579-5406*
Pekanbaru, 24 Oktober 2023

Bentuk Umum Determinan Matriks Segitiga Bentuk Khusus Ordo 6×6 Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Rahmawati*[1], Mayang Nurul Ihza[2], Ade Novia Rahma[3], Corry Corazon Marzuki[4]
[1,2,3,4] Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Email: [1]Rahmawati@uin-suska.ac.id, [2]Mayangbkn@gmail.com

Abstrak

Determinan pada suatu matriks merupakan selisih antara perkalian entri-entri pada diagonal utama dengan diagonal sekunder. Penelitian ini bertujuan untuk mendapatkan bentuk umum determinan matriks segitiga bentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif dengan menggunakan metode kofaktor. Diberikan terlebih dahulu matriks segitiga atas (A_6) dengan a_{ij} yang tidak bernilai nol dinyatakan dengan $a \in R$. Langkah pertama penelitian ini adalah dengan menghitung $(A_6)^2$ hingga $(A_6)^{10}$, serta menduga bentuk umum dari $(A_6)^n$. Selanjutnya membukikan $(A_6)^n$ dengan menggunakan induksi matematika. Pada tahap akhir, juga didapatkan bentuk umum matriks segitiga bawah berpangkat bilangan bulat positif dari $(A_6)^n$ yaitu $(B_6)^n$ dengan hasil akhir penelitian diperoleh $|(A_6)^n| = |(B_6)^n| = a^{6n}$.

Kata kunci: *Determinan Matriks, Matriks berpangkat,Matriks Segitiga.*

Abstract

The determinant of a matrix is defined as the difference between the multiplication of the entries on the main diagonal and the secondary diagonal. This general study aims to obtain positive integers power of special triangular of matrix determinant by using the cofactor method and given the upper triangular matrix(A_6) first. At the beginning of the research, it will be increased up $(A_6)^2$ to $(A_6)^{10}$. Then it will be estimated general forms $(A_6)^n$ and $(B_6)^n$ to prove by using mathematical induction. Furthermore, the general form will be sought and by using the cofactor method so that the final results of this study are obtained $|(A_6)^n| = |(B_6)^n| = a^{6n}$.

***Keywords**: Matrix Determinant, Power of Matriks, Triangular Matrix.*

1. Pendahuluan

Teori matriks merupakan salah satu cabang ilmu aljabar linier elementer. Matriks memiliki beberapa jenis misalnya Matriks Hankel, Matriks Hassenberg[1], Matriks Toeplitz[2], matriks segitiga, dan lainnya. Pada penelitian ini akan membahas mengenai Matriks Segitiga. Matriks Segitiga terbagi menjadi dua, yaitu: Matriks Segitiga Atas dan Matriks Segitiga Bawah. Matriks segitiga atas merupakan sebuah matriks bujursangkar yang seluruh entri di bawah diagonal utamanya adalah nol. Sebaliknya matriks segitiga bawah adalah matriks bujur sangkar yang seluruh entri di atas diagonal utamanya adalah nol[3]. Sehingga Bentuk umum dari matriks segitiga atas dan bawah sebagai berikut:

$$A_{nn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} B_{nn} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriks dapat dioperasikan kedalam berbagai bentuk seperti, menentukan penjumlahan matriks, pengurangan matriks, perkalian matriks, dan transpose matriks. Beberapa penelitian mengenai matriks telah dilakukan seperti *trace* matriks[2],[4],[5],[6],[7],[8], invers matriks[9],[1],[10],[11],[12], dan determinan matriks yang akan menjadi pembahasan pada penelitian kali ini. Beberapa peneliti terdahulu telah meneliti mengenai determinan matriks. Tahun 2018, Fitri Aryani dan Corry Corazon Marzuki[13] membahas mengenai Determinan Matriks Toeplitz Bentuk Khusus Menggunakan Ekspansi Kofaktor dengan matriks:

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1/a & 1/a & 1/a & \cdots & 1/a \\ a & 0 & 1/a & 1/a & \cdots & 1/a \\ a & a & 0 & 1/a & \cdots & 1/a \\ a & a & a & 0 & \cdots & 1/a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 1/a \\ a & a & a & a & \cdots & 0 \end{bmatrix} \text{dengan } a \in R, a \neq 0.$$

diperoleh bentuk umum determinan

$$|A_n| = \begin{cases} 0 & jika\ n \equiv 6(mod\ 2)\ atau\ n = 6(mod\ 5) \\ 1 & jika\ n \equiv 6(mod\ 0)\ atau\ n = 6(mod\ 1) \\ -1 & jika\ n \equiv 6(mod\ 3)\ atau\ n = 6(mod\ 4) \end{cases}$$

Tahun 2019, Ade Novia Rahma,dkk[14], meneliti mengenai Determinan Matriks Centrosymetric Bentuk Khusus Ordo 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif menggunakan metode yang sama pada penelitian sebelumnya dengan matriks:

$$(A_3) = \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & a & a \end{bmatrix} \text{dengan } a \in R.$$

Dan diperoleh $|(A_3)^n| = a^{3n}$. Selanjutnya, masih mengenai determinan matriks Ade Novia Rahma, dkk[15], juga melakukan penelitian mengenai Determinan Matriks blok 2×2 Dalam Aplikasi Matriks FLDcirc$_r$ Bentuk Khusus dengan bentuk matriks:

$$P_n = \left[\begin{array}{cc|cccccccccc} 0 & 0 & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ \hline ra & -ra & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ra & -ra & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Dan diperoleh $|P_n| = (-1)^{(n^2-3n+4)} r^2 a^n$.

Tahun 2020, Ricken, dkk[16] meneliti mengenai Determinan Matriks Segitiga Atas Bentuk Khusus Ordo 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif Menggunakan Kofaktor dengan matriks sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

dan diperoleh $|(A_3)^n| = a^{3n}$.

Pada tahun 2021 Ade Novia Rahma dkk[13] meneliti tentang Determinan Matriks Hankel Bentuk Khusus Ordo 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif, dengan matriks:

$$(A_3) = \begin{bmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \end{bmatrix}, \forall a \in R, a \neq 0.$$

Sehingga diperoleh hasil akhir penelitiannya yaitu $|(A_3)^n| = (-1)^n a^{3n}, n \geq 1.$

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Berdasarkan penelitian – penelitian pendukung yang telah dijelaskan sebelumnya dan belum adanya penelitian mengenai determinan matriks segitiga ordo 6×6, penulis tertarik melakukan penelitian mengenai Determinan Matriks Segitiga Bentuk Khusus Ordo 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif, dengan matriks sebagai berikut:

$$(A_6) = \begin{bmatrix} a & a & a & a & a & a \\ 0 & a & a & a & a & a \\ 0 & 0 & a & a & a & a \\ 0 & 0 & 0 & a & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \forall a \in R, a \neq 0. \quad (1)$$

2. Metode Penelitian

Pada penelitian ini, menggunakan metode studi literatur dengan cara menyatukan penjelasan- penjelasan yang berasal dari buku dan jurnal yang berkaitan dengan penelitian ini. Berikut ini merupakan teori-teori pendukung dalam menentukan bentuk umum determinan matriks segitiga yang dinyatakan dalam Teorema 2.1.

Teorema 2.1 [3]

a) Transpos dari matriks segitiga bawah adalah matriks segitiga atas, dan transpos matriks segitiga atas adalah matriks segitiga bawah.
b) Hasilkali dari matriks – matriks segitiga bawah adalah matriks segitiga bawah, hasilkali matriks -matriks segitiga atas adalah matriks segitiga atas.
c) Sebuah matriks segitiga dapat dibalik jika dan hanya jika semua entri-entri pada diagonalnya bilangan tak nol.
d) Invers dari matriks segitiga bawah yang dapat dibalik adalah matriks segitiga bawah, dan invers dari matriks segitiga atas yang dapat dibalik adalah matriks segitiga atas.

Selanjutnya, langkah – langkah dalam menentukan Determinan Matriks Segitiga Atas Bentuk Khusus Ordo 6×6 Berpangkat Bilangan Bulat Positif adala sebagai berikut:

1. Diberikan sebuah matriks segitiga atas bentuk khusus ordo 6×6 yaitu (A_6) pada Persamaan (1).
2. Menghitung $(A_6)^2$ hingga $(A_6)^{10}$.
3. Menduga bentuk umum Matriks Segitiga $(A_6)^n$ dengan $n \in Z^+$.
4. Membuktikan bentuk umum $(A_6)^n$ dengan menggunakan induksi matematika.
5. Menduga bentuk umum determinan matriks segitiga atas $|(A_6)^n|$.
6. Membuktikan $|(A_6)^n|$ dengan menggunakan metode ekpansi kofaktor sepanjang kolom pertama.
7. Menentukan bentuk umum matriks segitiga bawah dari $(A_6)^n$ yaitu $(B_6)^n$ dengan $n \in Z^+$ dan dibuktikan menggunakan teorema matriks segitiga.
8. Menentukan bentuk umum determinan matriks segitiga bawah $|(B_6)^n|$ dan dibuktikan dengan menggunakan metode kofaktor sepanjang baris pertama.
9. Mengaplikasikan bentuk umum determinan matriks segitiga bentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif ke dalam contoh soal.

3. Hasil dan Analisa

3.1. Menentukan bentuk umum Matriks segitiga atas bentuk khusus ordo 6×6 berpangkat bilangan bulat positif.

Berikut ini Langkah- Langkah dalam menentukan bentuk umum dari matriks segitiga atas bentuk khusus ordo 6×6 berpangkat bilangan bulat positif.

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

1. Diberikan sebuah matriks segitiga atas pada Persamaan (1).

2. Menentukan Perpangkatan matriks $(A_6)^2$ hingga $(A_6)^{10}$.

$$(A_6)^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 2a^2 & 3a^2 & 4a^2 & 5a^2 & 6a^2 \\ 0 & a^2 & 2a^2 & 3a^2 & 4a^2 & 5a^2 \\ 0 & 0 & a^2 & 2a^2 & 3a^2 & 4a^2 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 & 2a^2 & 3a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^2 & 2a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$(A_6)^3 = \begin{bmatrix} a^3 & 3a^3 & 6a^3 & 10a^3 & 15a^3 & 21a^3 \\ 0 & a^3 & 3a^3 & 6a^3 & 10a^3 & 15a^3 \\ 0 & 0 & a^3 & 3a^3 & 6a^3 & 10a^3 \\ 0 & 0 & 0 & a^3 & 3a^3 & 6a^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^3 & 3a^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$(A_6)^4 = \begin{bmatrix} a^4 & 4a^4 & 10a^4 & 20a^4 & 35a^4 & 56a^4 \\ 0 & a^4 & 4a^4 & 10a^4 & 20a^4 & 35a^4 \\ 0 & 0 & a^4 & 4a^4 & 10a^4 & 20a^4 \\ 0 & 0 & 0 & a^4 & 4a^4 & 10a^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^4 & 4a^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^4 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$(A_6)^5 = \begin{bmatrix} a^5 & 5a^5 & 15a^5 & 35a^5 & 70a^5 & 126a^5 \\ 0 & a^5 & 5a^5 & 15a^5 & 35a^5 & 70a^5 \\ 0 & 0 & a^5 & 5a^5 & 15a^5 & 35a^5 \\ 0 & 0 & 0 & a^5 & 5a^5 & 15a^5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^5 & 5a^5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^5 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$(A_6)^6 = \begin{bmatrix} a^6 & 6a^6 & 21a^6 & 56a^6 & 126a^6 & 252a^6 \\ 0 & a^6 & 6a^6 & 21a^6 & 56a^6 & 126a^6 \\ 0 & 0 & a^6 & 6a^6 & 21a^6 & 56a^6 \\ 0 & 0 & 0 & a^6 & 6a^6 & 21a^6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^6 & 6a^6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^6 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$(A_6)^7 = \begin{bmatrix} a^7 & 7a^7 & 28a^7 & 84a^7 & 210a^7 & 462a^7 \\ 0 & a^7 & 7a^7 & 28a^7 & 84a^7 & 210a^7 \\ 0 & 0 & a^7 & 7a^7 & 28a^7 & 84a^7 \\ 0 & 0 & 0 & a^7 & 7a^7 & 28a^7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^7 & 7a^7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^7 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$(A_6)^8 = \begin{bmatrix} a^8 & 8a^8 & 36a^8 & 120a^8 & 330a^8 & 792a^8 \\ 0 & a^8 & 8a^8 & 36a^8 & 120a^8 & 330a^8 \\ 0 & 0 & a^8 & 8a^8 & 36a^8 & 120a^8 \\ 0 & 0 & 0 & a^8 & 8a^8 & 36a^8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^8 & 8a^8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^8 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$(A_6)^9 = \begin{bmatrix} a^9 & 9a^9 & 45a^9 & 165a^9 & 495a^9 & 1287a^9 \\ 0 & a^9 & 9a^9 & 45a^9 & 165a^9 & 495a^9 \\ 0 & 0 & a^9 & 9a^9 & 45a^9 & 165a^9 \\ 0 & 0 & 0 & a^9 & 9a^9 & 45a^9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^9 & 9a^9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^9 \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$(A_6)^{10} = \begin{bmatrix} a^{10} & 10a^{10} & 55a^{10} & 220a^{10} & 715a^{10} & 2002a^{10} \\ 0 & a^{10} & 10a^{10} & 55a^{10} & 220a^{10} & 715a^{10} \\ 0 & 0 & a^{10} & 10a^{10} & 55a^{10} & 220a^{10} \\ 0 & 0 & 0 & a^{10} & 10a^{10} & 55a^{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^{10} & 10a^{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{10} \end{bmatrix} \tag{10}$$

3. Menduga bentuk umum $(A_6)^n$dengan memperhatikan Persamaan (2) - (10) sebagai berikut:

$$(A_6)^n = \begin{bmatrix} a^n & na^n & \frac{n(n+1)}{2!}a^n & \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}a^n & \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}a^n & \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5!}a^n \\ 0 & a^n & na^n & \frac{n(n+1)}{2!}a^n & \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}a^n & \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}a^n \\ 0 & 0 & a^n & na^n & \frac{n(n+1)}{2!}a^n & \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}a^n \\ 0 & 0 & 0 & a^n & na^n & \frac{n(n+1)}{2!}a^n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^n & na^n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}$$

4. Membuktikan bentuk umum dari $(A_6)^n$ dengan menggunakan induksi matematika dan dinyatakan pada teorema berikut:

Teorema 3.1 Jika diberikan sebuah matriks segitiga atas

$$(A_6)^n = \begin{bmatrix} a & a & a & a & a & a \\ 0 & a & a & a & a & a \\ 0 & 0 & a & a & a & a \\ 0 & 0 & 0 & a & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \forall a \in R, a \neq 0. \text{ Maka}$$

$$(A_6)^n = \begin{bmatrix} a^n & na^n & \frac{n(n+1)}{2!}a^n & \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}a^n & \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}a^n & \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5!}a^n \\ 0 & a^n & na^n & \frac{n(n+1)}{2!}a^n & \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}a^n & \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}a^n \\ 0 & 0 & a^n & na^n & \frac{n(n+1)}{2!}a^n & \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}a^n \\ 0 & 0 & 0 & a^n & na^n & \frac{n(n+1)}{2!}a^n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^n & na^n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^n \end{bmatrix} \tag{11}$$

Bukti: Teorema di atas akan dibuktikan dengan menggunakan induksi matematika.

Misalkan

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$P(n):(A_6)^n=\begin{bmatrix} a^n & na^n & \frac{n(n+1)}{2!}a^n & \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}a^n & \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}a^n & \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5!}a^n \\ 0 & a^n & na^n & \frac{n(n+1)}{2!}a^n & \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}a^n & \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}a^n \\ 0 & 0 & a^n & na^n & \frac{n(n+1)}{2!}a^n & \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}a^n \\ 0 & 0 & 0 & a^n & na^n & \frac{n(n+1)}{2!}a^n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^n & na^n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}$$

1. Basis induksi: untuk $n = 1$, maka

$$p(1):(A_6)^1=\begin{bmatrix} a^1 & 1a^1 & \frac{1(1+1)}{2!}a^1 & \frac{1(1+1)(1+2)}{3!}a^1 & \frac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{4!}a^1 & \frac{1(1+1)(1+2)(1+3)(1+4)}{5!}a^1 \\ 0 & a^1 & 1a^1 & \frac{1(1+1)}{2!}a^1 & \frac{1(1+1)(1+2)}{3!}a^1 & \frac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{4!}a^1 \\ 0 & 0 & a^1 & 1a^1 & \frac{1(1+1)}{2!}a^1 & \frac{1(1+1)(1+2)}{3!}a^1 \\ 0 & 0 & 0 & a^1 & 1a^1 & \frac{1(1+1)}{2!}a^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^1 & 1a^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^1 \end{bmatrix}$$

$$(A_6)^1=\begin{bmatrix} a & a & a & a & a & a \\ 0 & a & a & a & a & a \\ 0 & 0 & a & a & a & a \\ 0 & 0 & 0 & a & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

Karena $p(1) = A_6$ maka $p(1)$ bernilai benar.

2. Langkah induksi: Asumsikan bahwa $n = k$,

$$p(k):(A_6)^k=\begin{bmatrix} a^k & ka^k & \frac{k(k+1)}{2!}a^k & \frac{k(k+1)(k+2)}{3!}a^k & \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4!}a^k & \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{5!}a^k \\ 0 & a^k & ka^k & \frac{k(k+1)}{2!}a^k & \frac{k(k+1)(k+2)}{3!}a^k & \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4!}a^k \\ 0 & 0 & a^k & ka^k & \frac{k(k+1)}{2!}a^k & \frac{k(k+1)(k+2)}{3!}a^k \\ 0 & 0 & 0 & a^k & ka^k & \frac{k(k+1)}{2!}a^k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^k & ka^k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^k \end{bmatrix}$$

bernilai benar.

Maka selanjutnya akan ditunjukkan untuk $n = k + 1$, $p(k + 1)$ juga bernilai benar.

hal ini dapat dibuktikan :

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$P(k+1):(A_6)^{k+1}=(A_6)^k\cdot A_6$

$$=\begin{bmatrix} a^k & ka^k & \frac{k(k+1)}{2!}a^k & \frac{k(k+1)(k+2)}{3!}a^k & \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4!}a^k & \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{5!}a^k \\ 0 & a^k & ka^k & \frac{k(k+1)}{2!}a^k & \frac{k(k+1)(k+2)}{3!}a^k & \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4!}a^k \\ 0 & 0 & a^k & ka^k & \frac{k(k+1)}{2!}a^k & \frac{k(k+1)(k+2)}{3!}a^k \\ 0 & 0 & 0 & a^k & ka^k & \frac{k(k+1)}{2!}a^k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^k & ka^k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & a & a & a & a & a \\ 0 & a & a & a & a & a \\ 0 & 0 & a & a & a & a \\ 0 & 0 & 0 & a & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

Menurut Teorema 2.1 [4], hasil kali matriks segitiga atas dengan matriks segitiga atas adalah matriks segitiga atas pula. Dengan kata lain jika $A=[a_{ij}]$ maka entri- entri a_{ij} untuk $i\le j$ bernilai tak nol dan selain nya bernilai nol. Sehingga dapat disimpulkan bahwa hasil kali dari $(A_6)^k(A_6)$ adalah matriks seegitiga atas. Berikut hasil perkalian $(A_6)^k(A_6)$:

1. Entri-entri diagonal utama pada $(A_6)^{k+1}$ untuk $i=j=1,2,3,4,5,6$.

$$\begin{aligned} a_{11} &= (a^k)a + ka^k(0) + \frac{k(k+1)}{2!}a^k(0) + \frac{k(k+1)(k+2)}{3!}a^k(0) \\ &\quad + \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4!}a^k(0) + \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{5!}a^k(0) \\ &= a^{k+1} \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama diperoleh $a_{11}=a_{22}=a_{33}=a_{44}=a_{55}=a_{66}=a^{k+1}$.

2. Entri – entri a_{ij} untuk $i<j=i+1, i=1,2,3,4,5.$

$$\begin{aligned} a_{12} &= (a^k)a + ka^k(a) + \frac{k(k+1)}{2!}a^k(0) + \frac{k(k+1)(k+2)}{3!}a^k(0) \\ &\quad + \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4!}a^k(0) + \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{5!}a^k(0) \\ &= a^{k+1} + ka^{k+1} \\ &= (k+1)a^{k+1} \end{aligned}$$

Diperoleh dengan cara yang sama untuk $a_{12}=a_{23}=a_{34}=a_{45}=a_{56}=(k+1)a^{k+1}$.

3. Entri – entri a_{ij} untuk $i<j=i+2, i=1,2,3,4.$

$$\begin{aligned} a_{13} &= (a^k)a + ka^k(a) + \frac{k(k+1)}{2!}a^k(a) + \frac{k(k+1)(k+2)}{3!}a^k(0) \\ &\quad + \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4!}a^k(0) + \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{5!}a^k(0) \\ &= (a^{k+1} + ka^{k+1}) \\ &= (k+1)a^{k+1} + \frac{k(k+1)}{2!}a^{k+1} \\ &= \frac{2(k+1)}{2!}a^{k+1} + \frac{k(k+1)}{2!}a^{k+1} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2!}a^{k+1} \end{aligned}$$

Diperoleh dengan cara yang sama untuk $a_{13}=a_{24}=a_{35}=a_{46}=\frac{(k+1)(k+2)}{2!}a^{k+1}$.

4. Entri – entri a_{ij} untuk $i<j=i+3, i=1,2,3.$

$$a_{14} = (a^k)a + ka^k(a) + \frac{k(k+1)}{2!}a^k(a) + \frac{k(k+1)(k+2)}{3!}a^k(a)$$

$$+\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4!}a^k(0)+\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{5!}a^k(0)$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2!}a^{k+1}+\frac{k(k+1)(k+2)}{3!}a^{k+1}$$
$$=\frac{3(k+1)(k+2)}{2!}+\frac{k(k+1)(k+2)}{3!}a^{k+1}$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3!}a^{k+1}$$

Selanjutnya dengan cara yang sama diperoleh $a_{14}=a_{25}=a_{36}=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3!}a^{k+1}$

5. Entri – entri a_{ij} untuk $i<j=i+4, i=1,2.$

$$a_{15}=(a^k)a+ka^k(a)+\frac{k(k+1)}{2!}a^k(a)+\frac{k(k+1)(k+2)}{3!}a^k(a)$$
$$+\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4!}a^k(a)+\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{5!}a^k(0)$$
$$=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2!}a^{k+1}+\frac{k(k+1)(k+2)}{3!}a^{k+1}\right)+\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4!}a^{k+1}$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3!}a^{k+1}+\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4!}a^{k+1}$$
$$=\frac{4(k+1)(k+2)(k+3)+k(k+1)(k+2)(k+3)}{4!}a^{k+1}$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4!}a^{k+1}$$

Dengan cara yang sama diperoleh $a_{15}=a_{26}=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4!}a^{k+1}$.

6. Entri – entri a_{ij} untuk $i<j=i+5, i=1.$

$$a_{16}=(a^k)a+ka^k(a)+\frac{k(k+1)}{2!}a^k(a)+\frac{k(k+1)(k+2)}{3!}a^k(a)$$
$$+\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4!}a^k(a)+\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{5!}a^k(a)$$
$$=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2!}a^{k+1}+\frac{k(k+1)(k+2)}{3!}a^{k+1}+\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4!}a^{k+1}\right)$$
$$+\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{5!}a^k(a)$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4!}a^{k+1}+\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{5!}a^{k+1}$$
$$=\frac{5(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)+(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{5!}$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)}{5!}$$

7. Entri- entri $a_{ij}=0$ untuk $i>j$.

Sehingga diperoleh $(A_6)^{k+1}$:

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$= \begin{bmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^{k+1} & \frac{(k+1)(k+2)a^{k+1}}{2!} & \frac{(k+1)(k+2)(k+3)a^{k+1}}{3!} & \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)a^{k+1}}{4!} & \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)a^{k+1}}{5!} \\ 0 & a^{k+1} & (k+1)a^{k+1} & \frac{(k+1)(k+2)a^{k+1}}{2!} & \frac{(k+1)(k+2)(k+3)a^{k+1}}{3!} & \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)a^{k+1}}{4!} \\ 0 & 0 & a^{k+1} & (k+1)a^{k+1} & \frac{(k+1)(k+2)a^{k+1}}{2!} & \frac{(k+1)(k+2)(k+3)a^{k+1}}{3!} \\ 0 & 0 & 0 & a^{k+1} & (k+1)a^{k+1} & \frac{(k+1)(k+2)a^{k+1}}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^{k+1} & (k+1)a^{k+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{k+1} \end{bmatrix}$$

Sehingga $p(k+1)$ bernilai benar.

Karena $p(1)$ dan $p(k+1)$ bernilai benar maka Teorema 1 terbukti. ■

3.2 Menentukan bentuk umum determinan matriks segitiga atas ordo 6×6 bentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif.

Pembahasan ini akan menentukan bentuk umum matriks $(A_6)^n$ dengan menggunakan metode ekspansi kofaktor pada sepanjang kolom pertama yang dinyatakan dalam teorema berikut:

Teorema 3.2 Jika diberikan sebuah matriks segitiga atas

$$(A_6) = \begin{bmatrix} a & a & a & a & a & a \\ 0 & a & a & a & a & a \\ 0 & 0 & a & a & a & a \\ 0 & 0 & 0 & a & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \quad \forall a \in R, a \neq 0. \text{ Maka } |(A_6)^n| = a^{6n}. \tag{12}$$

Bukti: Akan dibuktikan dengan menggunakan pembuktian langsung.
Berdasarkan Teorema 3.1 telah didapat bentuk umum pada Persamaan (11). Selanjutnya akan dicari determinanan $(A_6)^n$ dengan menggunakan metode kofaktor sepanjang kolom pertama.

$$|(A_6)^n| = a^n \begin{vmatrix} a^n & na^n & \frac{n(n+1)}{2!}a^n & \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}a^n & \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}a^n \\ 0 & a^n & na^n & \frac{n(n+1)}{2!}a^n & \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}a^n \\ 0 & 0 & a^n & na^n & \frac{n(n+1)}{2!}a^n \\ 0 & 0 & 0 & a^n & na^n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^n \end{vmatrix} - 0 + 0 - 0 + 0 - 0$$

$$= a^n \begin{vmatrix} a^n & na^n & \frac{n(n+1)}{2!}a^n & \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}a^n & \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}a^n \\ 0 & a^n & na^n & \frac{n(n+1)}{2!}a^n & \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}a^n \\ 0 & 0 & a^n & na^n & \frac{n(n+1)}{2!}a^n \\ 0 & 0 & 0 & a^n & na^n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^n \end{vmatrix}$$

$$= a^n (a^n)^5$$

$$= a^n (a^{5n})$$

$$= a^{6n}$$

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

3.3 Menentukan bentuk umum Matriks segitiga bawah bentuk khusus ordo 6×6 berpangkat bilangan bulat positif.

Selanjutnya akan ditentukan bentuk umum dari matriks segitiga bawah bentuk khusus ordo 6×6 berpangkat bilangan bulat positif yang dapat dinyatakan dalam teorema sebagai berikut:

Teorema 3.3 Jika matriks segitiga atas

$$(A_6) = \begin{bmatrix} a & a & a & a & a & a \\ 0 & a & a & a & a & a \\ 0 & 0 & a & a & a & a \\ 0 & 0 & 0 & a & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

, $\forall a \in R, a \neq 0.$ Maka matriks segitiga bawah dari $(A_6)^n$ yaitu:

$$(B_6)^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ na^n & a^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{n(n+1)}{2!}a^n & na^n & a^n & 0 & 0 & 0 \\ \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}a^n & \frac{n(n+1)}{2!}a^n & na^n & a^n & 0 & 0 \\ \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}a^n & \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}a^n & \frac{n(n+1)}{2!}a^n & na^n & a^n & 0 \\ \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5!}a^n & \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}a^n & \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}a^n & \frac{n(n+1)}{2!}a^n & na^n & a^n \end{bmatrix} \quad (13)$$

Bukti: Berdasarkan Teorema 2.1 bagian (a), diperoleh:

$(B_6)^n = [(A_6)^n]^T$

$$(B_6)^n = \begin{bmatrix} a^n & na^n & \frac{n(n+1)}{2!}a^n & \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}a^n & \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}a^n & \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5!}a^n \\ 0 & a^n & na^n & \frac{n(n+1)}{2!}a^n & \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}a^n & \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}a^n \\ 0 & 0 & a^n & na^n & \frac{n(n+1)}{2!}a^n & \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}a^n \\ 0 & 0 & 0 & a^n & na^n & \frac{n(n+1)}{2!}a^n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^n & na^n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}^T$$

$$(B_6)^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ na^n & a^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{n(n+1)}{2!}a^n & na^n & a^n & 0 & 0 & 0 \\ \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}a^n & \frac{n(n+1)}{2!}a^n & na^n & a^n & 0 & 0 \\ \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}a^n & \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}a^n & \frac{n(n+1)}{2!}a^n & na^n & a^n & 0 \\ \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5!}a^n & \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}a^n & \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}a^n & \frac{n(n+1)}{2!}a^n & na^n & a^n \end{bmatrix}$$

Sehingga Teorema 3.3 terbukti. ■

3.4 Menentukan bentuk umum determinan matriks segitiga atas ordo 6×6 bentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif.

Teorema 3.4 Jika diberikan sebuah matriks segitiga bawah $(B_6)^n$ yang merupakan transpose dari (A_6) pada Persamaan (13). Maka $|(B_6)^n| = a^{6n}$. (14)

Bukti: Telah diperoleh bentuk umum $(B_6)^n$ pada Persamaan (13). Untuk mendapatkan determinan $(B_6)^n$, digunakan metode ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama. Sehingga diperoleh:

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$|(B_6)^n| = a^n \begin{vmatrix} a^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ na^n & a^n & 0 & 0 & 0 \\ \frac{n(n+1)}{2!}a^n & na^n & a^n & 0 & 0 \\ \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}a^n & \frac{n(n+1)}{2!}a^n & na^n & a^n & 0 \\ \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}a^n & \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}a^n & \frac{n(n+1)}{2!}a^n & na^n & a^n \end{vmatrix} - 0 + 0 - 0 + 0 - 0$$

$$= a^n \begin{vmatrix} a^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ na^n & a^n & 0 & 0 & 0 \\ \frac{n(n+1)}{2!}a^n & na^n & a^n & 0 & 0 \\ \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}a^n & \frac{n(n+1)}{2!}a^n & na^n & a^n & 0 \\ \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}a^n & \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}a^n & \frac{n(n+1)}{2!}a^n & na^n & a^n \end{vmatrix}$$

$$= a^n (a^n)^5$$

$$= a^n (a^{5n})$$

$$= a^{6n}$$

3.5 Bentuk Umum $(A_6)^n, (B_6)^n, |(A_6)^n|$, dan $|(B_6)^n|$ Kedalam Contoh Soal.

Diberikan sebuah matriks segitiga atas

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Tentukanlah :

1. A^4 dan $|A^4|$.
2. B^4 yang merupakan transpose dari A^4 dan $|B^4|$

Penyelesaian:

1. Pada soal diketahui $n = 4$ dan $a = 3$ ntuk menghitung nilai $(A)^4$ akan digunakan Persamaan (11) pada Teorema 3.1 sehinnga

$$(A_6)^4 = \begin{bmatrix} 3^4 & (4)3^4 & \frac{4(4+1)}{2!}3^4 & \frac{4(4+1)(4+2)}{3!}3^4 & \frac{4(4+1)(4+2)(4+3)}{4!}3^3 & \frac{4(4+1)(4+2)(4+3)(4+4)}{5!}3^4 \\ 0 & 3^4 & (4)3^4 & \frac{4(4+1)}{2!}3^4 & \frac{4(4+1)(4+2)}{3!}3^4 & \frac{4(4+1)(4+2)(4+3)}{4!}3^3 \\ 0 & 0 & 3^4 & (4)3^4 & \frac{4(4+1)}{2!}3^4 & \frac{4(4+1)(4+2)}{3!}3^4 \\ 0 & 0 & 0 & 3^4 & (4)3^4 & \frac{4(4+1)}{2!}3^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3^4 & (4)3^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3^4 \end{bmatrix}$$

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$(A_6)^4 = \begin{bmatrix} 81 & 324 & 810 & 1620 & 2835 & 4536 \\ 0 & 81 & 324 & 810 & 1620 & 2835 \\ 0 & 0 & 81 & 324 & 810 & 1620 \\ 0 & 0 & 0 & 81 & 324 & 810 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 81 & 324 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 81 \end{bmatrix}$$

Kemudian akan dihitung nilai $|(A_6)^n|$. Berdasarkan Teorema 3.2, mencari nilai $|(A_6)^4|$ dapat menggunakan Persamaan (12) sehingga $|(A_6)^4| = 3^{(6)(4)} = 3^{24}$.

2. Selanjutnya akan dihitung nilai B^4 dengan menggunakan Teorema 3.3 pada Persamaan (13), sehingga diperoleh:

$$(B_6)^4 = \begin{bmatrix} 81 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 324 & 81 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 810 & 324 & 81 & 0 & 0 & 0 \\ 1620 & 810 & 324 & 81 & 0 & 0 \\ 2835 & 1620 & 810 & 324 & 81 & 0 \\ 4536 & 2835 & 1620 & 810 & 324 & 81 \end{bmatrix}$$

xMennghitung determinan B^4 dengan menggunakan Persamaan (14) pada Teorema 3.4 sehingga diperoleh $|B^4| = 3^{24}$.

4. Kesimpulan

Jika diberikan sebuah matriks segitiga atas pada Persamaan (1), maka

$$(A_6)^n = \begin{bmatrix} a^n & na^n & \frac{n(n+1)}{2!}a^n & \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}a^n & \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}a^n & \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5!}a^n \\ 0 & a^n & na^n & \frac{n(n+1)}{2!}a^n & \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}a^n & \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}a^n \\ 0 & 0 & a^n & na^n & \frac{n(n+1)}{2!}a^n & \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}a^n \\ 0 & 0 & 0 & a^n & na^n & \frac{n(n+1)}{2!}a^n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^n & na^n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}$$ dan

$$(B_6)^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ na^n & a^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{n(n+1)}{2!}a^n & na^n & a^n & 0 & 0 & 0 \\ \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}a^n & \frac{n(n+1)}{2!}a^n & na^n & a^n & 0 & 0 \\ \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}a^n & \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}a^n & \frac{n(n+1)}{2!}a^n & na^n & a^n & 0 \\ \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5!}a^n & \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}a^n & \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}a^n & \frac{n(n+1)}{2!}a^n & na^n & a^n \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh hasil akhir yaitu $|(A_6)^n| = |(B_6)^n| = a^{6n}$.

Referensi

[1] G. F. Muttaqin, “Metode Analisis Relasi Pemasukan dan Pengeluaran dalam Bisnis dan Ekonomi dengan Matriks Teknologi,” *STIE ITB*, 2008.
[2] Rahmawati, Saniyah, and A. N. Rahma, “Invers Matriks Toeplitz-Hessenberg Bentuk Khusus Menggunakan Metode Faddeev,” *Seminar Nasional Teknologi, Informasi, Komunikasi, dan Industri*, no. November, pp. 405–411, 2019.
[3] Rahmawati, N. A. Putri, F. Aryani, and A. N. Rahma, “Trace Matriks Toeplitz Simetris Bentuk Khusus Ordo 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif,” *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 5, no. 2, pp. 61–70, 2019, [Online]. Available: http://ejournal.uin-

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

suska.ac.id/index.php/JSMS/article/view/7637
[4] H. A. C. Rorres, *Elementary linear algebra, Kedelapan.* 2004.
[5] Rahmawati, Wartono, and M. Jelita., "'Trace of Integer Power of Real 3 X 3 Specific Matrices.,'" *International Jurnal Advanced Science Computer and Applications Res. Eng.*, vol. 5, no. 3, pp. 48–56, 2019.
[6] F. Aryani, M. Zawarni, K. Susilowati, Y. Muda, C. C. Marzuki, and Rahmawati, "Trace Matriks Segitiga 4X4 Berpangkat Bilangan Bulat," *SNTIKI*, 2020.
[7] F. Aryani, M. Zawarni, K. Susilowati, Y. Muda, and Rahmawati, "Trace Matriks Segitiga 4 × 4 Berpangkat Bilangan Bulat," *Seminar Nasional Teknologi Informasi, Komunikasi, dan Industri*, pp. 651–661, 2020.
[8] C. C. Marzuki, F. Aryani, and Rahmawati, "Trace Matriks n×n Berbentuk Khusus Berpangkat Bilangan Bulat Positif," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 7, no. 1, p. 28, 2021, doi: 10.24014/jsms.v7i1.11561.
[9] Fitri Aryani, A. R. Hasibuan, Haslinda, C. C. Marzuki, and Rahmamwati, "Trace Matriks Segitiga 5x5 Berpangkat Bilangan Bulat," *Seminar Nasional Teknologi Informasi, Komunikasi dan Industri*, vol. 12, pp. 554–566, 2020.
[10] R. Rahmawati, N. Fitri, and A. N. Rahma, "Invers Matriks RSFPLRcircfr (0,b,...,b)," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 6, no. 1, p. 113, 2020, doi: 10.24014/jsms.v6i1.9260.
[11] A. N. Rahma, R. H. Vitho, Rahmawati, and El. Safitri, "Invers Matriks Centrosymmetric Bentuk Khusus Ordo n×n Menggunakan Adjoin," *Jurnal Ilmu Pendidikan Matematika Matematika dan Statistika*, vol. 4, no. 1, pp. 199–210, 2022.
[12] A. N. Rahma, Rahmawati, and W. Wahyuni, "Metode Eliminasi Gauss untuk Penyelesaian Sistem Kongruensi Linier," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 6, no. 1, p. 30, 2020, doi: 10.24014/jsms.v6i1.9250.
[13] A. N. Rahma, M. Angelina, and Rahmawati, "Invers Matriks BLok 2X2 Dalam Aplikasi Matriks FLDcirc Bentuk Khusus," *Semin. Nasional Teknologi Sistem Informasi Komunikasi dan Industri*, pp. 334–344, 2019.
[14] A. N. Rahma, Rahmawati, and S. M. Jauza, "Determinan Matriks Centrosymmetric Bentuk Khusus Ordo Berpangkat Bilangan Bulat Positif Dengan Kofaktor," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 6, no. 2, p. 89, 2020, doi: 10.24014/jsms.v6i2.10552.
[15] A. N. Rahma, F. Aryani, M. Anggelina, and Rahmawati, "Determinan Matriks Blok 2 x 2 Dalam Aplikasi Matriks FLDcircr Bentuk Khusus," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, vol. 5, no. 2, pp. 34–42, 2019.
[16] A. N. Rahma and Z. Aqilah, "Determinan Matriks Hankel Bentuk Khusus Ordo 3x3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif," *Sains Matematika dan Statistika*, vol. 7, no. 1, p. 96, 2021, doi: 10.24014/jsms.v7i1.12193.
[17] Rahmawati, A. N. Rahma, and R. H. Vitho, "Determinan Matriks Segitiga Atas Bentuk Khusus Ordo 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif Menggunakan Kofaktor," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika,* Vol. 6, no. 2, pp 30-41, 2020.