

## Kendali Pemanenan pada Model Eceng Gondok

**Nilwan Andiraja<sup>1</sup>, Endah Desriani Putri<sup>2</sup>**

1,2 Prodi Matematika, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau  
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293  
Email: nilwanandiraja@uin-suska.ac.id<sup>1</sup>, endahdesriani12@gmail.com<sup>2</sup>

### **Abstrak**

*Pada Artikel ini dibahas tentang kendali optimal pemanenan pada model matematika eceng gondok. Untuk mendapatkan kendali optimal tersebut digunakan teori kendali optimal. Langkah awal dibentuk persamaan Hamilton dengan menggunakan persamaan diferensial dinamik dan fungsi tujuan kuadratik, setelah itu dibentuk persamaan Lagrange. Kemudian diperoleh kendali optimal untuk populasi eceng gondok. Berdasarkan contoh yang diberikan, maka diperoleh bahwa grafik populasi eceng gondok mengalami penurunan ketika diberi kendali dan mengalami kenaikan ketika tidak diberi kendali*

**Kata kunci:** *Kendali Optimal, Persamaan Hamilton, Persamaan Lagrange, Eceng Gondok, Pemanenan.*

### **Abstract**

*This article discusses how to obtain optimal control for harvesting problems in the water hyacinth model. To get the optimal control, optimal control theory is used. Initial step, Hamiltonian equations was formed by using dynamic differential equations and objective quadratic functions, after that Lagrange's equations was formed. Then obtained optimal control for the water hyacinth population. Based on the example given, it is found that the water hyacinth population graph decreased when given control and increased when not given control.*

**Keywords:** *Optimal Control, Hamilton Equation, Lagrange Equation, Water Hyacinth, Harvesting.*

### **1. Pendahuluan**

Tanaman eceng gondok pada umumnya berkembang pada kawasan perairan. Tanaman eceng gondok tidak sulit untuk menyebar melalui sebuah atau beberapa saluran air, sehingga banyak menimbulkan masalah di perairan. Tanaman eceng gondok mampu dengan sangat cepat untuk berkembang biak, dapat berkembang biak dengan cara vegetatif ataupun secara generatif.

Tanaman eceng gondok dapat tumbuh dan berkembang dengan cepat dan dapat menimbulkan efek buruk pada lingkungan perairan. Sehingga tanaman eceng gondok (*Eichorniacrassipes*) harus dapat dikendalikan pertumbuhannya. Oleh karena itu, mengendalikan pertumbuhan tanaman eceng gondok dapat dilakukan dengan melakukan pemanenan atau dapat juga dengan cara melepas predator alami eceng gondok. Secara matematika pengendalian pemanenan dapat dilakukan dengan terlebih dahulu membentuk persamaan dalam model matematika. Penelitian tentang pemodelan pemanenan dapat dilihat pada [1] yang penelitian tersebut membahas meminimalkan ukuran dari biomassa tanaman eceng gondok dan usaha pemanenan eceng gondok. Pada artikel ini, penyelesaiannya menggunakan prinsip maksimum pontryagin, tetapi tidak menggunakan persamaan Lagrange.

Penelitian selanjutnya di [2], penelitian tersebut dibahas untuk menunjukkan usaha pemanenan yang optimal, yang dapat menghasilkan keuntungan yang optimal dan populasi yang di panen tetap akan lestari, dengan menggunakan prinsip maksimum pontryagin, tetapi tidak menggunakan persamaan lagrange. Sementara itu, menurut [3] diperoleh pengaruh dari makanan alternatif dan bentuk fungsi Holling tipe III dengan menggunakan prinsip maksimum pontryagin, tetapi tidak menggunakan persamaan lagrange. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk mengembangkan penelitian penentuan laju pemanenan dalam pertumbuhan eceng gondok dengan metode lagrange. Kemudian, juga pada artikel ini akan di analisa tentang tingkat populasi eceng gondok setelah diberi kendali.

## 2. Metode Penelitian

Langkah-langkah yang dilakukan dalam artikel ini sebagai berikut:

- 1) Diketahui persamaan diferensial dinamik didapatkan model pemanenan eceng gondok sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = rx \left( 1 - \frac{x}{k} \right) - \frac{ax^2y}{a^2 + x^2} - e_1x$$

Dan diketahui fungsi tujuan untuk kasus populasi eceng gondok pada waktu berhingga sebagai berikut:

$$J(e_1) = -w_1x(T) + w_2y(T) - w_3 \int_0^T e_1^2 dt$$

- 2) Dibentuk persamaan Hamilton berdasarkan [5] dengan menggunakan persamaan langkah 1.
- 3) Selanjutnya dari langkah 2 dapat dibentuk Persamaan Lagrange.
- 4) Kemudian berdasarkan langkah nomor 2 dan nomor 3. Ditetapkan  $H_{e_1} = 0$ ,  $L_x = -\dot{\lambda}$  dan  $L_{e_1} = 0$ .
- 5) Dari  $H_{e_1} = 0$  pada langkah nomor 4 didapatkan fungsi kendali yaitu laju pemanenan.
- 6) Kendali dari langkah nomor 5 substitusikan ke persamaan diferensial dinamik pada langkah nomor 1.
- 7) Simulasi dengan *software* Matlab

## 3. Hasil dan Pembahasan

### 3.1. Kendali Pemanenan pada Model Eceng Gondok

Pada masalah Kendali pemanenan pada model eceng gondok telah diberikan persamaan differensial dinamik, yaitu:

$$\frac{dx}{dt} = rx \left( 1 - \frac{x}{k} \right) - \frac{ax^2y}{a^2 + x^2} - e_1x \quad (1)$$

Kemudian persamaan fungsi tujuan sebagai berikut:

$$J(e_1) = -w_1x(T) + w_2y(T) - w_3 \int_0^T e_1^2 dt \quad (2)$$

Berdasarkan [4] dan persamaan (1) dan (2) maka dapat dibentuk persamaan Hamilton sebagai berikut:

$$H(x, e_1, \lambda) = -w_3e_1^2 + \lambda \left( rx \left( 1 - \frac{x}{k} \right) - \frac{ax^2y}{a^2 + x^2} - e_1x \right) \quad (3)$$

Selanjutnya, berdasarkan Persamaan (3) dibentuk,

#### 3.1.1. Persamaan State

Persamaan *state* didapat dari mendiferensialkan persamaan Hamilton terhadap lamda dan digunakan untuk menyelesaikan langkah maju, adapun persamaan *states* ebagai berikut:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = rx \left( 1 - \frac{x}{k} \right) - \frac{ax^2y}{a^2 + x^2} - e_1x \quad (4)$$

#### 3.1.2. Persamaan Costate

Persamaan *costate* didapat dari mendiferensialkan persamaan Hamilton terhadap populasi eceng gondok ( $x$ ) dan digunakan untuk menyelesaikan langkah mundur, adapun persamaan *costate* sebagai berikut:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\lambda \left( r \left( 1 - \frac{2x}{k} \right) - \frac{2a^3 xy}{(a^2 + x^2)^2} - e_1 \right). \quad (5)$$

### 3.1.3. Persamaan Stasioner

Persamaan *stasioner* didapat dari mendiferensialkan persamaan Hamilton terhadap laju pemanenan pada eceng gondok ( $e_1$ ), adapun persamaan *costate* sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial e_1} &= 0 \\ -2w_3 e_1 - \lambda x &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Dibentuk fungsi Lagrange berdasarkan [6] dan persamaan (1) dan (2) maka sebagai berikut.

$$L = -w_3 e_1^2 + (\lambda - \mu) \left( rx \left( 1 - \frac{x}{k} \right) - \frac{ax^2 y}{a^2 + x^2} - e_1 x \right) \quad (7)$$

Dari persamaan (7) diturunkan parsial terhadap x, maka sebagai berikut.

$$(\lambda - \mu) \left( r \left( 1 - \frac{2x}{k} \right) - \frac{2a^3 xy}{(a^2 + x^2)^2} - e_1 \right) \quad (8)$$

Dari persamaan (8) diturunkan parsial terhadap  $e_1$ , maka sebagai berikut.

$$-2w_3 e_1 + (\lambda - \mu)(-x) \quad (9)$$

Selanjutnya, berdasarkan persamaan (3) ditentukan,  $He_1 = 0$  sebagai berikut

$$\begin{aligned} 0 &= -2w_3 e_1 - \lambda x \\ e_1 &= \frac{\lambda x}{2w_3} \end{aligned} \quad (10)$$

Selanjutnya,  $L_x = -\dot{\lambda}$  sebagai berikut

$$\begin{aligned} -\dot{\lambda} &= - \left( -(\lambda - \mu) r \left( 1 - \frac{2x}{k} \right) - \frac{2a^3 xy}{(a^2 + x^2)^2} - e_1 \right) \\ &= (\lambda - \mu) \left( r \left( 1 - \frac{2x}{k} \right) - \frac{2a^3 xy}{(a^2 + x^2)^2} - e_1 \right) \end{aligned} \quad (11)$$

Selanjutnya,  $L_{e_1} = 0$  sebagai berikut

$$\begin{aligned} 0 &= -2w_3 e_1 + (\lambda - \mu)(-x) \\ -\lambda - \mu &= -2w_3 e_1 \end{aligned} \quad (12)$$

Dari persamaan (10) didapatkan fungsi kendali, sebagai berikut:

$$e_1^* = \frac{\lambda x}{2w_3} \quad (13)$$

Menurut [1] diketahui

$$\lambda(T) = \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)_{*T} = -w$$

Kemudian, substitusikan persamaan (13) kepersamaan (1) maka diperoleh,

$$\dot{x} = rx \left( 1 - \frac{x}{k} \right) - \frac{ax^2y}{a^2 + x^2} - \frac{\lambda x^2}{2w_3} \quad (14)$$

Persamaan (14) merupakan persamaan diferensial pertumbuhan eceng gondok yang telah diberi kendali.

### 3.2. Simulasi Numerik

Berdasarkan uraian diatas untuk mendapatkan nilai yang optimal perlu menyelesaikan persamaan (4). Untuk menyelesaikan persamaan *state* yang akan diselesaikan menggunakan algoritma maju Runge Kutta orde 4 seperti berikut:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{6} (M_1 + 2M_2 + 2M_3 + M_4)$$

dengan,

$$i = 0, 1, 2, \dots, M$$

$$M_1 = f(t_i, x_i, e_i) = rx_i \left( 1 - \frac{x_i}{k} \right) - \frac{ax_i^2 y}{a^2 + x_i^2} - \frac{\lambda x_i}{2w_3}$$

$$M_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2} M_1, \frac{1}{2}(e_i + e_{i+1})\right)$$

$$= r\left(x_i + \frac{h}{2} M_1\right) \left( 1 - \frac{\left(x_i + \frac{h}{2} M_1\right)}{k} \right) - \frac{a\left(x_i + \frac{h}{2} M_1\right)^2 y}{a^2 + \left(x_i + \frac{h}{2} M_1\right)^2} - \frac{\lambda\left(x_i + \frac{h}{2} M_1\right)}{2w_3}$$

$$M_3 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2} M_2, \frac{1}{2}(e_i + e_{i+1})\right)$$

$$= r\left(x_i + \frac{h}{2} M_2\right) \left( 1 - \frac{\left(x_i + \frac{h}{2} M_2\right)}{k} \right) - \frac{a\left(x_i + \frac{h}{2} M_2\right)^2 y}{a^2 + \left(x_i + \frac{h}{2} M_2\right)^2} - \frac{\lambda\left(x_i + \frac{h}{2} M_2\right)}{2w_3}$$

$$M_4 = f(t_i + h, x_i + hM_3, e_i + 1)$$

$$= r(x_i + hM_3) \left( 1 - \frac{(x_i + hM_3)}{k} \right) - \frac{a(x_i + hM_3)^2 y}{a^2 + (x_i + hM_3)^2} - \frac{\lambda(x_i + hM_3)}{2w_3}$$

#### 3.2.1. Hasil Simulasi

Nilai parameter dari model *prey* pada sistem *predator prey* disajikan di tabel berikut ini:

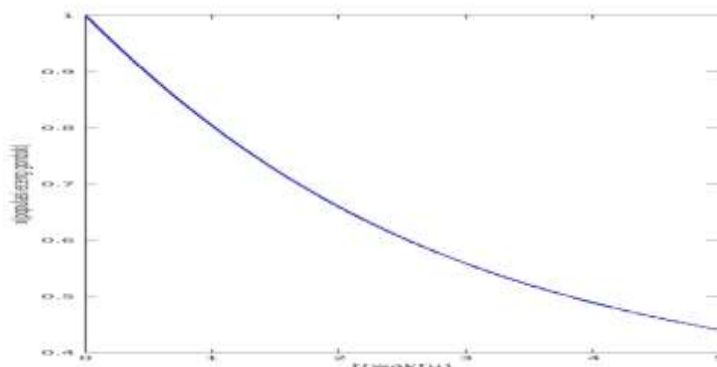
Parameter	R	K	$\alpha$	m	$e_1$	$w_3$
Nilai	0,027 dan 5	925 dan 10	1 dan 7	0,04	0,00038 dan 1,28	1

Nilai parameter pada Tabel 1, diambil dalam [1] dan parameter lainnya ditentukan secara random.

#### A. Simulasi I

Pada simulasi I, diberikan nilai parameter yaitu pertumbuhan populasi *prey* dengan laju pertumbuhan eceng gondok ( $r$ ) = 0,027, daya dukung lingkungan ( $k$ ) = 925, kecepatan dari predasi ikan grass carp terhadap eceng gondok ( $\alpha$ ) = 1 dan laju pemanenan eceng gondok ( $e_1$ )

= 0,0038 dan bobot fungsi biaya ( $w_3$ ) = 1. Diperoleh grafik pertumbuhan populasi eceng gondok ditampilkan pada gambar di bawah:

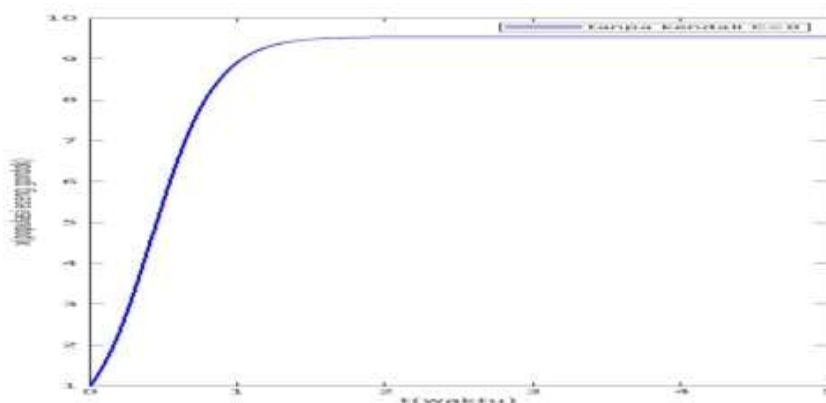


Gambar 1. Grafik Simulasi I

Pada gambar 1, pertumbuhan populasi *prey* dengan laju pertumbuhan eceng gondok ( $r$ ) = 0,027, daya dukung lingkungan ( $k$ ) = 925, laju pemasangan ikan grass carp terhadap eceng gondok ( $\alpha$ ) = 1 dan laju pemanenan eceng gondok ( $e_1$ ) = 0,0038. Pertumbuhan populasi *prey* mengalami penurunan. Hal ini disebabkan, pada simulasi I diberikan kendali maka pertumbuhan populasi eceng gondok semakin menurun.

#### B. Simulasi II

Pada simulasi II, diberikan nilai parameter yaitu pertumbuhan populasi *prey* dengan laju pertumbuhan eceng gondok ( $r$ ) = 5, daya dukung lingkungan ( $k$ ) = 10, kecepatan dari ikan grass carp terhadap eceng gondok ( $\alpha$ ) = 7 dan laju pemanenan eceng gondok ( $e_1$ ) = 1,28 dan bobot fungsi ( $w_3$ ) = 1. Diperoleh grafik pertumbuhan populasi eceng gondok ditampilkan pada gambar di bawah:



Gambar 2. Grafik Simulasi II

Pada gambar 2, dengan nilai parameter pertumbuhan populasi *prey* dengan laju pertumbuhan eceng gondok ( $r$ ) = 5, daya dukung lingkungan ( $k$ ) = 10, kecepatan dari ikan grass carp terhadap eceng gondok ( $\alpha$ ) = 7 dan laju pemanenan eceng gondok ( $e_1$ ) = 1,28 dan bobot fungsi ( $w_3$ ) = 1. Diperoleh hasil bahwa, pertumbuhan eceng gondok mengalami kenaikan pada saat tanpa kendali ( $e_1=0$ ).

#### 4. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan, didapatkan penyelesaian laju pemanenan yang optimal pada model pertumbuhan eceng gondok menggunakan prinsip dengan metode lagrange dan

menggunakan metode Runge-Kutta Orde 4 yang diaplikasikan pada program matlab. Sehingga, diperoleh kendali laju pemanen yang optimal pada model pertumbuhan eceng gondok yaitu:

$$e_1^* = \frac{-\lambda}{2w_3}$$

Berdasarkan hasil simulasi numerik diketahui bahwa dengan kendali, populasi eceng gondok mengalami penurunan, dan pada saat tanpa kendali populasi eceng gondok mengalami kenaikan.

#### Daftar Pustaka

- [1] Resmi F, Alfani A, Ifandi S. Kendali Optimal Pertumbuhan Populasi Eceng Gondok Dengan Ikan Grass Carp dan Pemanenan. *Jurnal Matematika Sains dan Teknologi*, 2019; 20(2): 132-141.
- [2] Yuliani Y, Sam M. Pemanenan Optimal pada Model Reaksi Dinamik Sistem Mangsa-Pemangsa dengan Tahapan Struktur. *Dinamika*, 2015; 6(2): 25-38.
- [3] Rifa'i M. Pengaruh Makanan Alternatif dan Fungsi Holling Tipe III pada Kendali Optimal Pemanenan Model Prey. *Zeta - Math Journal*. 2017; 3: 10–13.
- [4] Olsder GJ. *Mathematical Systems Theory*. 1st Edition. Delft University of Technology, 1994.
- [5] Ogata K. *Modern control engineering*. Prentice-Hall, 2010.
- [6] Sethi SP, Thompson GL. *Optimal Control Theory*. New York: Springer Science+Business Media. 2006.