Seminar Nasional Teknologi Informasi, Komunikasi dan Industri (SNTIKI) 13
Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Pekanbaru, 18 November 2021

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Kendali Optimal Waktu Kontinu Tingkat Vaksinasi pada Penyakit Malaria

Nilwan Andiraja[1]
[1] Prodi Matematika, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: nilwanandiraja@uin-suska.ac.id[1]

Abstrak

Penyakit malaria merupakan salah satu penyakit yang diakibatkan oleh gigitan nyamuk. Nyamuk tersebut berjenis anopeles betina yang telah terinveksi oleh plasmodium. Dibeberapa negara termasuk Indonesia, penyakit malaria telah membuat efek yang buruk bagi kesehatan, penurunan produktivitas kerja dan telah menyebabkan banyak orang meninggal dunia. Sehingga, perlu usaha dalam bentuk pengendalian penyebaran penyakit malaria salah satunya melalui vaksinasi. Oleh karena itu, artikel ini memberikan usulan pengendalian penyebaran penyakit malaria yang dimodelkan dengan SIRV dengan kendali vaksinasi. Model SIRV penyakit malaria diselesaikan dengan menggunakan prinsip Pontryagin maksimum, dengan tujuan mencari jumlah vaksinasi yang diperlukan pada model penyakit malaria. Berdasarkan analisis dan simulasi numerik diperoleh bahwa jika semakin banyak individu yang meninggal karena terinveksi penyakit malaria, maka vaksinasi dilakukan semakin cepat.

Kata Kunci: *SIRV, Maksimum pontryagin, Vaksinasi, Malaria*

Abstract

The malaria deseas is one of the deseases that cause by mosquito bite. Kind of the mosquito is the female anopeles which invected by plasmodium. In fewer countries including Indonesia, the malaria deseas has made bad effect for healty, decrease of work productivty and caused a lot of people died. So, we need to effort for control of spread out the malaria deseas, one of them is vaccination. Therefore, this article propose the control of spread of malaria deseas that has made in SIRV model with the vactination control. The model SIRV of malaria deseas solved with using maximum Pontryagin principle, the aim was found of number of vaccination that need in the model of malaria deseas. According to analysis and numerical simulation result indicate that if the number of people died more than the number of people invected by malaria deseas so vaccination effort more quickly.

Keywords: *SIRV, Maximum pontryagin, Vaccination, Malaria*

1. Pendahuluan

Penyakit malaria merupakan penyakit yang diakibatkan oleh gigitan nyamuk. Nyamuk pembawa penyakit malaria merupakan nyamuk berjenis Anopeles betina. Anopeles betina yang menyebabkan penyakit malaria adalah yang telah terinveksi oleh Plasmodium. Seseorang yang terkena penyakit malaria, menurut [1] dan [2], selain menurunkan produktivitas kerja seseorang juga akan merasakan gejala-gejala berupa demam, mengigil, berkeringat, sakit kepala, rasa mual, terkadang disertai muntah. Bahkan menurut [3] dan [4] seseorang yang telah terkena penyakit malaria terutama bayi, balita dan ibu hamil akan mengalami komplikasi yang parah bahkan kematian.

Berdasarkan penjelasan tersebut, dapat dipahami bahwa dampak dan akibat yang ditimbulkan oleh penyakit malaria sangat berbahaya. Oleh karena itu, perlu adanya pengendalian penyebaran penyakit malaria. Salah satu cara pengendalian penyakit malaria dengan pemberian vaksinasi. Namun pengendalian penyakit malaria dengan pemberian vaksinasi rupanya belum dilakukan oleh [5]. Pada penelitian [5], penyakit malaria hanya dimodelkan dengan model SIR tanpa pemberian vaksinasi. Disamping itu pada model matematika SIR oleh [5] belum ada fungsi tujuan. Pemberian vaksinasi pada penyakit malaria baru tampak pada penelitian yang dilakukan oleh [7], namun [7] masih belum memberika fungsi tujuan pada model SIR penyakit malaria. Padahal fungsi tujuan penting dalam prinsip maksimum Pontryagin untuk memperoleh kendali vaksinasi penyakit malaria. Selanjutnya,

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

pemberian fungsi tujuan pada model matematika penyakit malaria, akhirnya telah diberikan pada penelitian oleh [6]. Pada penelitian [6] model matematika penyebaran penyakit malaria diselesaikan dengan prinsip maksimum Pontryagin. Pada [6] telah didapat kendali optimal penyakit malaria, namun belum menyertakan kendali vaksinasi. Sehingga penelitian ini akan membahas pengendalian penyakti malaria dengan model matematika SIR dengan pemberian vaksinasi. Selain vaksinasi, penelitian ini akan memberikan fungsi tujuan pada model matematika penyakit malaria agar kendali vaksinasi dapat diperoleh dengan prinsip maksimum Pontryagin.

2. Metode Penelitian

Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam artikel ini adalah sebagai berikut:

1) Diberikan persamaan differensial dinamik untuk empat kelas pada model penyakit malaria, yaitu :
$$\frac{dS}{dt} = (1-p)\mu - \beta is - \tau s$$
$$\frac{dI}{dt} = \beta is - \gamma i - \tau i$$
$$\frac{dR}{dt} = \gamma i - \tau r$$
$$\frac{dv}{dt} = p\mu - \tau v$$
Karena artikel ini bertujuan untuk meminimalkan jumlah terinveksi penyakit malaria, maka fungsi tujuan yaitu,
$J = min_u \int_{t0}^{t1} (Ai + C_1p^2)\, dt$ dengan $t_1 \to \infty$
2) Dibentuk persamaan Hamilton berdasarkan persamaan pada langkah 1.
3) Selanjutnya persamaan Hamilton dilangkah 2, dibentuk persamaan costate dan persamaan stationer.
4) Dari persamaan stationer di langkah 3, diperoleh kendali tingkat vaksinasi.
5) Kemudian, dari persamaan costate yang diperoleh di langkah 3, dibentuk persamaan aljabar Riccati dan dicari solusinya.
6) Solusi persamaan aljabar Riccati pada langkah 5, disubstitusikan kembali ke persamaan kendali yang diperoleh di langkah 4.
7) Kemudian, kendali yang diperoleh dari langkah 6, disubstitusikan ke kelas vaksinasi, da dicari solusi kelas vaksinasi.
8) Simulasi numerik yang dilakukan pada kelas vaksinasi.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1. Kendali optimal penyebaran penyakit malaria dengan vaksinasi menggunakan model SIR

Diketahui dari langkah (1) pada metode penelitian, persamaan differensial dinamik dan fungsi tujuan untuk penyebaran penyakit malaria. Selanjutnya dibentuk persamaan Hamilton, yaitu

$$H = (\mathrm{Ai} + C_1p^2) + (\lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3\, \lambda_4)\begin{bmatrix}(1-p)\mu - \beta is - \tau s \\ \beta is - \gamma i - \tau i \\ \gamma i - \tau r \\ p\mu - \tau v\end{bmatrix} \quad (1)$$

Selanjutnya dari Persamaan (1) dibentuk Persamaan costate dan stationer, yaitu
Persamaan *Costate* :

$$\frac{\partial H}{\partial v} = -\,\lambda_4\tau = -\,\dot{\lambda}_4 \quad (2)$$
$$\frac{\partial H}{\partial s} = -\lambda_1\beta i - \lambda_1\tau + \lambda_2\beta i = \dot{\lambda}_1 \quad (3)$$

Persamaan *stationer* :

$$\frac{\partial H}{\partial p} = 2cp - \lambda_1\mu + \lambda_4\mu = 0 \quad (4)$$

Kemudian, dari Persamaan (4) didapat kendali tingkat vaksinasi yaitu

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$p = \frac{(\lambda_1 - \lambda_4)\mu}{2c} \tag{5}$$

Selanjutnya, karena tingkat vaksinasi terdapat di dua kelas yaitu kelas S dan V maka perlu untuk membuat persamaan aljabar Riccati. Persamaan aljabar Riccati akan dibentuk dari dua kelas S dan V. Menurut [8] untuk membentuk persamaan aljabar Riccati, terlebih dahulu diasumsikan untuk setiap waktu *t*, yaitu

$$\lambda_4 = vk$$

Kemudian diturunkan terhadap waktu *t,* maka

$$\dot{\lambda}_4 = \dot{v}k + v\dot{k}$$

Selanjutnya, disubstitusikan $\frac{dv}{dt} = p\mu - \tau v$ dan Persamaan (2) maka diperoleh,

$$\lambda_4 \tau = (p\mu - \tau v)k + v\dot{k}$$

Karena batas akhir waktu pada fungsi tujuan untuk tak berhingga, maka diperoleh persamaan aljabar Riccati, sebagai berikut,

$$\lambda_4 \tau = (p\mu - \tau v)k$$

atau,

$$\lambda_4 = \frac{(p\mu - \tau v)k}{\tau} \tag{6}$$

dan, diasumsikan juga

$$\lambda_1 = vk$$

Kemudian diturunkan terhadap waktu *t,* maka

$$\dot{\lambda}_1 = \dot{v}k + v\dot{k}$$

Selanjutnya, disubstitusikan $\frac{dv}{dt} = p\mu - \tau v$ dan Persamaan (3) maka diperoleh,

$$-(-\lambda_1 \beta i - \lambda_1 \tau + \lambda_2 \beta i) = (p\mu - \tau v)k + v\dot{k}$$

Karena batas akhir waktu pada fungsi tujuan untuk tak berhingga, maka diperoleh persamaan aljabar Riccati, sebagai berikut,

$$\lambda_1 \beta i + \lambda_1 \tau - \lambda_2 \beta i = (p\mu - \tau v)k$$

atau,

$$\lambda_1(\beta i + \tau) - \lambda_2 \beta i = (p\mu - \tau v)k$$

Sehingga didapat,

$$\lambda_1 = \frac{(p\mu - \tau v)k + \lambda_2 \beta i}{\beta i + \tau} \tag{7}$$

Selanjutnya, Persamaan (6) dan Persamaan (7) disubtitusikan ke persamaan tingkat vaksinasi di Persamaan (5). Maka diperoleh kendali optimal tingkat vaksinasi yaitu,

$$p = \frac{\lambda_2 \beta i \tau \mu + \tau v k \beta i \mu}{\beta i \tau + \tau^2 + \mu^2 k \beta i} \tag{8}$$

Berikutnya, setelah diperoleh persamaan tingkat vaksinasi, maka berikutnya perlu di cari solusi kelas vaksinasi. Oleh karena itu, Persamaan (8) disubstitusikan ke persamaan diferensial kelas vaksinasi $\frac{dv}{dt} = p\mu - \tau v$, yaitu

$$\dot{v} = \left(\frac{\tau k \beta i \mu^2}{\beta i \tau + \tau^2 + \mu^2 k \beta i} - \tau\right) v + \frac{\lambda_2 \beta i \tau \mu}{\beta i \tau + \tau^2 + \mu^2 k \beta i}$$

Selanjutnya diperoleh solusi untuk persamaan kelas vaksinasi yaitu,

$$v = \frac{e^{\left(\frac{\tau k \beta i \mu^2}{\beta i \tau + \tau^2 + \mu^2 k \beta i} - \tau\right)t}}{\left(\frac{\tau k \beta i \mu^2}{\beta i \tau + \tau^2 + \mu^2 k \beta i} - \tau\right)} - \frac{\left(\frac{\lambda_2 \beta i \tau \mu}{\beta i \tau + \tau^2 + \mu^2 k \beta i}\right)}{\frac{\tau k \beta i \mu^2}{\beta i \tau + \tau^2 + \mu^2 k \beta i} - \tau} \tag{9}$$

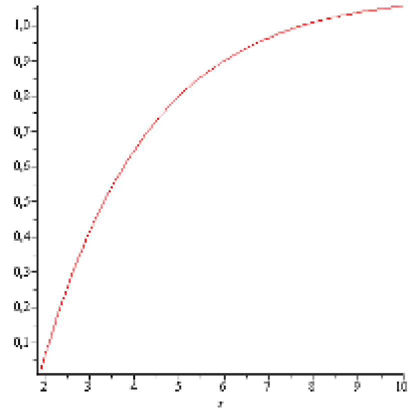
Persamaan (9), merupakan solusi untuk kelas vaksinasi penyakit malaria yang sudah diberi kendali vaksinasi. Persamaan (9) dibutuhkan pada saat dilakukan simulasi numerik, untuk memberikan gambaran tentang banyaknya individu yang divaksinasi penyakit campak untuk waktu tak berhingga.

3.2. Simulasi Numerik

Pada bagian ini, diberikan simulasi dengan nilai parameter berupa tingkat individu yang masuk ke populasi (μ), tingkat kematian (τ), tingkat kontak individu rentan dengan terinveksi (β), dan tingkat individu yang terinfeksi (i).

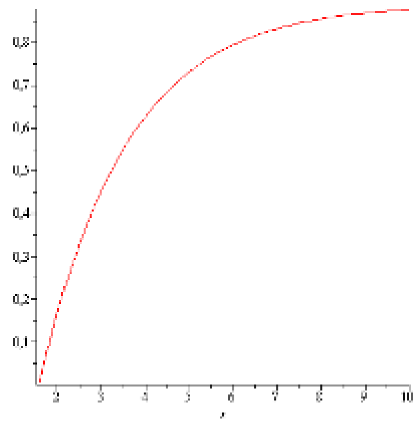
ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Kasus 1 : Diberikan nilai parameter sebagai berikut, $\mu = 10, \tau = 5, \beta = 3,\ i = 2$ dengan nilai *k* diambil bilangan non negatif. Maka, berdasarkan nilai parameter dan Persamaan (9), grafik kelas vaksinasi yaitu,



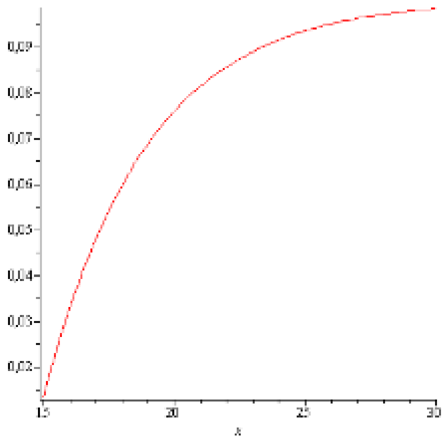
Gambar 1. Nilai Parameter $\mu = 10, \tau = 5,\ \beta = 3, i = 2$

Kasus 2 : Diberikan nilai parameter sebagai berikut, $\mu = 10, \tau = 5, \beta = 2,\ i = 2$, dengan nilai k bilangan non negatif. Maka didapat grafik kelas vaksinasi yaitu,



Gambar 2. Nilai Parameter $\mu = 10, \tau = 5,\ \beta = 2, i = 2$

Kasus 3 : Diberikan nilai parameter sebagai berikut, $\mu = 10, \tau = 5, \beta = 7,\ i = 10$. Kemudian diambil nilai k bilangan non negatif. Maka, berdasarkan nilai parameter diatas dan Persamaan (9), grafik kelas vaksinasi yaitu,



Gambar 3. Nilai Parameter $\mu = 10, \tau = 5,\ \beta = 7, i = 10$

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Pada gambar 1 dan 2 dapat dilihat, bahwa ketika banyaknya individu yang meninggal setelah terinveksi penyakit malaria lebih tinggi dari pada tingkat kontak antara individu rentan dengan individu terinveksi, maka vaksinasi perlu dipercepat. Sementara itu pada gambar 3, dengan nilai simulai berbeda, dengan banyaknya individu yang meninggal setelah terinveksi penyakit malaria lebih rendah dari pada tingkat kontak antara individu rentan dengan individu terinveksi, maka vaksinasi perlu dilakukan tapi tidak secepat pada simulasi 1 dan 2.

4. Kesimpulan

Kesimpulan yang didapat, persamaan tingkat vaksinasi penyakit malaria yang diperlukan yaitu,

$$p = \frac{\lambda_2 \beta i \tau \mu + \tau v k \beta i \mu}{\beta i \tau + \tau^2 + \mu^2 k \beta i}$$

dan, solusi untuk kelas vaksinasi setelah diberi kendali yaitu,

$$v = \frac{e^{\left(\frac{\tau k \beta i \mu^2}{\beta i \tau + \tau^2 + \mu^2 k \beta i} - \tau\right)t}}{\left(\frac{\tau k \beta i \mu^2}{\beta i \tau + \tau^2 + \mu^2 k \beta i} - \tau\right)} - \frac{\left(\frac{\lambda_2 \beta i \tau \mu}{\beta i \tau + \tau^2 + \mu^2 k \beta i}\right)}{\frac{\tau k \beta i \mu^2}{\beta i \tau + \tau^2 + \mu^2 k \beta i} - \tau}$$

Selanjutnya, dari tiga simulasi yang dilakukan tampak bahwa semakin banyak individu yang meninggal karena terinveksi penyakit malaria, maka vaksinasi dilakukan semakin cepat.

Daftar Pustaka

[1] Depkes, Infodatin Pusat data, and Informasi Kementrian Kesehatan RI, “Malaria,” 2016.
[2] Depkes, Infodatin Pusat data, and Informasi Kementrian Kesehatan RI, “Malaria,” 2011.
[3] Nurfitrianah R, Ishak H, Ane R. Analisis Faktor Risiko Lingkungan terhadap Kejadian Malaria Diwilayah Kerja Puskesmas Durikumba Kecamatan Karossa Kabupaten Mamuju. Skripsi. Makassar. UNHAS. 2013.
[4] Atikoh IN. Faktor yang Berhubungan dengan Kejadian Malaria di Desa Sekalambang Kecamatan Kaligondang Kabupaten Purbalingga Tahun 2014. 2015.
[5] Nur W, Nur Z. Estimasi Parameter Model SIR dengan Algoritma Genetik. *JOMTA Journal of Mathematics: Theory and Applications*.2019. 1(2):64-68
[6] Affandi P. Kendali Optimal Pada Penentuan Interval Waktu Dan Dosis Optimal Pada Penyakit Malaria. . Program Studi Pendidikan Matematika FKIP UMS. 2018
[7] Indah J, Rince A, Lestari R. Analysis of SIR Model Without and with Vaccination. , BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan The Behaviour. 2020;14(2)
8] Katsuhiko O. *Modern control engineering*. Prentice-Hall, 2010.