Seminar Nasional Teknologi Informasi, Komunikasi dan Industri (SNTIKI) 13 *ISSN (Printed) : 2579-7271*
Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau *ISSN (Online) : 2579-5406*
Pekanbaru, 18 November 2021

Trace Matriks Simetris Berbentuk Khusus 5x5 Berpangkat Bilangan Bulat

Fitri Aryani[1], Shintya Putri Alfianov[2], Corry Corazon Marzuki[3], Ade Novia Rahma[4]
Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
e-mail: khodijah_fitri@uin-suska.ac.id, shintyaputrialfianov@gmail.com

Abstrak

Penelitian ini membahas mengenai bentuk umum perpangkatan matriks simetris berbentuk khusus 5 x 5 dan trace matriks simetris berbentuk khusus 5 x 5 berpangkat bilangan bulat. Bentuk umum matriks simetris berbentuk khusus 5 x 5 berpangkat bilangan bulat positif dan negatif diperoleh dengan memangkatkan matriks dari pangkat dua sampai sepuluh dan pangkat negatif dua sampai pangkat negatif sepuluh. Selanjutnya diduga bentuk umum perpangkatan matriks simetris berbentuk khusus 5 x 5 berpangkat bilangan bulat positif dan membuktikannya dengan metode induksi matematika. Dengan hal yang sama diduga bentuk umum matriks simetris berbentuk khusus 5 x 5 berpangkat bilangan bulat negatif dan dibuktikan menggunakan definisi invers. Terakhir diperoleh trace matriks simetris berbentuk khusus 5 x 5 berbentuk bilangan bulat dan dibuktikan dengan pembuktian langsung menggunakan definisi trace. Diberikan aplikasi dalam bentuk contoh.

Kata kunci: *Trace, Matriks simetris, Perpangkatan matriks.*

Abstract

This study discusses the general form of a special shaped symmetric matrix of 5 x 5 and a special shaped symmetrical trace matrix of 5 x 5 to the power of integers. The general form of a special symmetrical symmetric matrix 5 x 5 to the power of positive and negative integers is obtained by raising the matrix from the power of two to ten and the power of negative two to the power of negative ten. Furthermore, it is assumed that the general form of the power of a symmetrical matrix of special form 5 x 5 to the power of positive integers and proves it by the method of mathematical induction. In the same way, it is assumed that the general form of a special symmetrical matrix of the form 5 x 5 is to the power of negative integers and is proved using the definition of the inverse. Finally, a special symmetrical trace matrix of 5 x 5 is obtained in the form of an integer and is proven by direct proof using the definition of trace. An application is given in the form of an example

Keywords*: Trace, Symmetric matrix, Power of matrix*

1. Pendahuluan

Menentukan *trace* suatu matriks cukup menjumlahkan elemen-elemen diagonal utamanya saja, dengan syarat matriks harus berbentuk bujursangkar. Namun bagaimana menentukan *trace* dari matriks yang berpangkat?. Maka matriks harus kita pangkatkan terlebih dahulu sebanyak pangkat yang diinginkan. Setelah diperoleh hasil perpangkatan matrisknya maka barulah dapat ditentukan *trace* dari matriks berpangkatnya. Artinya menentukan nilai trace dari matriks yang berpangkat cukup lumayan lama, kecuali telah diperoleh bentuk umum perpangkatan matriksnya. Sehingga peneliti tertarik untuk membahas mengenai *trace* matriks berpangkat.

Pembahasan mengenai *trace* matriks berpangkat telah banyak dilakukan oleh banyak peneliti sebelumnya. Diantaranya oleh [6] pada tahun 2015 yang membahas tentang *trace* matriks sebarang real dengan ukuran 2 x 2 berpangkat bilangan bulat positif. Artikel tersebut menghasilkan persamaan bentuk umum *trace* matriks real 2 x 2 berpangkat bilangan bulat positif, sebagai berikut:

$$trA^n = \sum_{r=0}^{n/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))](\det(A))^r (tr(A))^{n-2r} , \qquad (1)$$

jika *n* genap

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$trA^n = \sum_{r=0}^{n-1/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))](\det(A))^r (tr(A))^{n-2r} , \quad (2)$$

jika *n* ganjil.

Pada tahun 2017, [2] juga melakukan penelitian dengan pembahasan yang sama mengenai *trace* matriks berpangkat. Dalam artikel tersebut mendapatkan bentuk umum dari *trace* matriks real 2 x 2 berpangkat bilangan bulat negatif, yaitu:

$$tr(A^{-n}) = \frac{tr(A^n)}{(\det(A))^n}$$

$$= \frac{\sum_{r=0}^{n/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))](\det(A))^r (tr(A))^{n-2r}}{(\det(A))^n} , \quad (3)$$

jika *n* genap.

$$tr(A^{-n}) = \frac{tr(A^n)}{(\det(A))^n}$$

$$= \frac{\sum_{r=0}^{n-1/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))](\det(A))^r (tr(A))^{n-2r}}{(\det(A))^n} , \quad (4)$$

jika *n* ganjil.

Selanjutnya pada tahun 2019, [7] melakukan penelitian masih membahas mengenai *trace* matriks berpangkat menggunakan matriks bujursangkar A_n, yaitu:

$$A_n = \begin{bmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_i & a_i & \cdots & a_i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & \cdots & a_n \end{bmatrix}.$$

Pada penelitian tersebut [3] mendapatkan hasil bentuk umum sebagai berikut:

$$tr(A_n)^m = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^m , \ \forall \ n \geq 2 \text{ dan } m \in Z^+ . \quad (5)$$

Pada tahun 2020, [3] juga telah melakukan penelitian yang membahas mengenai *trace* matriks berpangkat. Pada penelitian tersebut [4] menggunakan matriks segitiga, yaitu matriks segitiga atas dan matriks segitiga bawah. Matriks segitiga atas berbentuk sebagi berikut: $A_4 = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$, $\forall a,b,c,d \in R$. Dan matriks segitiga bawah berbentuk sebagai berikut: $B_4 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ c & b & a & 0 \\ d & c & b & a \end{bmatrix}$, $\forall a,b,c,d \in R$. Dari kedua jenis matriks segitiga yang digunakan menghasilkan *trace* yang sama, yaitu:

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$tr({A_4}^{-n}) = tr({B_4}^{-n}) = 4\left(\frac{1}{a^n}\right) \quad (6)$$

Selanjutnya [4] juga telah membahas bentuk umum dari *trace* matriks segitiga berpangkat bilangan bulat. Matriks yang digunakan sama halnya dengan matriks pada penelitian [6], hanya ukuran matriks yang diperbesar dengan ukuran 5 x 5. Adapun hasil yang diperoleh dari penelitian tersebut yaitu : $tr({A_5}^{-n}) = tr({B_5}^{-n}) = 5\left(\frac{1}{a^n}\right)$.

Berdasarkan beberapa penelitian tersebut, penulis tertarik untuk melakukan penelitian mengenai *trace* matriks simetris yang berukuran 5 x 5 berpangkat bilangan bulat. Bentuk matriks yang digunakan pada penelitian ini berbentuk:

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & b & b & b & b \\ b & 0 & b & b & b \\ b & b & 0 & b & b \\ b & b & b & 0 & b \\ b & b & b & b & 0 \end{bmatrix}, \ \forall b \in R,\ b \neq 0 \quad (7)$$

2. Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan untuk mendapatkan persamaan bentuk umum *trace* matriks simetris berpangkat bilangan bulat positif dan negatif. Penelitian ini diawali dengan diberikan matriks A_5 dengan entri *b* dan *0*, dimana $\forall b \in R, b \neq 0$. Selanjutnya ditentukan perpangkatan matriks ${A_5}^2$ sampai ${A_5}^{10}$ dan perpangkatan matriks ${A_5}^{-2}$ sampai ${A_5}^{-10}$. Selanjutnya dari perpangkatan tersebut dapat ditentukan persamaan bentuk umum *trace* matriks simetris berpangkat bilangan bulat positif dan negatif. Berikut diberikan landasan teori atau bahan-bahanyang diperlukan dalam pembahasan.

Definisi 1 Pengertian Matriks Simetris [1] Suatu matriks bujursangkar *A* adalah simetrik (*symmetric*) jika $A = A^t$.

Definisi 2 Pengertian Perkalian Matriks Dengan Skalar [1] Jika *A* adalah matriks sebarang dan *c* adalah skalar sebarang, maka ***hasilkali-****nya (product) cA* adalah matriks yang diperoleh dari perkalian setiap entri pada matriks A dengan bilangan *c*. Matriks *cA* disebut sebagai ***kelipatan skalar*** (*scalar multiple*) dari *A*.

Definisi 3 Pengertian Perkalian Dua Buah Matriks [1] Jika *A* adalah matriks $m \times r$ dan *B* adalah matriks $r \times n$ maka ***hasilkali*** (*product*) *AB* adalah matriks $m \times n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut. Untuk mencari entri pada baris *i* dan kolom *j* dari *AB*, pisahkanlah baris *i* dari matriks *A* dan kolom *j* dari matriks *B*. Kalikan entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut dan kemudian jumlahkan hasil yang diperoleh.
Dua buah matriks dapat dikalikan jika jumlah kolom matriks pertama sama dengan jumlah baris matriks kedua. Misalkan $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ adalah matriks $m \times n$ dan $B = \lfloor b_{ij} \rfloor$ adalah matriks $n \times p$. Maka, perkalian *A* dan *B*, dilambangkan matriks $C = \lfloor c_{ij} \rfloor$ yang berukuran $m \times p$.

Definisi 4 Pengertian Perpangkatan Matriks [1] Jika A adalah matriks bujursangkar, maka definisi dari pangkat integer taknegatif dari A adalah

$$A^0 = I \ \ A^n = \underbrace{AA\ldots A}_{nfaktor} \ (n > 0)$$

Selanjutnya, jika A dapat dibalik, maka definisi dari pangkat integer negative dari A adalah

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = \underbrace{A^{-1}A^{-1}\ldots A^{-1}}_{nfaktor}.$$

Definisi 5 Pengertian Determinan Matriks [1] Misalkan *A* adalah suatu bujursangkar. ***Fungsi determinan*** (*determinant function*) dinotasikan dengan ***det*** dan kita mendefinisikan det(A) sebagai jumlah dari semua hasilkali elementer bertanda dari *A*. Angka det(A) disebut *determinan dari A* (*determinant of A*).

Definisi 6 Pengertian Invers Matriks [1] Jika *A* adalah matriks bujursangkar, dan jika terdapat matriks *B* yang ukurannya sama sedemikian rupa sehingga *AB = BA = I*, maka *A* disebut ***dapat dibalik*** (*invertible*) dan *B* disebut sebagai ***invers*** *(inverse)* dari *A*. Jika matriks *B* tidak dapat didefinisikan, maka *A* dinyatakan sebagai ***matriks singular***.

Definisi 7 Pengertian *Trace* Matriks [1] Jika A adalah sebuah matriks bujursangkar, maka ***trace dari A*** *(trace of A)*, yang dinyatakan sebagai *tr*(A), didefinisikan sebagai jumlah entri-entri pada diagonal utama A. *Trace* dari A tidak dapat didefinisikan jika A bukan matriks bujursangkar.

Induksi Matematika [5]

Misalkan *p(n)* adalah proposisi perihal bilangan bulat positif dan kita ingin membuktikan bahwa *p(n)* benar untuk semua bilangan bulat positif n. untuk membuktikan proposisi ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:

1. *p(1)* benar, dan
2. jika*p(n)* benar, maka *p(n+1)* juga benar untuk setiap $n \geq 1$.

Sehingga *p(n)* benar untuk semua bilangan bulat positif n.

3. Hasil dan Pembahasan

Setelah mengikuti langkah-langkah pada metode penelitian yang telah dijelaskan d atasi maka didapatlah persamaan bentuk umum *trace* matriks simetris 5×5 berpangkat bilangan bulat positif dan negatif. Hasilnya disajikan dalam teorema-teorema dan dibuktikan menggunakan aturan matematika yang ada.

3.1. *Trace* Matriks Simetris 5×5 Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Bagian ini hasil yang diperoleh adalah bentuk umum perpangkatan matriks simetris berbentuk khusus 5 x 5 dengan pangkat bilanagn bulat positif. Begitu juga dengan *trace* matriksnya.

Teorema 3.1 Diberikan matriks simetris berbentuk khusus 5 x 5 yaitu:

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & b & b & b & b \\ b & 0 & b & b & b \\ b & b & 0 & b & b \\ b & b & b & 0 & b \\ b & b & b & b & 0 \end{bmatrix}, \ \forall b \in R, \ b \neq 0$$

maka diperoleh bentuk umum perpangkatan matriksnya yaitu:

$$A_5^{\ n} = \begin{bmatrix} \frac{4^n - (-1)^{n+1}4}{5}b^n & \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5}b^n \\ \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n - (-1)^{n+1}4}{5}b^n & \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5}b^n \\ \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n - (-1)^{n+1}4}{5}b^n & \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5}b^n \\ \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n - (-1)^{n+1}4}{5}b^n & \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5}b^n \\ \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n - (-1)^{n+1}4}{5}b^n \end{bmatrix}$$

, atau dapat ditulis

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$A_5{}^n = [c_{ij}] = \begin{cases} \left(\frac{4^n - (-1)^{n+1}4}{5}\right)b^n, i = j \\ \left(\frac{4^n + (-1)^{n+1}}{5}\right)b^n, i \neq j \end{cases}$$

Bukti: Pembuktian dilakukan dengan menggunakan induksi matematika.
Misalkan

$$p(n): A_5{}^n = \begin{bmatrix} \frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n \\ \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n \\ \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n \\ \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n \\ \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}b^n \end{bmatrix}$$

i. Akan ditunjukkan *n*=1, maka *p*(1) benar, yaitu:

$$p(1) = A_5{}^1 = \begin{bmatrix} \frac{4^1-(-1)^{1+1}4}{5}b^1 & \frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}b^1 & \frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}b^1 & \frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}b^1 & \frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}b^1 \\ \frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}b^1 & \frac{4^1-(-1)^{1+1}4}{5}b^1 & \frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}b^1 & \frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}b^1 & \frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}b^1 \\ \frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}b^1 & \frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}b^1 & \frac{4^1-(-1)^{1+1}4}{5}b^1 & \frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}b^1 & \frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}b^1 \\ \frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}b^1 & \frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}b^1 & \frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}b^1 & \frac{4^1-(-1)^{1+1}4}{5}b^1 & \frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}b^1 \\ \frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}b^1 & \frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}b^1 & \frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}b^1 & \frac{4^1+(-1)^{1+1}}{5}b^1 & \frac{4^1-(-1)^{1+1}4}{5}b^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b & b & b & b \\ b & 0 & b & b & b \\ b & b & 0 & b & b \\ b & b & b & 0 & b \\ b & b & b & b & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan memperhatikan Persamaan (7) maka terbukti *p*(1) benar.

ii. Asumsikan $n = k$, maka *p*(*k*) benar, yaitu:

$$A_5{}^n = A_5{}^k = \begin{bmatrix} \frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k \\ \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k \\ \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k \\ \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k \\ \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}b^k \end{bmatrix}$$

Akan ditunjukkan *p*(*k*+1) juga benar, yaitu:

$$p(k+1): A_5{}^{k+1} = \begin{bmatrix} \frac{4^{k+1}-(-1)^{k+2}4}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} \\ \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}-(-1)^{k+2}4}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} \\ \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}-(-1)^{k+2}4}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} \\ \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}-(-1)^{k+2}4}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} \\ \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}-(-1)^{k+2}4}{5}b^{k+1} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Perhatikan bahwa:

$$A^{k+1} = A^k A = [c_{ij}]$$

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$= \begin{bmatrix} \frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k \\ \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k \\ \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k \\ \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k \\ \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}b^k & \frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}b^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & b & b & b & b \\ b & 0 & b & b & b \\ b & b & 0 & b & b \\ b & b & b & 0 & b \\ b & b & b & b & 0 \end{bmatrix}$$

Akan ditunjukkan untuk *i*=*j* yaitu:

$$c_{11} = \left(\frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}\right)b^k \cdot 0 + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k \cdot b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k \cdot b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k \cdot b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k \cdot b$$

$$= \frac{4^{k+1}-(-1)(-1)^{k+1}4}{5}b^{k+1} = \frac{4^{k+1}-(-1)^{k+2}4}{5}b^{k+1},$$

dengan cara yang sama diperoleh juga untuk entri yang lain.

Selanjutnya untuk $i \neq j$ yaitu:

Akan ditunjukkan untuk $i \neq j$ yaitu:

$$c_{12} = \left(\frac{4^k-(-1)^{k+1}4}{5}\right)b^k \cdot b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k \cdot 0 + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k \cdot b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k \cdot b + \left(\frac{4^k+(-1)^{k+1}}{5}\right)b^k \cdot b$$

$$= \left(\frac{4^k-4(-1)^{k+1}+3\cdot 4^k+3(-1)^{k+1}}{5}\right)b^{k+1} = \left(\frac{4^{k+1}+(-1)(-1)^{k+1}}{5}\right)b^{k+1} = \left(\frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}\right)b^{k+1},$$

dengan cara yang sama diperoleh juga untuk entri yang lain. Berdasarkan perkalian entri-entri tersebut maka dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$A_5{}^n = [c_{ij}] = \begin{cases} \left(\frac{4^{k+1}-(-1)^{k+2}4}{5}\right)b^n, i = j \\ \left(\frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}\right)b^n, i \neq j \end{cases}$$

atau dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$A_5{}^{k+1} = \begin{bmatrix} \frac{4^{k+1}-(-1)^{k+2}4}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} \\ \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}-(-1)^{k+2}4}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} \\ \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}-(-1)^{k+2}4}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} \\ \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}-(-1)^{k+2}4}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} \\ \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}+(-1)^{k+2}}{5}b^{k+1} & \frac{4^{k+1}-(-1)^{k+2}4}{5}b^{k+1} \end{bmatrix}$$

Jika dilihat bentuk matriks $A_5{}^{k+1}$ ini sama halnya dengan matriks pada Persamaan (8), maka Teorema 3.1 terbukti. ■

Teorema 3.2 Diberikan matriks $A_5{}^n = \begin{bmatrix} 0 & b & b & b & b \\ b & 0 & b & b & b \\ b & b & 0 & b & b \\ b & b & b & 0 & b \\ b & b & b & b & 0 \end{bmatrix}, \forall b \in R, b \neq 0$, maka

$tr(A_5{}^n) = (4^n - (-1)^{n+1}4)b^n$, dengan *n* bilangan bulat positif.

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Bukti. Pembuktian Teorema 3.2 menggunakan definisi *trace* matriks. Berdasarkan Teorema 3.1, maka:

$$tr(A_5^{\,n}) = tr\begin{bmatrix} \frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n \\ \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n \\ \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n \\ \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n \\ \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}b^n \end{bmatrix}$$

$$tr(A_5^{\,n}) = \left(\frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}\right)b^n + \left(\frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}\right)b^n + \left(\frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}\right)b^n + \left(\frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}\right)b^n + \left(\frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}\right)b^n$$

$= 5\left(\frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}\right)b^n = (4^n-(-1)^{n+1}4)b^n$, dengan *n* bilangan bulat positif.

Teorema 3.2 terbukti. ■

3.2. *Trace* Matriks Simetris 5×5 Berpangkat Bilangan Bulat Negatif

Bagian ini hasil yang diperoleh adalah bentuk umum perpangkatan matriks simetris berbentuk khusus 5 x 5 dengan pangkat bilanagn bulat negatif. Begitu juga dengan *trace* matriksnya.

Teorema 3.3 Diberkan matriks $A_5 = \begin{bmatrix} 0 & b & b & b & b \\ b & 0 & b & b & b \\ b & b & 0 & b & b \\ b & b & b & 0 & b \\ b & b & b & b & 0 \end{bmatrix}, \forall b \in R, b \neq 0$

maka diperoleh bentuk umum perpangkatan matriks A_5 berpangkat bilangan bulat positif, yaitu

$$A_5^{-n} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^n4^{n+1}+1}{5\cdot4^nb^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5\cdot4^nb^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5\cdot4^nb^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5\cdot4^nb^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5\cdot4^nb^n} \\ \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5\cdot4^nb^n} & \frac{(-1)^n4^{n+1}+1}{5\cdot4^nb^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5\cdot4^nb^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5\cdot4^nb^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5\cdot4^nb^n} \\ \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5\cdot4^nb^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5\cdot4^nb^n} & \frac{(-1)^n4^{n+1}+1}{5\cdot4^nb^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5\cdot4^nb^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5\cdot4^nb^n} \\ \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5\cdot4^nb^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5\cdot4^nb^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5\cdot4^nb^n} & \frac{(-1)^n4^{n+1}+1}{5\cdot4^nb^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5\cdot4^nb^n} \\ \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5\cdot4^nb^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5\cdot4^nb^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5\cdot4^nb^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5\cdot4^nb^n} & \frac{(-1)^n4^{n+1}+1}{5\cdot4^nb^n} \end{bmatrix},$$

atau

$$A_5^{-n} = [d_{ij}] = \begin{cases} \frac{(-1)^n4^{n+1}+1}{5\cdot4^nb^n}, i=j \\ \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5\cdot4^nb^n}, i\neq j \end{cases}$$

Bukti: Pembuktian menggunakan aturan invers yaitu: $A_5^{\,n}A_5^{-n} = A_5^{-n}A_5^{\,n} = I$.

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Untuk membuktikan teorema tersebut maka diperlukan A_5^n dengan *n* bilangan bulat positif. Hal ini terdapat pada Teorema 3.1. Akan ditunjukkan $A_5^n A_5^{-n} = I$ yaitu:

$$A_5^n A_5^{-n} = \left[d_{ij}\right] =$$

$$\begin{bmatrix}
\frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n \\
\frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n \\
\frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n \\
\frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n \\
\frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}b^n
\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}
\frac{(-1)^n4^{n+1}+1}{5\cdot4^nb^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5\cdot4^nb^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5\cdot4^nb^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5\cdot4^nb^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5\cdot4^nb^n} \\
\frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5\cdot4^nb^n} & \frac{(-1)^n4^{n+1}+1}{5\cdot4^nb^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5\cdot4^nb^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5\cdot4^nb^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5\cdot4^nb^n} \\
\frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5\cdot4^nb^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5\cdot4^nb^n} & \frac{(-1)^n4^{n+1}+1}{5\cdot4^nb^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5\cdot4^nb^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5\cdot4^nb^n} \\
\frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5\cdot4^nb^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5\cdot4^nb^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5\cdot4^nb^n} & \frac{(-1)^n4^{n+1}+1}{5\cdot4^nb^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5\cdot4^nb^n} \\
\frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5\cdot4^nb^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5\cdot4^nb^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5\cdot4^nb^n} & \frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5\cdot4^nb^n} & \frac{(-1)^n4^{n+1}+1}{5\cdot4^nb^n}
\end{bmatrix}$$

Sehingga hasil perkalian matriks tersebut adalah:

Untuk $i = j$ yaitu:

$$d_{11} = \left(\frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}\right)b^n\cdot\left(\frac{(-1)^n4^{n+1}+1}{5\cdot4^n\cdot b^n}\right)+\left(\frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}\right)b^n\cdot\left(\frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5\cdot4^n\cdot b^n}\right)+\left(\frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}\right)b^n\cdot\left(\frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5\cdot4^n\cdot b^n}\right)+\left(\frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}\right)b^n\cdot\left(\frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5\cdot4^n\cdot b^n}\right)+\left(\frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}\right)b^n\cdot\left(\frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5\cdot4^n\cdot b^n}\right)$$

$$= \frac{(-1)^n4^{2n+1}+4^n-(-1)^{2n+1}4^{n+2}-(-1)^{n+1}4+(-1)^{n+1}4^{2n+1}+4^{n+1}+(-1)^{2n+2}4^{n+1}+(-1)^{n+1}4}{5^24^n}$$

untuk *n* genap

$$= \frac{4^{2n+1}+4^n+4^{n+2}+4-4^{2n+1}+4^{n+1}+4^{n+1}-4}{5^24^n} = 4^n\,\frac{(1+4^2+4+4)}{5^24^n} = \frac{25}{5^2} = 1$$

untuk *n* ganjil

$$= \frac{-4^{2n+1}+4^n+4^{n+2}-4+4^{2n+1}+4^{n+1}+4^{n+1}+4}{5^24^n} = 4^n\,\frac{(1+4^2+4+4)}{5^24^n} = \frac{25}{5^2} = 1,$$

dengan cara yang sama diperoleh juga untuk entri yang lain
Untuk $i \neq j$ yaitu:

$$d_{12} = \left(\frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}\right)b^n\cdot\left(\frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5\cdot4^n\cdot b^n}\right)+\left(\frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}\right)b^n\cdot\left(\frac{(-1)^n4^{n+1}+1}{5\cdot4^n\cdot b^n}\right)+\left(\frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}\right)b^n\cdot\left(\frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5\cdot4^n\cdot b^n}\right)+\left(\frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}\right)b^n\cdot\left(\frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5\cdot4^n\cdot b^n}\right)+\left(\frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}\right)b^n\cdot\left(\frac{(-1)^{n+1}4^n+1}{5\cdot4^n\cdot b^n}\right)$$

$$= \frac{\begin{gathered}(-1)^{n+1}4^{2n}+4^n-(-1)^{2n+2}4^{n+1}-(-1)^{n+1}4+(-1)^n4^{2n+1}+4^n+(-1)^{2n+1}4^{n+1}+(-1)^{n+1}+(-1)^{n+1}4^{2n}+4^n+(-1)^{2n+2}4^n+(-1)^{n+1}+\\(-1)^{n+1}4^{2n}+4^n+(-1)^{2n+2}4^n+(-1)^{n+1}+(-1)^{n+1}4^{2n}+4^n+(-1)^{2n+2}4^n+(-1)^{n+1}\end{gathered}}{5^24^n}$$

untuk *n* genap

$$= \frac{-4^{2n}+4^n-4^{n+1}+4+4^{2n+1}+4^n-4^{n+1}-1-4^{2n}+4^n+4^n-1-4^{2n}+4^n+4^n-1-4^{2n}+4^n+4^n-1}{5^24^n}$$

$$= \frac{-4^n+4^{n+1}-4^n-4^n-4^n}{5^2} = \frac{4^{n+1}-(4\cdot4^n)}{5^2} = \frac{4^{n+1}-4^{n+1}}{5^2} = \frac{0}{5^2} = 0$$

untuk *n* ganjil

$$= \frac{4^{2n}+4^n-4^{n+1}-4-4^{2n+1}+4^n-4^{n+1}+1+4^{2n}+4^n+4^n+1+4^{2n}+4^n+4^n+1+4^{2n}+4^n+4^n+1}{5^24^n}$$

$$= \frac{4^n-4^{n+1}+4^n+4^n+4^n}{5^2} = \frac{-4^{n+1}+(4\cdot4^n)}{5^2} = \frac{-4^{n+1}+4^{n+1}}{5^2} = \frac{0}{5^2} = 0,$$

dengan cara yang sama diperoleh juga untuk entri yang lain. Sehingga didapat matriks identitas yaitu:

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$A_3^n A_3^{-n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$ Hasil yang sama di peroleh untuk $A_4^{-n} A_4^{n} = I$. Sehingga Teorema 3.3 terbukti. ■

Teorema 3.4 Diberkan matriks

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & b & b & b & b \\ b & 0 & b & b & b \\ b & b & 0 & b & b \\ b & b & b & 0 & b \\ b & b & b & b & 0 \end{bmatrix}, \forall b \in R, b \neq 0$$

maka diperoleh bentuk umum *trace* matriks A_5 berpangkat bilangan bulat negatif, yaitu

$$tr(A_5^{\ n}) = \frac{(-1)^n 4^{n+1} + 1}{4^n b^n}$$

Bukti. Pembuktian Teorema 3.4 menggunakan pembuktian langsung definisi *trace* matriks, berdasarkan Teorema 3.3, maka diperoleh trace matriks berpangkat bilangan negatif yaitu:

$$tr(A_5^{-n}) = tr\begin{bmatrix} \frac{(-1)^n 4^{n+1}+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^{n}+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^{n}+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^{n}+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^{n}+1}{5\cdot 4^n b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1} 4^{n}+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^n 4^{n+1}+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^{n}+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^{n}+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^{n}+1}{5\cdot 4^n b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1} 4^{n}+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^{n}+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^n 4^{n+1}+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^{n}+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^{n}+1}{5\cdot 4^n b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1} 4^{n}+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^{n}+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^{n}+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^n 4^{n+1}+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^{n}+1}{5\cdot 4^n b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1} 4^{n}+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^{n}+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^{n}+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^{n}+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^n 4^{n+1}+1}{5\cdot 4^n b^n} \end{bmatrix}$$

$$tr(A_5^{-n}) = \frac{\frac{(-1)^n 4^{n+1}+1}{5}}{4^n b^n} + \frac{\frac{(-1)^n 4^{n+1}+1}{5}}{4^n b^n} + \frac{\frac{(-1)^n 4^{n+1}+1}{5}}{4^n b^n} + \frac{\frac{(-1)^n 4^{n+1}+1}{5}}{4^n b^n} + \frac{\frac{(-1)^n 4^{n+1}+1}{5}}{4^n b^n}$$

$$= 5\left(\frac{(-1)^n 4^{n+1}+1}{5\cdot 4^n b^n}\right) = \frac{(-1)^n 4^{n+1}+1}{4^n b^n},$$

3.3. Aplikasi Bentuk Umum trace $A_5^{\ n}$ dan A_5^{-n}

Diberikan beberapa contoh yang berkaitan dengan hasil dan pembahasan yang telah dijelaskan pada bagian sebelumnya.

Contoh 1. Diberikan matriks

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

. Tentukan B^{-5} dan $tr(B^{-5})$!

Penyelesaian:

Dengan menggunakan Teorema 3.3, maka:

untuk $i = j$

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$b_{ij} = \frac{\dfrac{(-1)^5 4^{5+1} + 1}{5}}{4^5 2^5} = \left(\frac{-256+1}{163.840} \right) = \left(\frac{-255}{163.840} \right) = 0{,}00155$$

untuk $i \neq j$

$$b_{ij} = \frac{\dfrac{(-1)^{5+1} 4^5 + 1}{5}}{4^5 2^5} = \left(\frac{1 \cdot 256+1}{5 \cdot 4^5 \cdot 2^5} \right) = \left(\frac{257}{163.840} \right) = 0{,}00156$$

hasil di atas dapat dinyatakan dalam matriks yaitu:

$$B^{-5} = \begin{bmatrix} 0{,}00155 & 0{,}00156 & 0{,}00156 & 0{,}00156 & 0{,}00156 \\ 0{,}00156 & 0{,}00155 & 0{,}00156 & 0{,}00156 & 0{,}00156 \\ 0{,}00156 & 0{,}00156 & 0{,}00155 & 0{,}00156 & 0{,}00156 \\ 0{,}00156 & 0{,}00156 & 0{,}00156 & 0{,}00155 & 0{,}00156 \\ 0{,}00156 & 0{,}00156 & 0{,}00156 & 0{,}00156 & 0{,}00155 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dengan menggunakan Teorema 3.4, maka:

$$tr(B^{-5}) = \frac{(-1)^5 4^{5+1} + 1}{4^5 2^5} = \frac{-1 \cdot 4096 + 1}{1024 \cdot 32} = \frac{-4095}{32.768} = -0{,}125$$

Contoh 2. Diberikan matriks $B = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$. Tentukan B^{-2} dan $tr(B^{-2})$!

Penyelesaian:

Dengan menggunakan Teorema 3.3, maka:

untuk $i = j$

$$b_{ij} = \frac{\dfrac{(-1)^2 4^{2+1} + 1}{5}}{4^2 \left(\dfrac{2}{3} \right)^2} = \frac{\dfrac{1 \cdot 4^3 + 1}{5}}{16 \left(\dfrac{4}{9} \right)} = \frac{13}{7{,}1} = 1{,}830$$

untuk $i \neq j$

$$b_{ij} = \frac{\dfrac{(-1)^{2+1} 4^2 + 1}{5}}{4^2 \left(\dfrac{2}{3} \right)^2} = \frac{\dfrac{(-1) \cdot 16 + 1}{5}}{16 \left(\dfrac{4}{9} \right)} = \frac{-3}{7.1} = -0{,}422$$

hasil di atas dapat dinyatakan dalam matriks yaitu:

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$B^{-2} = \begin{bmatrix} 1{,}830 & -0{,}422 & -0{,}422 & -0{,}422 & -0{,}422 \\ -0{,}422 & 1{,}830 & -0{,}422 & -0{,}422 & -0{,}422 \\ -0{,}422 & -0{,}422 & 1{,}830 & -0{,}422 & -0{,}422 \\ -0{,}422 & -0{,}422 & -0{,}422 & 1{,}830 & -0{,}422 \\ -0{,}422 & -0{,}422 & -0{,}422 & -0{,}422 & 1{,}830 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dengan menggunakan Teorema 3.4, maka:

$$tr(B^{-2}) = \frac{(-1)^2 4^{2+1} + 1}{4^2\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{(1)\cdot 64 + 1}{16\left(\frac{4}{9}\right)} = \frac{65}{7{,}1} = 9{,}154 \approx 9{,}15$$

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan diperoleh kesimpulan sebagai berikut:
Diberikan matriks simetris berbentuk khusus 5 x 5 yaitu:

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & b & b & b & b \\ b & 0 & b & b & b \\ b & b & 0 & b & b \\ b & b & b & 0 & b \\ b & b & b & b & 0 \end{bmatrix}, \forall b \in R$$

dengan A memiliki invers dan $\det(A) \neq 0$, maka diperoleh:

1) Bentuk umum perpangkatan matriks simetris berbentuk khusus 5×5 berpangkat bilangan bulat positif, yaitu:

$$A_5^{\,n} = \begin{bmatrix} \frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n \\ \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n \\ \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n \\ \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n \\ \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}b^n & \frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}b^n \end{bmatrix}, \text{ atau}$$

$$A_5^{\,n} = [c_{ij}] = \begin{cases} \left(\frac{4^n-(-1)^{n+1}4}{5}\right)b^n, i = j \\ \left(\frac{4^n+(-1)^{n+1}}{5}\right)b^n, i \neq j \end{cases}$$

dan bentuk umum matriks simetris 5×5 berpangkat bilangan bulat negatif, yaitu:

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$A_5^{-n} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^n 4^{n+1}+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5\cdot 4^n b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^n 4^{n+1}+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5\cdot 4^n b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^n 4^{n+1}+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5\cdot 4^n b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^n 4^{n+1}+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5\cdot 4^n b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5\cdot 4^n b^n} & \frac{(-1)^n 4^{n+1}+1}{5\cdot 4^n b^n} \end{bmatrix}, \text{ atau}$$

$$A_5^{-n} = [d_{ij}] = \begin{cases} \dfrac{\frac{(-1)^n 4^{n+1}+1}{5}}{4^n b^n}, & i = j \\ \dfrac{\frac{(-1)^{n+1} 4^n+1}{5}}{4^n b^n}, & i \neq j \end{cases}$$

2) Bentuk umum *trace* matriks simetris berbentuk khusus 5×5 berpangkat bilangan bulat positif yaitu:

$$tr(A_5^{\,n}) = (4^n - (-1)^{n+1}4)b^n$$

dan bentuk umum *trace* matriks simetris 5×5 berpangkat bilangan bulat negatif yaitu:

$$tr(A_5^{\,n}) = \frac{(-1)^n 4^{n+1}+1}{4^n b^n}$$

Daftar Pustaka

[1] Anton H, Chris C. Dasar-Dasar Aljabar inear Versi Aplikasi. Edisi Ketujuh. Jakarta. Erlangga. 2004.
[2] Aryani F, Solihin M. Trace Matriks Real Berpangkat Bilangan Bula Negatif. *Jurnal Sains Matematika dan Statistika.* 2017; 3 (2).
[3] Aryani F, Muda Y. *Trace Matriks Segitiga 4 × 4 Berpangkat Bilangan Bulat*. SNTIKI 12. Pekanbaru. 2020: 12
[4] Aryani F, Muda Y. *Trace Matriks Segitiga 5 × 5 Berpangkat Bilangan Bulat*. SNTIKI 12. Pekanbaru. 2020: 12
[5] Munir R. *Matematika Diskrit*. Penerbit Informatika. 2005.
[6] Pahade J, Jha M, Trace of Positive Integer Power of Real 2×2 matrices. *Advancesin Linear Algebra & Matrix Theory*.2015; 5: 150-155.
[7] Rahmawati, Citra AC, Aryani F, Marzuki CC, Muda Y. Trace of Positive Integer Poer of Squared Special Matrix. *Jurnal Matematika Murni dan Aplikasi CAUYCHY*. 2021: 6 (4):200-211.