Seminar Nasional Teknologi Informasi, Komunikasi dan Industri (SNTIKI) 13 *ISSN (Printed): 2579-7271*
Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau *ISSN (Online): 2579-5406*
Pekanbaru, 18 November 2021

Trace Matriks Simetris Berbentuk Khusus Orde 3 Berpangkat Bilangan Bulat

Fitri Aryani[1], Fatri Bayu Cenia[2], Yuslenita Muda[3], Zukrianto[4]
Program Studi Matematika, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155, Simpang Baru, Panam Pekanbaru, 28293
e-mail: khodijah_fitri@uin-suska.ac.id[1], fatribayucenia@gmail.com[2]

Abstrak

Artikel ini membahas tentang trace matriks simetris yang berbentuk khusus orde 3 berpangkat bilangan bulat. Untuk mendapatkan rumus umum trace matriks simetris berbentuk khusus orde 3 berpangkat bilangan bulat diperoleh dengan cara menentukan perpangkatan matriks simetris dari pangkat 2 sampai pangkat 10 dan pangkat -2 sampai pangkat -10. Selanjutnya menduga rumus umum perpangkatan matriks simetris tersebut berpangkat bilangan bulat positif, serta membuktikannya menggunakan aturan induksi matematika. Dan menduga rumus umum perpangkatan matriks simetris tersebut berpangkat bilangan bulat negatif kemudian membuktikannya menggunakan aturan invers. Hasil akhir diperoleh trace matriks simetris orde 3 berpangkat bilangan bulat dengan menggunakan definisi trace dan mengaplikasikannya dalam beberapa contoh soal.

Kata kunci: *induksi matematika, invers, matriks simetris, perpangkatan matriks, trace matriks.*

Abstract

This article discusses the symmetrical trace matrix which has a special form of order 3 to the power of integers. To obtain the general form of a symmetrical trace matrix of a special form of order 3 to the power of integers, it is obtained by determining the power of the symmetric matrix from the power of 2 to the power of 10 and to the power of -2 to the power of -10. Next, predict the general form of the power of the symmetrical matrix to the power of positive integers, and prove it using mathematical induction. And guessing the general form of the power of the symmetrical matrix to the power of negative integers and then proving it using the inverse rule. The final result is a symmetrical trace matrix of order 3 with the power of integers by using the definition of trace and applying it in several example problems,

.

Keywords: *mathematical induction, inverse, symmetric matrix, matrix multiplication, trace matrix.*

1. Pendahuluan

Trace matriks adalah jumlah dari setiap elemen-elemen diagonal utama suatu matriks bujursangkar [1]. Untuk mendapatkan nilai *trace* dari suatu matriks berpangkat, maka matriks tersebut harus dipangkatkan sebanyak pangkat yang diinginkan. Setelah mendapatkan bentuk perpangkatan matriksnya, maka dengan menggunakan definisi *trace* matriks, diperolehlah *trace* dari matriks berpangkat tersebut.

Salah satu penelitian yang membahas tentang *trace* matriks berpangkat ialah [8], yang membahas mengenai *trace* matriks orde 2 dengan entri-entri matriksnya bilangan real yang berpangkat bilangan bulat positif. Penelitian tersebut mendapatkan rumus umum *trace* dari matriks orde 2 dengan entri-entri matriksnya bilangan real yang berpangkat bilangan bulat positif genap dan bilangan bulat positif ganjil. Selanjutnya penelitian *trace* dari matriks berpangkat juga dibahas oleh [2] mengenai rumus umum *trace* matriks orde 2 dengan entri-entri matriksnya bilangan real yang berpangkat bilangan bulat negatif. Matriks yang digunakan dalam penelitian tersebut sama halnya dengan matriks pada penelitian [8]. Hasil yang diperoleh pada penelitian tersebut yaitu mendapatkan rumus umum *trace* matriks orde 2 dengan entri-entri matriksnya bilangan real yang berpangkat bilangan bulat negatif ganjil dan bilangan bulat negatif genap.

Pada tahun 2018 [4] melakukan penelitian mengenai *trace* dari matriks berbentuk khusus orde 2 berpangkat bilangan bulat negatif. Dalam penelitian tersebut menggunakan matriksnya adalah:

ISSN (Printed): 2579-7271
ISSN (Online): 2579-5406

$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \forall\, a, b \in \mathbb{R}$. Hasil yang didapat pada penelitian tersebut adalah mendapatkan rumus umum *trace* dari matriks berbentuk khusus orde 2 berpangkat bilangan bulat negatif genap dan ganjil dengan A memiliki invers. Penelitian tentang *trace* matriks berpangkat juga dilakukan oleh [3]. Penelitiannya membahas mengenai rumus umum *trace* dari matriks berbentuk khusus orde 2 berpangkat bilangan bulat positif. Matriks yang digunakan dalam penelitian tersebut sama dengan matriks yang digunakan oleh [3]. Penelitian tersebut memperoleh hasil rumus umum *trace* matriks berbentuk khusus orde 2 berpangkat bilangan bulat positif genap dan ganjil.

Tahun 2019 [6] meneliti tentang *trace* matriks berpangkat pada matriks segitiga berbentuk khusus orde 3 yang berpangkat bilangan bulat positif. Matriks segitiga yang digunakan yaitu matriks segitiga atas (A_3) dan segitiga bawah (B_3). Hasil yang diperoleh menyatakan bahwa nilai *trace* pada matriks segitiga tersebut sama yaitu: $tr(A_3^n) = tr\left(B_3^n\right) = 3a^n$. Dengan bentuk matriksnya yaitu:

$$A_3 = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \forall\, a, b, c \in \mathbb{R} \text{ dan } B_3 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{bmatrix} \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$$

Masih menggunakan matriks yang sama dengan [6], namun dengan orde yang lebih besar yaitu orde 4, selanjutnya [5] melakukan penelitian yang membahas mengenai bentuk umum dari *trace* matriks segitiga bentuk khusus dengan orde 4 berpangkat bilangan bulat. Penelitian tersebut juga memperoleh hasil bahwa nilai *trace* pada matriks segitiga atas sama dengan matriks segitiga bawah. Rumus umum *trace* dari matriks segitiga berbentuk khusus orde 4 dengan pangkat bilangan bulat positif sebagai berikut:

$$tr({A_4}^n) = tr({B_4}^n) = 4(a^n)\ , \tag{1}$$

dan *trace* dari matriks segitiga berbentuk khusus orde 4 dengan pangkat bilangan bulat negatif adalah sebagai berikut:

$$tr({A_4}^{-n}) = tr({B_4}^{-n}) = 4\left(\frac{1}{a^n}\right).$$

Berdasarkan dari uraian di atas, penulis tertarik membahas mengenai *trace* matriks berpangkat dengan pangkat bilangan bulat pada matriks simetris. Penelitian ini dibatasi pada matriks simetris orde 3 berbentuk khusus dengan bentuk sebagai berikut:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & b & b \\ b & 0 & b \\ b & b & 0 \end{bmatrix} \forall\ b \in \mathbb{R},\ b \neq 0 \tag{2}$$

2. Metode Penelitian

Metode penelitian pada artikel ini adalah studi literatur. Berikut diberikan langkah-langkah untuk mendapatkan hasil penelitian yang diharapkan.

1) Diberikan matriks simetris berbentuk khusus orde 3 yaitu:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & b & b \\ b & 0 & b \\ b & b & 0 \end{bmatrix}, \forall b \in R, b \neq 0.$$

2) Menentukan perpangkatan matriks $(A_3)^2$sampai $(A_3)^{10}$.
3) Menduga rumus umum matriks $(A_3)^n$, dengan n bilangan bulat positif.
4) Membuktikan rumus umum matriks simetris$(A_3)^n$ dengan n bilangan bulat positif menggunakan aturan induksi matematika.
5) Mendapatkan $tr(A_3)^n$, n bilangan bulat positif dengan menggunakan definisi *trace* matriks.
6) Menentukan invers matriks A_3 dengan metode adjoin.
7) Menentukan perpangkatanmatriks$(A_3)^{-2}$sampai $(A_3)^{-10}$.
8) Menduga rumus umum matriks $(A_3)^n$ dengan n bilangan bulat negatif.

ISSN (Printed): 2579-7271
ISSN (Online): 2579-5406

9) Membuktikan rumus umum matriks$(A_3)^n$,n bilangan bulat negatif menggunakan aturan invers, yaitu $A_3^{-n}A_3^n = A_3^nA_3^{-n} = I$
10) Mendapatkan $tr(A_3)^n$, n bilangan bulat negatif dengan menggunakan definisi *trace* matriks.
11) Aplikasi rumus umum dari $(A_3)^n$ dan $tr(A_3)^n$ dengan n bilangan bulat pada beberapa contoh soal.

Sebelum melanjutkan ke langkah-langkah metode penelitian yang dijelaskan di atas, berikut diberikan beberapa landasan teori yang digunakan dalam penelitian ini.

2.1. Matriks Simetris dan Perkalian Matriks

Definisi 2.1 [1] Suatu matriks bujursangkar *A* adalah *simetris* (symmetris) jika $A = A^t$.

Definisi 2.2 [1] Jika A adalah matriks $m \times r$ dan B adalah matriks $r \times n$, maka hasil kali AB adalah matriks $m \times n$ yang entri-entrinya ditentukan. Untuk mencari entri dalam baris i dan kolom j dari AB, pisahkan baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B. Kalikan entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut dan kemudian jumlahkan hasil kali yang didapatkan.

Definisi 2.3 [1] Jika A adalah matriks bujursangkar, maka defenisi dari pangkat integer tak negatif dari A adalah :

$$A^0 = I, \qquad \text{dan} \quad A^n = \underbrace{AA\ldots A}_{n\,faktor} \quad (n > 0).$$

Selanjutnya, jika A dapat dibalik maka defenisi dari pangkat integer negatif dari A adalah:

$$A^{-n} = (A^{-1})^n, \text{ dan } \quad A^{-n} = \underbrace{A^{-1}A^{-1}\ldots A^{-1}}_{n\,faktor}.$$

2.2. Invers Matriks

Definisi 2.4 [1] Jika A adalah matriks bujursangkar, dan jika terdapat matriks B yang ukurannya sama demikian rupa sehingga $AB = BA = I$, maka A disebut dapat dibalik (*invertible*) dan B disebut sebagai ***invers*** (*inverse*) dari A. Jika matriks B tidak dapat didefinisikan, maka A dinyatakan sebagai *matriks singular.*

Teorema 2.1 [1] Jika A adalah matriks yang dapat dibalik, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A).$$

2.3. *Trace* Matriks

Definisi 2.5 [1] Jika $\boldsymbol{A}$ adalah sebuah matriks bujursangkar, maka trace dari $\boldsymbol{A}$ yang dinyatakan sebagai $\boldsymbol{tr}\,(\boldsymbol{A})$, didefinisikan sebagai jumlah entri-entri pada diagonal utama $\boldsymbol{A}$. *Trace* dari $\boldsymbol{A}$ tidak dapat didefinisikan jika $\boldsymbol{A}$ bukan matriks bujur sangkar.

2.4. Induksi Matematika

Definisi 2.6 [7] Merupakan teknik pembuktian yang baku di dalam matematika.
Prinsip induksi sederhana sebagai berikut:
(1) $p(1)$ benar
(2) Jika $p(n)$ benar, maka $p(n+1)$ juga benar untuk setiap $n \geq 1$ hingga $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.

ISSN (Printed): 2579-7271
ISSN (Online): 2579-5406

3. Hasil dan Pembahasan

3.1. *Trace* Matriks Simetris Berbentuk Khusus orde 3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Setelah mengikuti langkah-langkah penelitian di atas, maka diperoleh hasil dari penelitian ini yaitu: rumus umum perpangkatan matriks simetris berbentuk khusus orde 3 dengan pangkat bilangan bulat dan *trace* dari matriks tersebut. Pada subbagian ini khusus dibahas perpangkatan bilangan bulat positif. Berikut diberikan bentuk umum perpangkatan matriks simetris berbentuk khusus orde 3 berpangkat bilangan bulat positif yang disajikan dalam Teorema 3.1 dan dibuktikan menggunakan induksi matematika.

Teorema 3.1 Diberikan matriks simetris berbentuk khusus orde 3

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & b & b \\ b & 0 & b \\ b & b & 0 \end{bmatrix}, \forall b \in R, b \neq 0, \text{ maka :}$$

$$A_3^n = \begin{bmatrix} \frac{2^n - (-1)^{n+1}2}{3} b^n & \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} b^n & \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} b^n \\ \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} b^n & \frac{2^n - (-1)^{n+1}3}{3} b^n & \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} b^n \\ \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} b^n & \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} b^n & \frac{2^n - (-1)^{n+1}2}{3} b^n \end{bmatrix}, \text{ atau dapat ditulis sebagai:}$$

$$A_3^n = [c_{ij}] = \begin{cases} \frac{2^n - (-1)^{n+1}2}{3} b^n; & \text{untuk } i = j \\ \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} b^n; & \text{untuk } i \neq j \end{cases}.$$

Bukti: Pembuktian teorema di atas menggunakan induksi matematika

Misalkan

$$p(n): A_3^n = \begin{bmatrix} \frac{2^n - (-1)^{n+1}2}{3} b^n & \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} b^n & \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} b^n \\ \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} b^n & \frac{2^n - (-1)^{n+1}3}{3} b^n & \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} b^n \\ \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} b^n & \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} b^n & \frac{2^n - (-1)^{n+1}2}{3} b^n \end{bmatrix}$$

1. Akan ditunjukan $n=1$, maka $p(1)$ benar :

$$p(1): A_3^1 == \begin{bmatrix} \frac{0}{3} b^1 & \frac{3}{3} b^1 & \frac{3}{3} b^1 \\ \frac{3}{3} b^1 & \frac{0}{3} b^1 & \frac{3}{3} b^1 \\ \frac{3}{3} b^1 & \frac{3}{3} b^1 & \frac{0}{3} b^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b & b \\ b & 0 & b \\ b & b & 0 \end{bmatrix}$$

   dengan melihat kembali Persamaan (6) maka terbukti $p(1)$ benar.▪

2. Asumsikan untuk $n=k$, maka $p(k)$ benar yaitu :

ISSN (Printed): 2579-7271
ISSN (Online): 2579-5406

$$p(k): A_3^k = \begin{bmatrix} \frac{2^k - (-1)^{k+1}2}{3}b^k & \frac{2^k + (-1)^{k+1}}{3}b^k & \frac{2^k + (-1)^{k+1}}{3}b^k \\ \frac{2^k + (-1)^{k+1}}{3}b^k & \frac{2^k - (-1)^{k+1}2}{3}b^k & \frac{2^k + (-1)^{k+1}}{3}b^k \\ \frac{2^k + (-1)^{k+1}}{3}b^k & \frac{2^k + (-1)^{k+1}}{3}b^k & \frac{2^k - (-1)^{k+1}2}{3}b^k \end{bmatrix}$$

dan akan dibuktikan untuk $n = k+1$ maka $p(k+1)$ juga benar, yaitu:

$$p(k+1): A_3^{k+1} = [c_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{2^{k+1} - (-1)^{k+2}2}{3}b^{k+1} & \frac{2^{k+1} + (-1)^{k+2}}{3}b^{k+1} & \frac{2^{k+1} + (-1)^{k+2}}{3}b^{k+1} \\ \frac{2^{k+1} + (-1)^{k+2}}{3}b^{k+1} & \frac{2^{k+1} - (-1)^{k+2}2}{3}b^{k+1} & \frac{2^{k+1} + (-1)^{k+2}}{3}b^{k+1} \\ \frac{2^{k+1} + (-1)^{k+2}}{3}b^{k+1} & \frac{2^{k+1} + (-1)^{k+2}}{3}b^{k+1} & \frac{2^{k+1} - (-1)^{k+2}2}{3}b^{k+1} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Perhatikan bahwa :

$$A_3^{k+1} = (A_3)^k (A_3)^1 = [c_{ij}]$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2^k - (-1)^{k+1}2}{3}b^k & \frac{2^k + (-1)^{k+1}}{3}b^k & \frac{2^k + (-1)^{k+1}}{3}b^k \\ \frac{2^k + (-1)^{k+1}}{3}b^k & \frac{2^k - (-1)^{k+1}2}{3}b^k & \frac{2^k + (-1)^{k+1}}{3}b^k \\ \frac{2^k + (-1)^{k+1}}{3}b^k & \frac{2^k + (-1)^{k+1}}{3}b^k & \frac{2^k - (-1)^{k+1}2}{3}b^k \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & b & b \\ b & 0 & b \\ b & b & 0 \end{bmatrix}$$

Dari perkalian matriks diatas didapatkan untuk $i = j$ yaitu:

$$c_{11} = \frac{\left(2^k - (-1)^{k+1}2\right)}{3}b^k(0) + \frac{2^k + (-1)^{k+1}}{3}b^k(b) + \frac{\left(2^k + (-1)^{k+1}\right)}{3}b^k(b) = \frac{2^{k+1} - (-1)^{k+2}2}{3}b^{k+1},$$

dengan cara yang sama diperoleh juga untuk entri yang lain.

Selanjutnya untuk $i \neq j$ yaitu:

$$c_{12} = \frac{2^k - (-1)^{k+1}2}{3}b^k(b) + \frac{\left(2^k + (-1)^{k+1}\right)}{3}b^k(0) + \frac{2^k + (-1)^{k+1}}{3}b^k(b) = \frac{2^{k+1} + (-1)^{k+2}}{3}b^{k+1}$$

dengan cara yang sama diperoleh juga untuk entri yang lain. Sehingga hasil akhir diperoleh:

$$A_3^{k+1} = \begin{bmatrix} \frac{2^{k+1} - (-1)^{k+2}2}{3}b^{k+1} & \frac{2^{k+1} + (-1)^{k+2}}{3}b^{k+1} & \frac{2^{k+1} + (-1)^{k+2}}{3}b^{k+1} \\ \frac{2^{k+1} + (-1)^{k+2}}{3}b^{k+1} & \frac{2^{k+1} - (-1)^{k+2}2}{3}b^{k+1} & \frac{2^{k+1} + (-1)^{k+2}}{3}b^{k+1} \\ \frac{2^{k+1} + (-1)^{k+2}}{3}b^{k+1} & \frac{2^{k+1} + (-1)^{k+2}}{3}b^{k+1} & \frac{2^{k+1} - (-1)^{k+2}2}{3}b^{k+1} \end{bmatrix}$$

atau dapat dituliskan:

ISSN (Printed): 2579-7271
ISSN (Online): 2579-5406

$$A_3^{k+1} = [c_{ij}] = \begin{cases} \dfrac{2^{k+1} - (-1)^{k+2} 2}{3} b^{k+1}; & i = j \\ \dfrac{2^{k+1} + (-1)^{k+2}}{3} b^{k+1}; & i \neq j \end{cases}$$

Dengan memperhatikan Persamaan (7) terbukti $p(k+1)$ benar dan Teorema 3.1 terbukti.▪

Setelah mendapatkan bentuk umum perpangkatan matriks simetris berbentuk khusus orde 3 berpangkat bilangan bulat positif, maka selanjutnya akan didapatkan *trace* dari matriks tersebut yang disajikan dalam Teorema 3.2 dan dibuktikan menggunakan definisi *trace* matriks.

Teorema 3.2 Diberikan matriks simetris berbentuk khusus orde 3

$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & b & b \\ b & 0 & b \\ b & b & 0 \end{bmatrix} \forall b \in R, b \neq 0.$ maka diperoleh:

$tr\left(A_3{}^n\right) = 3\left(\dfrac{2^n - (-1)^{n+} 2}{3}\right) b^n$, dengan n bilangan bulat positif.

Bukti: Pembuktian Teorema 3.2 menggunakan definisi *trace* matriks. Berdasarkan Teorema 3.1 maka:

$$tr(A_3^n) = tr\begin{bmatrix} \dfrac{2^n - (-1)^{n+1} 2}{3} b^n & \dfrac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} b^n & \dfrac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} b^n \\ \dfrac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} b^n & \dfrac{2^n - (-1)^{n+1} 3}{3} b^n & \dfrac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} b^n \\ \dfrac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} b^n & \dfrac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} b^n & \dfrac{2^n - (-1)^{n+1} 2}{3} b^n \end{bmatrix}$$

$$= \frac{2^n - (-1)^{n+1} 2}{3} b^n + \frac{2^n - (-1)^{n+1} 2}{3} b^n + \frac{2^n - (-1)^{n+1} 2}{3} b^n = 3\left(\frac{2^n - (-1)^{n+} 2}{3}\right) b^n$$

Dari hasil yang didapat, maka Teorema 3.2 terbukti.▪

3.2. *Trace* Matriks Simetris Berbentuk Khusus orde 3 Berpangkat Bilangan Bulat Negatif

Subbagian ini khusus dibahas perpangkatan bilangan bulat negatif. Berikut diberikan rumus umum perpangkatan matriks simetris yang berbentuk khusus orde 3 dengan pangkat bilangan bulat negatif yang disajikan dalam Teorema 3.3 dan dibuktikan menggunakan aturan invers matriks.

Teorema 3.3 Diberikan matriks simetris berbentuk khusus sebagai berikut:

$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & b & b \\ b & 0 & b \\ b & b & 0 \end{bmatrix} b \in R, b \neq 0.$ maka:

ISSN (Printed): 2579-7271
ISSN (Online): 2579-5406

$$(A_3)^{-n} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^n 2^{n+1}+1}{3.2^n.b^n} & \frac{(-1)^{n+1}2^n+1}{3.2^n.b^n} & \frac{(-1)^{n+1}2^n+1}{3.2^n.b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1}2^n+1}{3.2^n.b^n} & \frac{(-1)^n 2^{n+1}+1}{3.2^n.b^n} & \frac{(-1)^{n+1}2^n+1}{3.2^n.b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1}2^n+1}{3.2^n.b^n} & \frac{(-1)^{n+1}2^n+1}{3.2^n.b^n} & \frac{(-1)^n 2^{n+1}+1}{3.2^n.b^n} \end{bmatrix}$$, atau ditulis

$$(A_3)^{-n} = [d_{ij}] = \begin{cases} \frac{(-1)^n 2^{n+1}+1}{3.2^n.b^n} & \text{untuk } i = j \\ \frac{(-1)^{n+1}2^n+1}{3.2^n.b^n} & \text{untuk } i \neq j \end{cases}$$

Bukti: Pembuktian menggunakan aturan invers yaitu $A_3^n A_3^{-n} = A_3^{-n} A_3^n = I$.

Akan ditujukan $A_3^n A_3^{-n} = I$ sebagai berikut

$$A_3^n A_3^{-n} = [d_{ij}]$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2^n-(-1)^{n+1}2}{3}b^n & \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}b^n & \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}b^n \\ \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}b^n & \frac{2^n-(-1)^{n+1}3}{3}b^n & \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}b^n \\ \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}b^n & \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}b^n & \frac{2^n-(-1)^{n+1}2}{3}b^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{(-1)^n 2^{n+1}+1}{3.2^n.b^n} & \frac{(-1)^{n+1}2^n+1}{3.2^n.b^n} & \frac{(-1)^{n+1}2^n+1}{3.2^n.b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1}2^n+1}{3.2^n.b^n} & \frac{(-1)^n 2^{n+1}+1}{3.2^n.b^n} & \frac{(-1)^{n+1}2^n+1}{3.2^n.b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1}2^n+1}{3.2^n.b^n} & \frac{(-1)^{n+1}2^n+1}{3.2^n.b^n} & \frac{(-1)^n 2^{n+1}+1}{3.2^n.b^n} \end{bmatrix}$$

Dari hasil perkalian matriks tersebut didapatkan untuk *i - j*

$$d_{11} = \left(\frac{2^n-(-1)^{n+1}2}{3}\right)b^n\left(\frac{(-1)^n 2^{n+1}+1}{3.2^n.b^n}\right) + 2\left(\frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}\right)b^n\left(\frac{(-1)^{n+1}2^n+1}{3.2^n.b^n}\right)$$

$$= \frac{(-1)^n 2^{2n+1} + 2^n - (-1)^{2n+1}2^{n+2} - (-1)^{n+1}2 + (-1)^{n+1}2^{2n+1} + 2^{n+1} + (-1)^{2n+2}2^{n+1} + (-1)^{n+1}2}{3^2 2^n}$$

untuk n ganjil

$$= 2^n\left(\frac{1+2^2+2+2}{3^2 2^n}\right) = \left(\frac{9}{9}\right) = 1,$$

untuk n genap

$$= 2^n\left(\frac{1+2^2+2+2}{3^2 2^n}\right) = \left(\frac{9}{9}\right) = 1,$$

dengan cara yang sama diperoleh juga untuk entri yang lain.

Selanjutnya untuk $i \neq j$ yaitu:

$$d_{12} = \left(\frac{2^n-(-1)^{n+1}2}{3}\right)b^n\left(\frac{(-1)^{n+1}2^n+1}{3.2^n.b^n}\right) + \left(\frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}\right)b^n\left(\frac{(-1)^n 2^{n+1}+1}{3.2^n.b^n}\right) + \left(\frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}\right)b^n\left(\frac{(-1)^{n+1}2^n+1}{3.2^n.b^n}\right)$$

ISSN (Printed): 2579-7271
ISSN (Online): 2579-5406

$$
= \frac{\begin{matrix}(-1)^{n+1}2^{2n}+2^n-(-1)^{2n+2}2^{n+1}-(-1)^{n+1}2+(-1)^n 2^{2n+1}+2^n+(-1)^{2n+1}2^{n+1} \\ +(-1)^{n+1}+(-1)^{n+1}2^{2n}+2^n+(-1)^{2n+2}2^n+(-1)^{n+1}\end{matrix}}{3^2 2^n}
$$

untuk n ganjil

$$
= 2^n\left(\frac{(1.1)+1-2-(1.2)+1-2+(1.1)+1+1}{3^2 2^n}\right) = \frac{6-6}{9} = 0,
$$

untuk n genap

$$
= 2^n\left(\frac{-(1.1)+1-2+(1.2)+1-2-(1.1)+1+1}{3^2 2^n}\right) = \frac{6-6}{9} = 0,
$$

dengan cara yang sama diperoleh juga untuk entri yang lain. Sehingga didapat:

$$
A_3^n A_3^{-n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I.
$$

Berlaku juga untuk $A_3^{-n}A_3^n$ diperoleh matriks identitas, sehingga berlaku $A_3^n A_3^{-n} = A_3^{-n}A_3^n = I$
Pembuktian Teorema 3.3 selesai dan terbukti ▪.

Selanjutnya didapatlah *trace* dari matriks yang disajikan pada Teorema 3.3 di atas. Bentuk umumnya disajikan dalam Teorema 3.4 dan dibuktikan menggunakan definisi *trace* matriks.

Teorema 3.4 Diberikan matriks simetris berebntuk khusus orde 3

$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & b & b \\ b & 0 & b \\ b & b & 0 \end{bmatrix} b \in R, b \neq 0,$ maka diperoleh:

$$
trr\left(A_3^{-n}\right) = 3\left(\frac{(-1)^n 2^{n+1}+1}{3.2^n b^n}\right).
$$

Bukti: Pembuktian Teorema 3.4 dengan aturan pembuktian langsung menggunakan definisi *trace* matriks. Berdasarkan Teorema 3.3, maka:

$$
tr(A_3^{-n}) = tr\begin{bmatrix} \frac{(-1)^n 2^{n+1}+1}{3.2^n.b^n} & \frac{(-1)^{n+1}2^n+1}{3.2^n.b^n} & \frac{(-1)^{n+1}2^n+1}{3.2^n.b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1}2^n+1}{3.2^n.b^n} & \frac{(-1)^n 2^{n+1}+1}{3.2^n.b^n} & \frac{(-1)^{n+1}2^n+1}{3.2^n.b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1}2^n+1}{3.2^n.b^n} & \frac{(-1)^{n+1}2^n+1}{3.2^n.b^n} & \frac{(-1)^n 2^{n+1}+1}{3.2^n.b^n} \end{bmatrix}
$$

$$
tr\left(A_3^{-n}\right) = 3\left(\frac{(-1)^n 2^{n+1}+1}{3.2^n b^n}\right),
$$

Dari hasil yang didapat, maka Teorema 3.4 terbukti.▪

3.3. Aplikasi *Trace* Matriks Simetris Berbentuk Khusus orde 3 Berpangkat Bilangan Bulat

Bagian ini diberikan dua contoh yang mewakili teorema-teorema yang didapat pada bagian sebelumnya.

ISSN (Printed): 2579-7271
ISSN (Online): 2579-5406

Contoh 1. Diberikan matriks $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 5 & 0 & 5 \\ 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ tentukanlah $(A_3)^4$ dan $tr(A_3)^4$!

Penyelesaian.
Berdasarkan Teorema 3.1 maka diperoleh:

$$A_3^{\,4} = \begin{bmatrix} \frac{2^4-(-1)^{4+1}2}{3}(5)^4 & \frac{2^4+(-1)^{4+1}}{3}(5)^4 & \frac{2^4+(-1)^{4+1}}{3}(5)^4 \\ \frac{2^4+(-1)^{4+1}}{3}(5)^4 & \frac{2^4-(-1)^{4+1}2}{3}(5)^4 & \frac{2^4+(-1)^{4+1}}{3}(5)^4 \\ \frac{2^4+(-1)^{4+1}}{3}(5)^4 & \frac{2^4-(-1)^{4+1}}{3}(55)^4 & \frac{2^4-(-1)^{4+1}2}{3}(5)^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3750 & 3125 & 3125 \\ 3125 & 3750 & 3125 \\ 3125 & 3125 & 3750 \end{bmatrix}$$

dan dengan menggunakanTeorema 3.2 diperoleh:

$$tr\left(A_3^4\right) = 3\left(\frac{2^4-(-1)^{4+1}2}{3}\right)5^4 = 3\left(\frac{16+2}{3}625\right) = 3(3750) = 11250$$

Contoh 2. Diberikan matriks $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{bmatrix}$ tentukanlah $(A_3)^{-5}$ dan $tr(A_3)^{-5}$!

Penyelesaian:
Berdasarkan Teorema 3.3 diperoleh

$$A_3^{-5} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^5 2^{5+1}+1}{3.2^5.\left(\frac{3}{5}\right)^5} & \frac{(-1)^{5+1}2^5+1}{3.2^5.\left(\frac{3}{5}\right)^5} & \frac{(-1)^{5+1}2^5+1}{3.2^5.\left(\frac{3}{5}\right)^5} \\ \frac{(-1)^{5+1}2^5+1}{3.2^5\left(\frac{3}{5}\right)^5} & \frac{(-1)^5 2^{5+1}+1}{3.2^5.\left(\frac{3}{5}\right)^5} & \frac{(-1)^{5+1}2^5+1}{3.2^5.\left(\frac{3}{5}\right)^5} \\ \frac{(-1)^{5+1}2^5+1}{3.2^5.\left(\frac{3}{5}\right)^5} & \frac{(-1)^{5+1}2^5+1}{3.2^5.\left(\frac{3}{5}\right)^5} & \frac{(-1)^5 2^{5+1}+1}{3.2^5.\left(\frac{3}{5}\right)^5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8{,}439429 & 4{,}420653 & 4{,}420653 \\ 4{,}420653 & -8{,}439429 & 4{,}420653 \\ 4{,}420653 & 4{,}420653 & -8{,}439429 \end{bmatrix}$$

dan dengan menggunakan Teorema 3.4 maka:

$$tr\left(A_3^{-5}\right) = 3\left(\frac{(-1)^5 2^{5+1}+1}{3.2^5\left(\frac{3}{5}\right)^5}\right) = 3\left(\frac{-64+1}{3.32.0{,}07776}\right) = 3(-8{,}439429) = -25{,}318287$$

4. Kesimpulan

1) Diberikan matriks simetris berbentuk khusus orde 3, yaitu:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & b & b \\ b & 0 & b \\ b & b & 0 \end{bmatrix} b \in R, b \neq 0.$$

Didapatkan rumus umum perpangkatan matriks simetris berbentuk khusus orde 3 dengan pangkat bilangan bulat positif yaitu :

ISSN (Printed): 2579-7271
ISSN (Online): 2579-5406

$$A_3^n = \begin{bmatrix} \frac{2^n - (-1)^{n+1}2}{3} b^n & \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} b^n & \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} b^n \\ \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} b^n & \frac{2^n - (-1)^{n+1}3}{3} b^n & \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} b^n \\ \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} b^n & \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} b^n & \frac{2^n - (-1)^{n+1}2}{3} b^n \end{bmatrix},$$

atau

$$A_3^n = [c_{ij}] = \begin{cases} \frac{2^n - (-1)^{n+1}2}{3} b^n; & \text{untuk } i = j \\ \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} b^n; & \text{untuk } i \neq j \end{cases}$$

dan diperoleh juga:

$$tr\left(A_3{}^n\right) = 3\left(\frac{(2^n - (-1)^{n+1}2)}{3} b^n\right).$$

2) Diberikan matriks simetris berbentuk khusus orde 3 yaitu:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & b & b \\ b & 0 & b \\ b & b & 0 \end{bmatrix} b \in R, b \neq 0.$$

Didapatkan rumus umum perpangkatan matriks simetris berbentuk khusus orde 3 dengan pangkat bilangan bulat negatif yaitu :

$$A_3^{-n} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^n 2^{n+1} + 1}{3.2^n.b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 2^n + 1}{3.2^n.b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 2^n + 1}{3.2^n.b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1} 2^n + 1}{3.2^n.b^n} & \frac{(-1)^n 2^{n+1} + 1}{3.2^n.b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 2^n + 1}{3.2^n.b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1} 2^n + 1}{3.2^n.b^n} & \frac{(-1)^{n+1} 2^n + 1}{3.2^n.b^n} & \frac{(-1)^n 2^{n+1} + 1}{3.2^n.b^n} \end{bmatrix},$$

atau

$$A_3^{-n} = [d_{ij}] = \begin{cases} \frac{(-1)^n 2^{n+1} + 1}{3.2^n.b^n} & \text{untuk } i = j \\ \frac{(-1)^{n+1} 2^n + 1}{3.2^n.b^n} & \text{untuk } i \neq j \end{cases}$$

dan diperoleh juga:

$$tr\left(A_3^{-n}\right) = 3\left(\frac{(-1)^n 2^{n+1} + 1}{3.2^n.b^n}\right)$$

Daftar Pustaka

[1] Anton H, Rorres C. Dasar-Dasar Aljabar inear Versi Aplikasi, Edisi Ketujuh, Jakarta, Erlangga, 2004.

[2] Aryani F, Solihin M. Trace Matriks Real Berpangkat Bilangan Bula Negatif, *Jurnal Sains Matematika dan Statistika. 2017;* 3 (2).

[3] Aryani F, Fatonah T. *Trace Matriks Berbentuk Khusus* 2×2 *Berpangkat Bilangan Bulat Positif*. Prosiding Semirata Medan. 2018.

[4] Aryani F, Yulianis. Trace Matriks Berbentuk Khusus 2×2 Berpangkat Bilangan Bulat Negatif, *Jurnal Sains Matematika dan Statistika.* 2018; 4 (2).

ISSN (Printed): 2579-7271
ISSN (Online): 2579-5406

[5] Aryani F, Muda Y. Trace Matriks Segitiga 4 × 4 Berpangkat Bilangan Bulat. *SNTIKI 12.* Pekanbaru. 2020.
[6] Wibowo S. Trace Matriks Segitiga 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif. Skripsi. Pekanbaru: Uin Sultan Kasim Riau; 2019.
[7] Munir R. Matematika Diskrit, Penerbit Informatika, 2005.
[8] Pahade J, Jha M. Trace of Positive Integer Power of Real 2×2 matrices. *Advancesin Linear Algebra & Matrix Theory*, 2015; 5: 150-155.