Seminar Nasional Teknologi Informasi, Komunikasi dan Industri (SNTIKI) 13
Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Pekanbaru, 18 November 2021

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Kendali Optimal Persediaan Barang Susut Radioisotop Fosfor-32 Dengan Peninjauan Berkala

Nilwan Andiraja[2], Safitri Wahyuni[2]
[1,2] Prodi Matematika, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: nilwanandiraja@uin-suska.ac.id[1], safitriwahyuni21@gmail.com[2]

Abstrak

Artikel ini membahas tingkat persediaan optimal barang di model matematika persediaan barang dengan penyusutan pada radioisotop fosfor-32. Model matematika yang diberikan berupa persamaan diferensial orde satu dan fungsi tujuan kuadratik. Selanjutnya, dari persamaan diferensial orde satu dan fungsi tujuan kuadratik dibentuk persamaan Hamilton. Setelah itu dibentuk persamaan state, kostate dan persamaan stasioner. Kemudian, dari persamaan kostate dapat dibentuk persamaan diferensial Riccati. Kemudian, persamaan diferensial Ricati tersebut diselesaikan. Selanjutnya, solusi dari persamaan diferensial Riccati tersebut digunakan untuk mendapatkan kendali persamaan tingkat persediaan barang yang optimal. Berdasarkan simulasi yang dibuat, didapat kendali persediaan barang untuk radioisotop fosfor-32 mengalami dinamika naik turun, bisa bertambah karena adanya penambahan barang dan bisa habis karena barang mengalami penyusutan dan dikirim ke pembeli.

Kata kunci: *Diferensial, Persediaan, Riccati, Radioisotop, Transformasi*

Abstract

This article was discussed to get the optimal level of inventory goods in the inventory mathematics model with shrinking in fosfor-32 radioisotope. The mathematical model that gave was formed in the first order of differential equations and the quadratic objective function. Furthermore, from the first order of differential equations and the quadratic objective function were made the Hamiltonian equation. Then, from the Hamiltonian equation, we were made of the state equation, costate, and stationary equation. Next, from the costate equation, we could create a Riccati differential equation. Then, The Riccati differential equation was solved. So that, solution of the Riccati differential equation was used to obtain optimal the control of inventory good equation. According to simulation was made. It obtained the control of inventory for radioisotope phosphorus-32 run into increase and decrease. the inventory could increase cause there is an addition for goods and could run out cause the goods become shrinking and deliver to the customer.

Keywords*: Diffential, Inventory, Radioisotope, Riccati, Transfromation*

1. Pendahuluan

Indonesia merupakan negara kepulauan dengan iklim tropis yang tepat untuk pertanian. Mayoritas penduduk Indonesai bekerja sebagai petani. Bidang pertanian merupakan salah satu bidang yang diharapkan untuk menambah pendapatan negara. Bidang pertanian dapat mengekspor sejumlah hasil pertaniannya ke beberapa negara. Oleh karena itu, diperlukan usaha agar produksi pertanian meningkat. Salah satu usaha yang dapat dilakukan yaitu dengan pemupukan.

Salah satu cara pemupukan adalah dengan menggunakan radioisotop fosfor-32. Radioisotop merupakan suatu isotop dari unsur radioaktif yang mengeluarkan sinar radioaktif. Kemudian, pada bidang pertanian radioisotop fosfor-32 dapat digunakan perunut gerakan pupuk disekitar tumbuhan setelah ditaburi. Pergerakan pupuk jenis fosfat, dari tanah sampai kedalam tanaman bisa diketahui dengan cara menggabungkan radioisotop tersebut ke dalam senyawa fosfat pada pupuk. Hal ini bisa digunakan untuk mengetahui bentuk sebaran pupuk dan bentuk keefektifan pemberian pupuk.

Banyaknya petani menggunakan radioisotop fosfor-32 sebagai pupuk, maka akan menyebabkan persediaan barang menjadi habis, sehingga perlu peningkatan produksi barang. Proses produksi dapat berjalan lancar apabila jumlah penyimpanan persediaan barang bisa diatur sesuai dengan kebutuhan produksi. Hal ini karena, radioisotop fosfor-32 tidak bisa disimpan terlalu lama, sebab radioisotop fosfor-32 memiliki sifat menyusut karena proses kimia. Oleh karena itu, diperlukan pengendalian prosuksi radioisotop fosfor-32, agar persediaan radioisotop fosfor-32 tidak terlalu banyak dan tidak terlalu sedikit.

Terdapat beberapa penelitian yang membahas aplikasi kendali optimal pada persediaan. Penelitian yang berkaitan dengan aplikasi kendali optimal pada persediaan dapat dilihat di [6] dengan judul “Aplikasi Kendali LQR Diskrit untuk Sistem Pergudangan Barang Susut dengan Peninjauan Berkala pada Radioisotop Fosfor-32”. Penelitian tersebut membahas tentang kendali pada sistem waktu diskrit untuk pergudangan terhadap barang yang terjadi penyusutan. Metode yang digunakan adalah kendali regulator linear kuadratik dengan waktu diskrit. Pada penelitian [6] tersebut persoalan yang dibahas hanya pada fungsi tujuan untuk waktu diskrit waktu berhingga. Waktu diskrit yang dipakai pada penelitian [6] memiliki kelemahan, karena waktu diskrit hanya menghitung kendali untuk waktu yang ditentukan atau waktu yang diberikan. Sementara waktu diluar yang ditentukan tidak menjadi perhitungan atau diabaikan. Sehingga tidak semua atau sepanjang waktu sistem yang dihitung. Hal ini akan menyebabkan perhitungan tidak dapat menggambarkan sistem secara keseluruhan, karena ada waktu yang diabaikan. Apalagi pada penelitian [6], kasus dipakai untuk barang yang dapat berkurang sendirinya dikarenakan proses penguapan atau penyusutan akibat adanya reaksi kimia.

Selanjutnya penelitian lain yang terkait dengan kendali optimal tersebut yaitu penelitian yang diperoleh pada [1] dengan judul “Perluasan Model Kendali Optimal pada Masalah Inventori yang Mengalami Penurunan Mutu”. Penelitian tersebut membahas bagaimana mengurangi tingkat persediaan barang yang mengalami kemerosotan mutu menggunakan *invetory differential equation* (IDE). Pada penelitian [1] juga dibahas untuk barang yang mengalami penurunan mutu. Sama seperti pada penelitian [6] juga untuk barang yang mngalami penyusutan. Namun, pada penelitian [6] barang yang menjadi kasus merupakan barang yang hanya mutu yang berkurang bukan berkurang pada masa barang. Sementara pada penelitian [6], masa barang yang berkurang diakibatkan oleh proses kimiawi. Pada penelitian [1] metode yang digunakan merupakan metode IDE, hal ini menggambarkan bahwa waktu yang digunakan merupakan waktu kontinu. Penggunaan waktu kontinu lebih baik dibandingkan penggunaan waktu diskrit pada penelitian [6]. Karena pada waktu kontinu, maka proses perhitungan akan melibatkan seluruh atau sepanjang waktu sistem. Sehingga jika diperoleh kendali, maka kendali tersebut akan mengendalikan sistem persediaan sepanjang waktu. Hal ini perlu, jika terjadi persoalan persediaan dapat diketahui dengan cepat dan tepat waktu dan tentu akan memberikan dampak yang baik bagi perusahaan. Namun untuk menyelesaikan persoalan persediaan untuk waktu kontinu dapat juga dilakukan dengan metode *linear quadratic regulator* (LQR).

Pada artikel ini, akan digunakan metode LQR dengan merubah waktu diskrit pada penelitian [1] menjadi waktu kontinu. Karena diperlukan kendali secara kontinu setiap waktu untuk barang yang mengalami penyusutan. Agar persediaan barang dapat diketahui setiap waktu. Maka, jika terjadi pengurangan persediaan barang dapat segera di tambah. Sehingga dapat dihindari kekosongan persediaan di gudang atau jika tejadi peningkatan permintaan dari konsumen secara tiba-tiba, maka tingkat persediaan dapat ditambah dengan segera. Sehingga untuk itu, persamaan dinamik persediaan barang pada [1] dirubah menjadi persamaan diferensial persediaan barang. Persamaan diferensial tersebut akan diturunkan terhadap waktu. Selanjutnya karena ini berlaku untuk model LQR, maka persamaan diferensial yang dibentuk persamaan diferensial yang berbentuk linier. Sehingga semua variabel berpangkat satu dan tidak ada perkalian dua varibel. Pada persamaan diferensial dinamik tersebut akan diberikan variabel persediaan dan varibel kendali persediaan. Variabel kendali tersebut akan dicari untuk mengendalikan persediaan, sehingga diharapkan persediaan akan terkendali dalam pengadaannya. Jika persediaan menurun maka akan dilakukan penambahan persediaan sehingga dapat memenuhi permintaan. Sementara jika persediaan meningkat maka produksi dikurangi atau dihentikan sementara, sambil persediaan yang ada dilakukan penjualan agar persediaan tidak menumpuk dan persediaan akan habis. Sebab jika persediaan sudah banyak tapi produksi tetap berjalan, maka dikhawatirkan barang akan menumpuk yang akan mengakibatkan peningkatan biaya penyimpanan dan tentuk akan memberikan beban keuangan

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

bagi perusahaan kemudian juga barang akan berkurang diakibatkan proses kimiawi, maka akan mengakibatkan kerugian yang lebih banyak karena barang akan hilang percuma dan tidak terjual. Selanjutnya, untuk fungsi tujuan akan dirubah dari fungsi waktu diskrit ke waktu kontinu. Sehingga fungsi tujuan awal menggunakan simbol sigma untuk waktu nol sampai waktu takberhingga, maka dirubah menjadi waktu kontinu menggunakan simbol integral mulai waktu nol sampai waktu berhingga. Kemudian karena menggunakan model LQR, maka fungsi tujuan akan berbentuk kuadrat, kuadrat untuk fungsi kendali maupun untuk variabel persediaan. Kemudian, setelah itu proses LQR untuk penentuan kendali dilanjutkan dengan membentuk persamaan Hamilton. Persamaan Hamilton tersebut akan mengandung pengali Lagrange yang berguna dalam membentuk fungsi kendali optimal. Sehingga pada artikel ini akan diperoleh kendali optimal berdasarkan metode LQR yang berlaku sepanjang waktu yang diberikan. Setelah diperoleh kendali optimal, maka berikutnya akan dicari tingkat kedali persediaan yang diperlukan. Agar pembahasan lebih lengkap, maka akan dilakukan analisis numerik menggunakan nilai parameter dalam bentuk contoh. Dari contoh yang diberikan akan diperoleh kurva kendali persediaan barang sepanjang waktu. Sehingga diharapkan dengan adanya kurva kendali persediaan akan memberi gambarang lebih jelas, kapan persediaan akan habis sehingga perlu ditingkatkan produksi dan kapan persediaan meningkat sehingga produksi dihentikan sementara.

2. Metode Penelitian

Pada artikel ini dilakukan langkah-langkah yaitu:

1) Diketahui dari penelitian [1] persamaan dinamik untuk penyusutan barang dengan waktu diskrit dengan satu kendali sebagai berikut:
$$y[(k+1)T] = \rho y(kT) + u(kT) - h(kT)$$
Kemudian diketahui fungsi tujuan kasus penyusutan barang untuk waktu diskrit sebagai berikut:
$$J(u) = \sum_{k-0}^{\infty} \left\{ u^2(kT) + w\left[y_d - y(kT)\right]^2 \right\}.$$
Selanjutnya persamaan dinamik untuk waktu diskrit satu kendali dan fungsi tujuan untuk waktu diskrit satu kendali tersebut diubah ke persamaan dinamik dan fungsi tujuan waktu kontinu untuk satu kendali. Waktu yang dipakau untuk waktu awal nol sampai waktu akhir berhingga.
2) Kemudian, dibentuk Persamaan Hamilton dari langkah no 1, persamaan Hamilton yang bentuk terdiri dari persamaan diferensial dinamik dan fungsi tujuan serta terdapat pengali Lagrange.
3) Selanjutnya berdasarkan langkah 2, ditentukan Persamaan state yang berguna untuk mendapatkan persamaan persediaan, persamaan costate untuk membentuk persamaan diferensial Riccati dan persamaan stasioner untuk mendapatkan fungsi kendali untuk persediaan barang.
4) Berdasarkan langkah 3 pada persamaan costate dan dengan menggunakan pengali Lagrange dibentuk persamaan diferensial Riccati.
5) Kemudian, persamaan diferensial Riccati yang diperoleh pada langkah no 4 dicari solusinya.
6) Kemudian solusi dari Persamaan Riccati dicari berdasarkan [2] dan [8], kemudian solusi tersebut di langkah akan digunakan membentuk fungsi kendali, dengan cara mengganti pengali Lagrange yang ada dengan solusi persamaan diferensial Riccati.
7) Selanjutnya, dari fungsi kendali yang didapat di langkah 6, dilakukan analisa numerik. Analisa numerik dilakukan dengan memberikan beberapa nilai parameter. Kemudian akan digambarkan grafik kendali untuk tingkat persediaan barang pada kasus radiaisotop fosfor-32. Kemudian dari gambar grafik tersebut akan dianalisa dan akan dijadikan saran agar persediaan dapat optimal.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1. Kendali Optimal pada Masalah Persediaan Barang yang Mengalami Penyusutan

Persamaan pada langkah (1) di metodoligi, dirubah dari waktu diskrit ke waktu kontinu sehingga menjadi persamaaan dinamik waktu kontinu yaitu,

$$\dot{y} = \rho y(t) + u(t) - h(t) \tag{1}$$

dengan fungsi tujuan yaitu:

$$J = \int_0^{T_f} u^2 + w[(y_d - y(t)]^2 dt \tag{2}$$

Selanjutnya, menurut [4] dan [7] dan berdasarkan Persamaan (1) dan (2) dibentuk persamaan Hamilton:

$$H = u^2 + w[(y_d - y(t)]^2 + \lambda(\rho y(t) + u(t) - h(t)) \tag{3}$$

kemudian dari Persamaan (3) dibentuk persamaan state, costate dan stasioner, yaitu

$$\dot{y} = \frac{dH}{d\lambda} = \rho y(t) + u(t) - h(t) \tag{4}$$

$$-\dot{\lambda} = \frac{dH}{dy} = -2y_d w + 2yw + \lambda\rho \tag{5}$$

$$0 = \frac{dH}{du} = 2u + \lambda \tag{6}$$

dari Persamaan (6) didapat kendali,

$$u = -\frac{\lambda}{2} \tag{7}$$

Menurut [5] dan [6] untuk mendapatkan persamaan Riccati terlebih dahulu diasumsikan,

$$sy = \lambda(t) \tag{8}$$

dengan s adalah matriks definit positif. Kemudian Persamaan (8) dideferensialkan terhadap t

$$\dot{\lambda} = \dot{s}y + s\dot{y} \tag{9}$$

dari persamaan (5) disubtitusikan ke Persamaan (8), diperoleh

$$\dot{\lambda} = 2y_d w - 2yw - sy\rho \tag{10}$$

Selanjutnya, disubtitusikan Persamaan (10) dan Persamaan (4) ke Persamaan (9), didapat

$$\dot{s}y = 2y_d w - 2yw + \frac{s^2 y}{2} + sh - 2sy\rho \tag{11}$$

kemudian, Persamaan (11) dibuat sebagai berikut:

$$\dot{s}y = \frac{s^2 y}{2} + sh - 2yw + 2y_d w - 2sy\rho \tag{12}$$

dimana, Persamaan (36) disubstitusikan $y = m$ diperoleh,

$$\dot{s} = \frac{s^2}{2} + s\left(\frac{h}{m} - 2\rho\right) + w\left(\frac{2y_d}{m} - 2\right) \tag{13}$$

Persamaan (13) adalah persamaan diferensial Riccati. Solusi dari persamaan (13) di substitusikan ke Persamaan (8) dan kemudian dilanjutkan disubstitusikan ke Persamaan (7), maka diperoleh kendali yaitu,

$$u = -\frac{sy}{2} \tag{14}$$

Kemudian untuk melengkapi pembahasan, maka diambil contoh dan nilai parameter dari [3] . sebagai bentuk contoh untuk model matematika untuk persedian barang radioisotop fosfor-32 yang mengalami penyusutan, sebagai berikut:

Contoh :

Diasumsikan peluang terjadinya penyusutan$(\rho) = 1$, jumlah barang yang telah dikirim$(h) = 32$, kapasitas maksimum barang dalam gudang$(y_d) = 35$ dengan biaya$(w) = 8$. Tentukan persediaan barang yang optimal untuk nilai fungsi tujuan yang optimal.

Penyelesaian:

Berdasarkan nilai parameter contoh di atas maka dibentuk Persamaan (25) yaitu:

$$\dot{y} = y(t) + u(t) - 32$$

Dengan Persamaan (26) yaitu:

$$J = \int_0^m u^2 + 8y^2 - 560y - 9800\, dt$$

maka diperoleh Persamaan (18) sebagai berikut:

$$H = u^2 + 8y^2 - 560y - 9800 + \lambda(y + u - 32)$$

Kemudian dari Persamaan diatas dibentuk Persamaan (19)-(21)sebagai berikut:

$$\dot{y} = \frac{dH}{d\lambda} = y + u - 32$$

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$-\dot{\lambda} = \frac{dH}{dy} = 16y - 560 + \lambda$$
$$0 = \frac{dH}{du} = 2u + \lambda, \text{ didapat } u = -\frac{\lambda}{2}$$

Selanjutnya, diasumsikan,

$$sy = \lambda(t)$$

Dengan s adalah matriks definit positif.
Kemudian dideferensialkan terhadap waktu t

$$\dot{\lambda} = \dot{s}y + s\dot{y}$$

Subtitusikan persamaan *costate* ke $sy = \lambda(t)$

$$\dot{\lambda} = -16y + 560 - sy$$

Subtitusikan persamaan $\dot{\lambda} = -16y + 560 - sy$ ke persamaan $\dot{\lambda} = \dot{s}y + s\dot{y}$, didapat

$$\dot{s}y = \frac{s^2y}{2} - 16y - 2sy + 32s + 560$$

Subtitusikan $y = m$ ke persamaan di atas

$$\dot{s} = \frac{s^2}{2} - 16 - 2s + \frac{32s}{m} + \frac{560}{m}$$

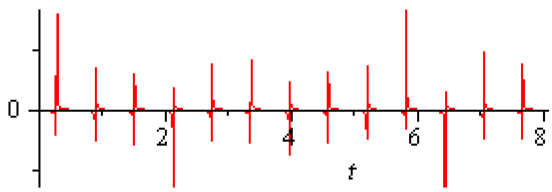
Selanjutnya, dengan mengambil $m = 8$ sebagai waktu akhir, maka disubtitusikan $m = 8$ ke persamaan di atas

$$\dot{s} = \frac{s^2}{2} + 2s + 54$$

Persamaan di atas adalah persamaan diferensial Riccati, dengan bantuan *software Maple*, maka solusi dari persamaan Riccati diperoleh sebagai berikut:

$$s(t) = -\frac{1}{13}\left(\sqrt{26} - 26\tan\left(\frac{1}{26}(26t + \sqrt{26}\arctan\left(\frac{1}{26}\sqrt{26}\right))\sqrt{26}\right)\sqrt{26}$$

Selanjutnya disubstitusikan solusi persamaan diferensial Riccati diatas, ke Persamaan (14), maka diperoleh grafik kendali yaitu



Gambar 1. Kendali untuk Persediaan Radioisotop Fosfor-32

Berdasarkan gambar 1 di atas dapat dilihat bahwa untuk $t \to 8$ diperoleh kendali persediaan $y(t)$ mengalami naik dan turun untuk barang radioisotop fosfor-32. Sehingga dapat dikatakan bahwa tingkat persediaan untuk radioisotop fosfor-32 juga mengalami kenaikan yang disebabkan karena adanya penambahan barang dan menurun karena adanya barang yang menyusut atau barang yang dikirim atau dijual ke pembeli. Kurva yang berada di bawah sumbu *x,* dapat diartikan bahwa pada waktu tersebut, terjadi permintaan atau pembelian oleh konsumen tapi tidak dapat dipenuhi oleh penjual, atau dapat juga diartikan ketika petani membutuhkan barang radioisotop fosfor-32, maka barang tidak tersedia. Semakin banyak petani yang meminta barang tersebut, maka semakin banyak penjual atau produsen berhutang kepada konsumen atau petani.

Berhutang dalam model persediaan (*inventory model*) dapat dikatakan terjadi *back order*, sehingga penjual akan menjanjikan kepada konsumen atau petani untuk mengambil barang ketika barang telah tersedia dimasa depan. Tampak bahwa setiap kurva yangturun dibawah sumbu *x,* diikuti oleh kurva yang naik diatas sumbu *x,* kurva naik menandakan terjadi proses produksi atau proses pengadaan barang radioisotop fosfor-32. Dan setiap bkurva yang naik maka akan turun kembali. Turunnya kembail kurva menandakan barang yang telah tersimpan atau telah diproduksi terjadi proses pengiriman barang ke konsumen. Hal ini dilakukan agar tidak terjadi penumpukan barang di gudang.

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

4. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang dilakukan, maka diperoleh kesimpulan bahwa terdapat kendali untuk persoalan model matematika untuk kasus barang yang mengalami penyusutan. Berdasarkan contoh diperoleh bahwa kendali persediaan $y(t)$ mengalami naik dan turun untuk barang radioisotop fosfor-32. Sehingga dapat dikatakan bahwa tingkat persediaan untuk radioisotop fosfor-32 juga mengalami kenaikan yang disebabkan karena adanya penambahan barang dan menurun karena adanya barang yang menyusut atau barang yang dikirim atau dijual ke pembeli.

Daftar Pustaka

[1] Affandi P. Perluasan Model Kendali Optimal pada Masalah Inventori yang Mengalami Penurunan Mutu*. Proseding Seminar Nasional Matematika II*. 2016: 2406-9868.
[2] Muhajjir MN. Persamaan Diferensial Biasa dengan MAPLE. Pekanbaru. 2018
[3] Munawwaroh DA. Aplikasi Kendali LQR Diskrit untuk Sistem Pergudangan Barang Susut dengan Peninjauan Berkala pada Radioisotop Fosfor-32. *Jurnal MIP.* 2017; 56-62.
[4] Lewis FL. Optimal Control. Toronto : John Wiley & Sons, Inc. 2012.
[5] Ogata, Katsuhiko. Modern Control Engineering fifth edition. New York: Prentice-Hall, Inc. 2010.
[6] Ogata, Katsuhiko. Discrete Time Control System. New Jersey: Prentice-Hall. 1995.
[7] Olsder GJ. Mathematical Sistem Theory. Delft : University Of Technology. 1994.
[8] Ross, Shepley L. Differential Equations. Singapore: John Wiley & Sons. 1984.