ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Trace Matriks Segitiga 5 x 5 Berpangkat Bilangan Bulat

Fitri Aryani[1], Annisa Rubbani[2], Haslinda[3], Corry Corazon Marzuki[4], Rahmawati[5]
[1,2,3,4,5]Prodi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
e-mail: [1]khodijah_fitri@uin-suska.ac.id, [4]corry@ui-suska.ac.id, [5]rahmawat@uin-suska.ac.id

Abstrak

Artikel ini membahas mengenai bentuk umum perpangkatan matriks segitiga 5×5 dan trace matriks segitiga 5×5 berpangkat bilangan bulat. Bentuk umum perpangkatan matriks segitiga atas $(A_5{}^n)$ dan matriks segitiga bawah $(B_5{}^n)$ dengan n bilangan bulat, diperoleh dengan memangkatkan matriks tersebut dari pangkat -10 sampai pangkat 10. Selanjutnya dibuktikan bentuk umum matriks $A_5{}^n$ dan $B_5{}^n$ dan membuktikannya dengan menggunakan induksi matematika. Terakhir diperoleh $tr(A_5{}^n)$ dan $tr(B_5{}^n)$ dengan menggunakan bentuk umum dari $A_5{}^n$ dan $B_5{}^n$ dan membuktikannya dengan pembuktian langsung. Pengaplikasiannya diberikan dalam bentuk contoh soal.

Kata kunci : *induksi matematika, matriks segitiga, perkalian matriks, trace matriks.*

Abstract

This paper discusses the general form of the trace of integer power of triangular 5 x 5 matrix $(A_5{}^n)$ and $(B_5{}^n)$. This is obtained by powering the matrix from -10 to 10. And then, we will prove $(A_5{}^n)$ and $(B_5{}^n)$ by using mathematical induction. Furthermore, obtained the formula of $tr(A_5{}^n)$ and $tr(B_5{}^n)$ by using the general form of $A_5{}^n$ and $B_5{}^n$ and prove it by direct proof. The application is given in the form of example problems.

Keywords : *mathematical induction, triangular matix,multiplication matix, trace* matrix.

1. Pendahuluan

Terdapat beberapa jenis matriks, diantaranya matriks bujursangkar, matriks diagonal, matriks *simetris,* matriks segitiga (segitiga atas dan segitiga bawah). Menurut Anton [1], matriks segitiga atas adalah matriks bujursangkar yang semua entri dibawah diagonal utamanya bernilai nol. Dan matriks segitiga bawah adalah matriks bujursangkar yang semua entri diatas diagonal utamanya bernilai nol.

Operasi matriks diantaranya adalah perkalian matriks, determinan, invers, *trace* matriks, dan lain sebagainya. Pada penelitian ini yang akan dibahas adalah mengenai *trace* matriks. Menurut Anton [1], jika A adalah sebuah matriks bujursangkar, maka *trace* dari A, yang dinyatakan sebagai $tr(A)$, didefenisikan sebagai jumlah entri-entri pada diagonal utama. *Trace* dari A tidak dapat didefenisikan jika A bukan matriks bujursangkar.

Berdasarkan definisi di atas bahwa menentukan *trace* dari suatu matriks tidaklah begitu sulit. Namun bagaimana jika yang akan ditentukan adalah *trace* dari suatu matriks yang berpangkat. Berikut diberikan pemaparan penelitian sebelumnya yang membahas mengenai *trace* dari suatu matriks yang berpangkat. Diantaranya Pahade [8] pada tahun 2015 membahas mengenai rumus umum *trace* matriks 2×2 berpangkat bilangan bulat positif untuk n genap dan n ganjil. Matriks yang digunakan adalah $A = [a\ b\ c\ d\ ], \forall\ a, b, c, d \in R$, dengan bentuk umum *trace* matriks A berpangkat bilangan bulat positif, yaitu:

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$tr(A^n)=\sum_{r=0}^{n/2}\frac{(-1)^r}{r!}n[n-(r+1)][n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))](\det(A))^r(tr(A))^{n-2r},n$$ genap

$$tr(A^n)=\sum_{r=0}^{(n-1)/2}\frac{(-1)^r}{r!}n[n-(r+1)][n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))](\det(A))^r(tr(A))^{n-2r},n$$ ganjil

Pembahasan mengenai *trace* matriks juga dibahas oleh Aryani [2] dalam artikelnya, yang membahas mengenai bentuk umum dari *trace* matriks real berpangkat bilangan bulat negatif yang merupakan lanjutan dari artikel Pahade [8]. Sebab, matriks yang digunakan sama dengan matriks yang digunkan oleh Pahade [8], yaitu: $=[a\ b\ c\ d\ ],\forall\ a,b,c,d\ R$. Bentuk umum *trace* matriksnya yaitu:

$$tr(A^{-n})=\frac{tr(A^n)}{(\det(A))^n}=\frac{\sum_{r=0}^{n/2}\frac{(-1)^r}{r!}n[n-(r+1)][n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))](\det(A))^r(tr(A))^{n-2r}}{(\det(A))^n},n$$ genap

$$tr(A^{-n})=\frac{tr(A^n)}{(\det(A))^n}=\frac{\sum_{r=0}^{(n-1)/2}\frac{(-1)^r}{r!}n[n-(r+1)][n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))](\det(A))^r(tr(A))^{n-2r}}{(\det(A))^n},n$$ ganjil

Selain itu, Aryani [3] membahas mengenai bentuk umum *trace* matriks berbentuk khusus 2×2 berpangkat bilangan bulat positif untuk *n* genap dan *n* ganjil. Matriks yang digunakan adalah$A=[0\ a\ b\ 0\ ],\forall\ a,b\in\ R$. Diperoleh bentuk umum *trace* matriks berbentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif, yaitu:

$$tr(A^n)=\{0\qquad ,n\ ganjil\ (-1)^{\frac{n}{2}}2(det\ det\ (A)\ )^{\frac{n}{2}}\quad ,n\ genap$$

Pada tahun 2018, Aryani [4] kembali lagi membahas mengenai bentuk umum *trace* matriks berbentuk khusus 2×2 berpangkat bilangan bulat negatif untuk *n* ganjil dan *n* genap. Matriks yang digunakan sama dengan Aryani [3] dengan A mempunyai invers. Diperoleh bentuk umum *trace*matriks berbentuk khusus berpangkat bilangan bulat negatif, yaitu:

$$tr(A^{-n})=\{0\qquad ,n\ ganjil\qquad ,n\ genap$$

Penelitian selanjutnya, Aryani [5] dalam artikelnya membahas bentuk umum *trace* matriks berbentuk khusus 3×3 berpangkat bilangan bulat positif. Matriks yang digunakan adalah $A=[1\ 0\ 0\ 0\ a\ a\ 0\ b\ b\ ],\forall\ a,b\in R$, dengan bentuk umum *trace* matriksnya adalah:

$$tr(A^n)=1+(a+b)^n$$

Berdasarkan uraian diatas, penulis kali ini tertarik untuk membahas mengenai *trace* matriks segitiga 5×5 dengan pangkat bilangan bulat. Matriks segitiga yang akan diteliti berbentuk

$$(A_5)=\begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ 0 & a & b & c & d \\ 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix},\forall\ a,b,c,d,e\in R. \qquad (1)$$

$$(B_5)=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 & 0 \\ c & b & a & 0 & 0 \\ d & c & b & a & 0 \\ e & d & c & b & a \end{bmatrix},\forall\ a,b,c,d,e\in R. \qquad (2)$$

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

2. Metode Penelitian

Metode penelitian ini menggunakan metode studi literatur atau kajian pustaka. Akan diberikan beberapa landasan teori yang akan digunakan untuk mendapatkan hasil yang diinginkan. Namun, sebelumnya akan dipaparkan langkah-langkah yang akan dilakukan untuk mendapatkan hasil dari penelitian ini.

1) Diberikan matriks segitiga 5×5 bentuk khusus pada Persamaan (1) dan Persamaan (2).
2) Menentukan perpangkatan masing-masing matriks dari pangkat -10.sampai pangkat 10.
3) Menduga bentuk umum matriks A_5^n dan B_5^n dengan n bilangan bulat.
4) Membuktikan bentuk umum A_5^n dan B_5^n dengan n bilangan bulat menggunakan induksi matematika.
5) Membuktikan bentuk umum $tr\left(A_5^n\right)$ dan $tr\left(B_5^n\right)$ dengan n bilangan bulat menggunakan pembuktian langsung.
6) Mengaplikasikan bentuk umum $tr\left(A_5^n\right)$ dan $tr\left(B_5^n\right)$ dengan n bilangan bulat dalam bentuk contoh soal.

Berikut diberikan beberapa landasan teori pendukung penelitian ini.

Definisi 1 [1] Matriks bujursangkar yang semua entri di atas diagonal utamanya adalah nol disebut matriks segitiga bawah dan matriks bujursangkar yang semua entri dibawah diagonal utamanya adalah nol disebut matriks segitiga atas. Suatu matriks, baik segitiga bawah atau segitiga atas disebut matriks segitiga. Suatu matriks segitiga umum dapat ditulis sebagai berikut.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

, bentuk umum matriks segitiga atas.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

, bentuk umum matriks segitiga bawah.

Definisi 2 [1] Suatu matriks bujursangkar A adalah simetris jika $A = A^t$. Suatu matriks simetris secara umum dapat ditulis sebagai berikut:

$$A_{n\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Definisi 3 [1] Jika A adalah matriks bujursangkar, maka definisi dari pangkat bilangan bulat taknegatif dari A adalah

$A^0 = I$ dan $A^n = \underbrace{AA\cdots A}_{n\ faktor} \quad (n > 0)$

Selanjutnya, jika A dapat dibalik, maka definisi dari pangkat bilangan bulat negatif dari A adalah

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = \underbrace{A^{-1}A^{-1}\ldots A^{-1}}_{n\ faktor}$$

Teorema 1 [1]) Jika A adalah matriks bujursangkar dan r dan s adalah bilangan bulat, maka

a. $A^r A^s = A^{r+s}$

b. $(A^r)^s = A^{rs}$

Definisi 4 [6] Jika A adalah sebuah matriks bujursangkar, maka *trace* dari A, yang dinyatakan sebagai $tr(A)$, didefinisikan sebagai jumlah entri-entri pada diagonal utama A. *Trace* dari A tidak dapat didefinisikan jika A bukan matriks bujursangkar. Suatu *trace* matriks secara umum dapat ditulis sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}$$

Teorema 2 [6] Misalkan $A = \left[a_{ij}\right]$ adalah matriks persegi berukuran $n \times n$, maka *trace* dari A didefinisikan sebagai jumlah dari elemen diagonal A dan dinotasikan sebagai $tr(A)$, yaitu $tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}$. Maka berlaku sifat-sifat berikut:

(i) $tr(A^T) = tr(A)$

(ii) $tr(kA) = k\,tr(A)$

(iii) $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$

dengan k adalah sebarang skalar, sedangkan A dan B adalah matriks berukuran $n \times n$.

Definisi 5 [7] Misalkan p adalah sebuah Proposisi yang didefinisikan pada bilangan bulat positif $N; p(n)$ bisa benar atau salah untuk setiap n dalam N. Anggap mempunyai dua sifat berikut:

(i) $p(1)$ adalah benar.

(ii) $p(n+1)$ bernilai benar bilamana $p(n)$ benar.

Maka p berlaku untuk setiap bilangan bulat positif.

Teorema 3 [1] Jika A adalah matriks segitiga $n \times n$ (segitiga atas, segitiga bawah, atau diagonal) maka $\det(A)$ adalah hasil kali dari entri-entri pada diagonal utama matriks tersebut; yaitu $\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Definisi 6 [1] Jika A adalah matriks $n \times n$ sebarang dan C_{ij} adalah kofaktor dari a_{ij}, maka matriks

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Disebut matriks kofaktor dari A. Transpos dari matriks ini disebut adjoin dari A, dan dinyatakan sebagai $adj(A)$.

Definisi 7 [1] Jika A adalah matriks bujursangkar, dan jika terdapat matriks B yang ukurannya sama sedemikian sehingga $AB = BA = I$, maka A disebut dapat dibalik *(invertible)* dan B disebut sebagai invers *(inverse)* dari A.

Teorema 4 [1] Jika A adalah matriks yang dapat dibalik, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

3. Hasil dan Pembahasan

Hasil penelitian ini diperoleh setelah mengikuti langkah-langkah yang telah dijelaskan pada metode penelitian d atas. Ada tiga bentuk umum yang diperoleh pada hasil penelitian ini.

3.1. Bentuk Umum Perpangkatan Matriks Segitiga 5×5 Dengan Pangkat Bilangan Bulat Positif.

Teorema 4 Diberikan matriks segitiga atas dengan bentuk khusus pada Persamaan (1), maka diperoleh:

$$A_5^n = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1}b & na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 & na^{n-1}d + n(n-1)a^{n-2}bc + \left(\frac{(n-1)^3-(n-1)}{6}\right)a^{n-3}b^3 & \begin{array}{c} na^{n-1}e + n(n-1)a^{n-2}bd + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}c^2 + \left(\frac{(n-1)^3-(n-1)}{2}\right) \\ a^{n-3}b^2c + \left(\frac{(n-2)^4+2(n-2)^3-(n-2)^2-2(n-2)}{24}\right)a^{n-4}b^4 \end{array} \\ 0 & a^n & na^{n-1}b & na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 & na^{n-1}d + n(n-1)a^{n-2}bc + \left(\frac{(n-1)^3-(n-1)}{6}\right)a^{n-3}b^3 \\ 0 & 0 & a^n & na^{n-1}b & na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 \\ 0 & 0 & 0 & a^n & na^{n-1}b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}, \forall n \in Z^+$$

Bukti: Pembuktian menggunakan induksi matematika sebagai berikut.

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Misal:

$$p(n): A_5^{\,n} = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1}b & na^{n-1}c+\frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 & na^{n-1}d+n(n-1)a^{n-2}bc+\left(\frac{(n-1)^3-(n-1)}{6}\right)a^{n-3}b^3 & \begin{array}{c} na^{n-1}e+n(n-1)a^{n-2}bd+\frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}c^2+\left(\frac{(n-1)^3-(n-1)}{2}\right) \\ a^{n-3}b^2c+\left(\frac{(n-2)^4+2(n-2)^3-(n-2)^2-2(n-2)}{24}\right)a^{n-4}b^4 \end{array} \\ 0 & a^n & na^{n-1}b & na^{n-1}c+\frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 & na^{n-1}d+n(n-1)a^{n-2}bc+\left(\frac{(n-1)^3-(n-1)}{6}\right)a^{n-3}b^3 \\ 0 & 0 & a^n & na^{n-1}b & na^{n-1}c+\frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 \\ 0 & 0 & 0 & a^n & na^{n-1}b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}, \forall n \in Z^+$$

1) Akan ditunjukkan $p(1)$ benar, yaitu

$$p(1): A_5^{\,1} = \begin{bmatrix} a^1 & 1a^{1-1}b & 1a^{1-1}c+\frac{1}{2}1(1-1)a^{1-2}b^2 & 1a^{1-1}d+1(1-1)a^{1-2}bc+\left(\frac{(1-1)^3-(1-1)}{6}\right)a^{1-3}b^3 & \begin{array}{c} 1a^{1-1}e+1(1-1)a^{1-2}bd+ \\ \frac{1}{2}1(1-1)a^{1-2}c^2+\left(\frac{(1-1)^3-(1-1)}{2}\right)a^{1-3}b^2c+ \\ \left(\frac{(1-2)^4+2(1-2)^3-(1-2)^2-2(1-2)}{24}\right)a^{1-4}b^4 \end{array} \\ 0 & a^1 & 1a^{1-1}b & 1a^{1-1}c+\frac{1}{2}1(1-1)a^{1-2}b^2 & 1a^{1-1}d+1(1-1)a^{1-2}bc+\left(\frac{(1-1)^3-(1-1)}{6}\right)a^{1-3}b^3 \\ 0 & 0 & a^1 & 1a^{1-1}b & 1a^{1-1}c+\frac{1}{2}1(1-1)a^{1-2}b^2 \\ 0 & 0 & 0 & a^1 & 1a^{1-1}b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^1 \end{bmatrix}$$

$$A_5^{\,1} = \begin{bmatrix} a^1 & 1a^0b & 1a^0c+\frac{1}{2}1(0)a^{-1}b^2 & 1a^0d+1(0)a^{-1}bc+\left(\frac{(0)^3-(0)}{6}\right)a^{-2}b^3 & \begin{array}{c} 1a^0e+1(0)a^{-1}bd+\frac{1}{2}1(0)a^{-1}c^2+\left(\frac{(0)^3-(0)}{2}\right) \\ a^{-2}b^2c+\left(\frac{(-1)^4+2(-1)^3-(-1)^2-2(-1)}{24}\right)a^{-3}b^4 \end{array} \\ 0 & a^1 & 1a^0b & 1a^0c+\frac{1}{2}1(0)a^{-1}b^2 & 1a^0d+1(0)a^{-1}bc+\left(\frac{(0)^3-(0)}{6}\right)a^{-2}b^3 \\ 0 & 0 & a^1 & 1a^0b & 1a^0c+\frac{1}{2}1(0)a^{-1}b^2 \\ 0 & 0 & 0 & a^1 & 1a^0b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^1 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ 0 & a & b & c & d \\ 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

dengan memperhatikan Persamaan (1) maka $p(1)$ benar.

2) Asumsikan $p(k)$ benar, yaitu:

$$p(k): A_5^{\,k} = \begin{bmatrix} a^k & ka^{k-1}b & ka^{k-1}c+\frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}b^2 & ka^{k-1}d+k(k-1)a^{k-2}bc+\left(\frac{(k-1)^3-(k-1)}{6}\right)a^{k-3}b^3 & \begin{matrix} ka^{k-1}e+k(k-1)a^{k-2}bd+\frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}c^2+\left(\frac{(k-1)^3-(k-1)}{2}\right) \\ a^{k-3}b^2c+\left(\frac{(k-2)^4+2(k-2)^3-(k-2)^2-2(k-2)}{24}\right)a^{k-4}b^4 \end{matrix} \\ 0 & a^k & ka^{k-1}b & ka^{k-1}c+\frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}b^2 & ka^{k-1}d+k(k-1)a^{k-2}bc+\left(\frac{(k-1)^3-(k-1)}{6}\right)a^{k-3}b^3 \\ 0 & 0 & a^k & ka^{k-1}b & ka^{k-1}c+\frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}b^2 \\ 0 & 0 & 0 & a^k & ka^{k-1}b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^k \end{bmatrix}, \forall k \in Z^+$$

Akan ditunjukkan $p(k+1)$ juga benar, yaitu:

$$p(k+1): A_5^{\,k+1} = \begin{bmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^k b & (k+1)a^k c+\frac{1}{2}(k+1)k\,a^{k-1}b^2 & (k+1)a^k d+(k+1)k\,a^{k-1}bc+\left(\frac{k^3-k}{6}\right)a^{k-2}b^3 & \begin{matrix} (k+1)a^k e+(k+1)k\,a^{k-1}bd+\frac{1}{2}(k+1)ka^{k-1}c^2+\left(\frac{k^3-k)}{2}\right) \\ a^{k-2}b^2c+\left(\frac{(k-1)^4+2(k-1)^3-(k-1)^2-2(k-1)}{24}\right)a^{k-3}b^4 \end{matrix} \\ 0 & a^{k+1} & (k+1)a^k b & (k+1)a^k c+\frac{1}{2}(k+1)k\,a^{k-1}b^2 & (k+1)a^k d+(k+1)k\,a^{k-1}bc+\left(\frac{k^3-k}{6}\right)a^{k-2}b^{3^3} \\ 0 & 0 & a^{k+1} & (k+1)a^k b & (k+1)a^k c+\frac{1}{2}(k+1)k\,a^{k-1}b^2 \\ 0 & 0 & 0 & a^{k+1} & (k+1)a^k b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^{k+1} \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa:

$$A^{k+1} = A^k\ A$$

$$= \begin{bmatrix} a^k & ka^{k-1}b & ka^{k-1}c+\frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}b^2 & ka^{k-1}d+k(k-1)a^{k-2}bc+\left(\frac{(k-1)^3-(k-1)}{6}\right)a^{k-3}b^3 & \begin{matrix} ka^{k-1}e+k(k-1)a^{k-2}bd+\frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}c^2+\left(\frac{(k-1)^3-(k-1)}{2}\right) \\ a^{k-3}b^2c+\left(\frac{(k-2)^4+2(k-2)^3-(k-2)^2-2(k-2)}{24}\right)a^{k-4}b^4 \end{matrix} \\ 0 & a^k & ka^{k-1}b & ka^{k-1}c+\frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}b^2 & ka^{k-1}d+k(k-1)a^{k-2}bc+\left(\frac{(k-1)^3-(k-1)}{6}\right)a^{k-3}b^3 \\ 0 & 0 & a^k & ka^{k-1}b & ka^{k-1}c+\frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}b^2 \\ 0 & 0 & 0 & a^k & ka^{k-1}b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ 0 & a & b & c & d \\ 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^k b & (k+1)a^k c+\frac{1}{2}(k+1)k\,a^{k-1}b^2 & (k+1)a^k d+(k+1)k\,a^{k-1}bc+\left(\frac{k^3-k}{6}\right)a^{k-2}b^3 & \begin{matrix} (k+1)a^k e+(k+1)k\,a^{k-1}bd+\frac{1}{2}(k+1)ka^{k-1}c^2+\left(\frac{k^3-k)}{2}\right)a^{k-2}b^2c+ \\ \left(\frac{(k-1)^4+2(k-1)^3-(k-1)^2-2(k-1)}{24}\right)a^{k-3}b^4 \end{matrix} \\ 0 & a^{k+1} & (k+1)a^k b & (k+1)a^k c+\frac{1}{2}(k+1)k\,a^{k-1}b^2 & (k+1)a^k d+(k+1)k\,a^{k-1}bc+\left(\frac{k^3-k}{6}\right)a^{k-2}b^3 \\ 0 & 0 & a^{k+1} & (k+1)a^k b & (k+1)a^k c+\frac{1}{2}(k+1)k\,a^{k-1}b^2 \\ 0 & 0 & 0 & a^{k+1} & (k+1)a^k b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^{k+1} \end{bmatrix}$$

dengan memperhatikan Persamaan $p(k+1)$ maka Teorema 4 terbukti.

Teorema 5 Diberikan matriks segitiga bawah dengan bentuk khusus pada Persamaan (2), maka diperoleh:

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$B_5^{\,n}=\begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 & 0 & 0\\ na^{n-1}b & a^n & 0 & 0 & 0\\ na^{n-1}c+\frac{1}{2}n(n-1)\,a^{n-2}b^2 & na^{n-1}b & a^n & 0 & 0\\ na^{n-1}d+n(n-1)\,a^{n-2}bc+\left(\frac{(n-1)^3-(n-1)}{6}\right)a^{n-3}b^3 & na^{n-1}c+\frac{1}{2}n(n-1)\,a^{n-2}b^2 & na^{n-1}b & a^n & 0\\ \begin{matrix} na^{n-1}e+n(n-1)\,a^{n-2}bd+\frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}c^2+\left(\frac{(n-1)^3-(n-1)}{2}\right)\\ a^{n-3}b^2c+\left(\frac{(n-2)^4+2(n-2)^3-(n-2)^2-2(n-2)}{24}\right)a^{n-4}b^4\end{matrix} & na^{n-1}d+n(n-1)\,a^{n-2}bc+\left(\frac{(n-1)^3-(n-1)}{6}\right)a^{n-3}b^3 & na^{n-1}c+\frac{1}{2}n(n-1)\,a^{n-2}b^2 & na^{n-1}b & a^n \end{bmatrix},\forall\, n\in Z^+$$

Bukti: Pembuktian untuk Teorema 5 ini sama perlakuannya dengan Teorema 4.

3.2. Bentuk Umum Perpangkatan Matriks Segitiga 5×5 Dengan Pangkat Bilangan Bulat Negatif

Teorema 6 Diberikan matriks segitiga atas pada Persamaan (1), maka diperoleh:

$$A_5^{-n}=\begin{bmatrix} \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{-nca+\frac{1}{2}n(n+1)b^2}{a^{n+2}} & \frac{-nda^2+n(n+1)abc-\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)b^3}{a^{n+3}} & \frac{-nea^3+n(n+1)a^2bd+\frac{1}{2}n(n+1)c^2a^2-\frac{1}{2}n(n+1)(n+2)acb^2+\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3)b^4}{a^{n+4}}\\ 0 & \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{-nca+\frac{1}{2}n(n+1)b^2}{a^{n+2}} & \frac{-nda^2+n(n+1)abc-\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)b^3}{a^{n+3}}\\ 0 & 0 & \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{-nca+\frac{1}{2}n(n+1)b^2}{a^{n+2}}\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^n} \end{bmatrix}$$

Bukti: Pembuktian menggunakan aturan invers yaitu: $A_5^{\,n}\,A_5^{-n}=A_5^{-n}\,A_5^{\,n}=I$

Untuk membuktikan teorema tersebut maka diperlukan $A_5^{\,n}$ dengan n bilangan bulat positif. Hal tersebut sudah ada pada Teorema 4.

Maka akan ditunjukkan $A_5^{\,n}\,A_5^{-n}=I$, yaitu:

$$A_5^{\,n}A_5^{-n}=\begin{bmatrix} a^n & na^{n-1}b & na^{n-1}c+\frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 & na^{n-1}d+n(n-1)a^{n-2}bc+\frac{1}{6}\left((n-1)^3-(n-1)\right)a^{n-3}b^3 & \begin{matrix} na^{n-1}e+n(n-1)a^{n-2}bd+\frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}c^2+\frac{1}{2}\left((n-1)^3-(n-1)\right)a^{n-3}b^2c\\ +\frac{1}{24}\left((n-2)^4+2(n-2)^3-(n-2)^2-2(n-2)\right)a^{n-4}b^4\end{matrix}\\ 0 & a^n & na^{n-1}b & na^{n-1}c+\frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 & na^{n-1}d+n(n-1)a^{n-2}bc+\frac{1}{6}\left((n-1)^3-(n-1)\right)a^{n-3}b^3\\ 0 & 0 & a^n & na^{n-1}b & na^{n-1}c+\frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2\\ 0 & 0 & 0 & a^n & na^{n-1}b\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{-nca+\frac{1}{2}n(n+1)b^2}{a^{n+2}} & \frac{-nda^2+n(n+1)abc-\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)b^3}{a^{n+3}} & \frac{-nea^3+n(n+1)a^2bd+\frac{1}{2}n(n+1)c^2a^2-\frac{1}{2}n(n+1)(n+2)acb^2+\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3)b^4}{a^{n+4}}\\ 0 & \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{-nca+\frac{1}{2}n(n+1)b^2}{a^{n+2}} & \frac{-nda^2+n(n+1)abc-\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)b^3}{a^{n+3}}\\ 0 & 0 & \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{-nca+\frac{1}{2}n(n+1)b^2}{a^{n+2}}\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^n} & \frac{-nb}{a^{n+1}}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^n} \end{bmatrix}$$

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Misalkan

$$A_5^{\,n}\,A_5^{\,-n}=\begin{bmatrix} i_{11} & i_{12} & i_{13} & i_{14} & i_{15}\\ i_{21} & i_{22} & i_{23} & i_{24} & i_{25}\\ i_{31} & i_{32} & i_{33} & i_{34} & i_{35}\\ i_{41} & i_{42} & i_{43} & i_{44} & i_{45}\\ i_{51} & i_{52} & i_{53} & i_{54} & i_{55}\end{bmatrix}$$

Sehingga

$$i_{11}=a^n\,\frac{1}{a^n}$$
$$=1$$

$$i_{12}=\frac{a^n(-nb)}{a^{n+1}}+\frac{na^{n-1}b}{a^n}=-\frac{a^n nb}{a^n a}+\frac{a^n a^{-1}nb}{a^n}=-\frac{nb}{a}+\frac{nb}{a}=0$$

$$i_{13}=\frac{\left(-nca+\frac{1}{2}n(n+1)b^2\right)a^n}{a^{n+2}}+\frac{na^{n-1}b(-nb)}{a^{n+1}}+\frac{na^{n-1}c+\frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2}{a^n}=0$$

$$i_{14}=\frac{a^n\left(-n\,d\,a^2+n\,(n+1)abc-\frac{1}{6}n\,(n+1)(n+2)b^3\right)}{a^{n+3}}+\frac{na^{n-1}b\left(-n\,ca+\frac{1}{2}n\,(n+1)b^2\right)}{a^{n+2}}+\frac{\left(na^{n-1}c+\frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2\right)(-n\,b)}{a^{n+1}}$$
$$+\frac{na^{n-1}d+n(n-1)a^{n-2}bc+\frac{1}{6}\left[(n-1)^3-(n-1)\right]a^{n-3}b^3}{a^n}=0$$

$$i_{15}=\frac{a^n\left(-n\;e\,a^3+n\;(n+1)\,a^2bd+\frac{1}{2}n\;(n+1)c^2a^2-\frac{1}{2}n\,(n+1)(n+2)\,a\,c\,b^2+\frac{1}{24}n\,(n+1)(n+2)(n+3)\,b^4\right)}{a^{n+4}}$$
$$+\frac{na^{n-1}b\left(-n\,d\,a^2+n\,(n+1)\,abc-\frac{1}{6}n\,(n+1)(n+2)b^3\right)}{a^{n+3}}+\frac{na^{n-1}c+\frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2\left(-n\,ca+\frac{1}{2}n\,(n+1)b^2\right)}{a^{n+2}}$$
$$+\frac{\left(na^{n-1}d+n(n-1)a^{n-2}bc+\frac{1}{6}\left[(n-1)^3-(n-1)\right]a^{n-3}b^3\right)(-n\,b)}{a^{n+1}}+\frac{na^{n-1}e+n(n-1)a^{n-2}bd+\frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}c^2+\frac{1}{2}\left[(n-1)^3-(n-1)\right]a^{n-3}b^2c}{a^n}=0$$

$i_{21}=0$, $i_{22}=a^n\,\dfrac{1}{a^n}=1$

$$i_{23}=\frac{a^n(-nb)}{a^{n+1}}+\frac{na^{n-1}b}{a^n}=-\frac{a^n nb}{a^n a}+\frac{a^n a^{-1}nb}{a^n}=-\frac{nb}{a}+\frac{nb}{a}=0$$

$$i_{24}=\frac{a^n\left(-nca+\frac{1}{2}n(n+1)b^2\right)}{a^{n+2}}+\frac{na^{n-1}b(-nb)}{a^{n+1}}+\frac{na^{n-1}c+\frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2}{a^n}=0$$

$$i_{25}=\frac{a^n\left(-n\,d\,a^2+n\,(n+1)abc-\frac{1}{6}n\,(n+1)(n+2)b^3\right)}{a^{n+3}}+\frac{na^{n-1}b\left(-n\,ca+\frac{1}{2}n\,(n+1)b^2\right)}{a^{n+2}}+\frac{\left(na^{n-1}c+\frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2\right)(-n\,b)}{a^{n+1}}+\frac{na^{n-1}d+n(n-1)a^{n-2}bc+\frac{1}{6}\left[(n-1)^3-(n-1)\right]a^{n-3}b^3}{a^n}$$
$$=0$$

$i_{31}=0$, $i_{32}=\dfrac{a^n(-nb)}{a^{n+1}}+\dfrac{na^{n-1}b}{a^n}=-\dfrac{a^n nb}{a^n a}+\dfrac{a^n a^{-1}nb}{a^n}=-\dfrac{nb}{a}+\dfrac{nb}{a}=0$

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$i_{33} = a^n \frac{1}{a^n} = 1$$

$$i_{34} = \frac{a^n(-nb)}{a^{n+1}} + \frac{na^{n-1}b}{a^n} = -\frac{a^n nb}{a^n a} + \frac{a^n a^{-1} nb}{a^n} = -\frac{nb}{a} + \frac{nb}{a} = 0$$

$$i_{35} = \frac{a^n\left(-nca + \frac{1}{2}n(n+1)b^2\right)}{a^{n+2}} + \frac{na^{n-1}b(-nb)}{a^{n+1}} + \frac{na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2}{a^n} = 0$$

$i_{41} = 0$, $i_{42} = 0$, $i_{43} = 0$, $i_{44} = a^n \frac{1}{a^n} = 1$

$$i_{45} = \frac{a^n(-nb)}{a^{n+1}} + \frac{na^{n-1}b}{a^n} = -\frac{a^n nb}{a^n a} + \frac{a^n a^{-1} nb}{a^n} = -\frac{nb}{a} + \frac{nb}{a} = 0$$

$i_{51} = 0$, $i_{52} = 0$, $i_{53} = 0$, $i_{54} = 0$, $i_{55} = a^n \frac{1}{a^n} = 1$

Berdasarkan hasil perkalian matriks tersebut maka dapat ditulis sebagai berikut:

$$A_5^{\,n} A_5^{\,-n} = \begin{bmatrix} i_{11} & i_{12} & i_{13} & i_{14} & i_{15} \\ i_{21} & i_{22} & i_{23} & i_{24} & i_{25} \\ i_{31} & i_{32} & i_{33} & i_{34} & i_{35} \\ i_{41} & i_{42} & i_{43} & i_{44} & i_{45} \\ i_{51} & i_{52} & i_{53} & i_{54} & i_{55} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Hal yang sama berlaku juga untuk $A_5^{\,-n}\ A_5^{\,n} = I$. Berdasarkan pembuktian tersebut maka Teorema 6 terbukti. ■

Teorema 7 Diberikan matriks segitiga bawah pada Persamaan (2), maka diperoleh:

$$B_5^{-n} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^n} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{1}{a^n} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-nca + \frac{1}{2}n(n+1)b^2}{a^{n+2}} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{1}{a^n} & 0 & 0 \\ \frac{-nda^2 + n(n+1)abc - \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)b^3}{a^{n+3}} & \frac{-nca + \frac{1}{2}n(n+1)b^2}{a^{n+2}} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{1}{a^n} & 0 \\ \frac{-nea^3 + n(n+1)a^2bd + \frac{1}{2}n(n+1)c^2a^2 - \frac{1}{2}n(n+1)(n+2)acb^2 + \frac{1}{24}n(n+1)(n+3)b^4}{a^{n+4}} & \frac{-nda^2 + n(n+1)abc - \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)b^3}{a^{n+3}} & \frac{-nca + \frac{1}{2}n(n+1)b^2}{a^{n+2}} & \frac{-nb}{a^{n+1}} & \frac{1}{a^n} \end{bmatrix}$$

Bukti: Pembuktian dilakukan dengan cara yang sama pada Teorema 6 di atas, maka Teorema 7 terbukti.

3.3. *Trace* Matriks Segitiga 5×5 Berpangkat Bilangan Bulat

Teorema 8 Diberikan matriks segitiga (atas dan bawah) pada Persamaan (1) dan Persamaan (2), maka diperoleh:

a. *Trace* matriks segitiga (atas dan bawah) pada Persamaan (1) dan Persamaan (2), berpangkat bilapan bulat positif, yaitu:

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

a. $tr(A_5^{\,n}) = 5(a^n)\ , \forall n \in Z^+$

b. *Trace* matriks segitiga (atas dan bawah) pada Persamaan (1) dan Persamaan (2), berpangkat bilapan bulat negatif, yaitu:

c. $tr(A_5^{\,-n}) = 5\left(\dfrac{1}{a^n}\right)$

Bukti:

a. *Trace* matriks segitiga (atas dan bawah) pada Persamaan (1) dan Persamaan (2), berpangkat bilapan bulat positif, Berdasarkan Teorema 4, Teorema 5 diketahui bahwa entri-entri pada diagonal utamanya bernilai sama yaitu a^n dan berdasarkan definisi *trace* matriks, maka diperoleh:

$$tr(A_5^{\,n}) = a^n + a^n + a^n + a^n + a^n = 5(a^n)$$

b. *Trace* matriks segitiga (atas dan bawah) pada Persamaan (1) dan Persamaan (2), berpangkat bilapan bulat positif, Berdasarkan Teorema 6, Teorema 7 diketahui bahwa entri-entri pada diagonal utamanya bernilai sama yaitu $\dfrac{1}{a^n}$ dan berdasarkan definisi *trace* matriks, maka diperoleh:

$$tr(A_5^{\,n}) = \frac{1}{a^n} + \frac{1}{a^n} + \frac{1}{a^n} + \frac{1}{a^n} + \frac{1}{a^n} = 5\left(\frac{1}{a^n}\right)$$

Teorema 8 terbukti ▪

3.4 Aplikasi *trace* Matriks Segitiga 5×5 Berpangkat Bilangan Bulat

Contoh 1 Diberikankan matriks $A_5 = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 & 12 \\ 0 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Hitunglah matriks $A_5^{\,6}$ dan $tr(A_5^{\,6})$.

Penyelesaian:

Dengan menggunakan Teorema 4 maka

$$A_5^{\,6} = \begin{bmatrix} 729 & 7.290 & 40.581 & 165.672 & 554.256 \\ 0 & 729 & 7.290 & 40.581 & 165.672 \\ 0 & 0 & 729 & 7.290 & 40.581 \\ 0 & 0 & 0 & 729 & 7.290 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 729 \end{bmatrix}$$

Dan dengan menggunakan Teorema 5 diperoleh:

$tr(A_5^{\,6}) = 5(729) = 3.645$

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Contoh 2 Diberikan matriks $B_5 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ -11 & -9 & -4 & 0 & 0 \\ -13 & -11 & -9 & -4 & 0 \\ -5 & -13 & -11 & -9 & -4 \end{bmatrix}$. Hitunglah matriks ${B_5}^9$ dan $tr({B_5}^9)$

Penyelesaian:

Dengan menggunakan Teorema 4 maka:

$$ {B_5}^9 = \begin{bmatrix} -262.144 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5.308.416 & -262.144 & 0 & 0 & 0 \\ -54.263.808 & -5.308.416 & -262.144 & 0 & 0 \\ -375.275.520 & -54.263.808 & -5.308.416 & -262.144 & 0 \\ -1.978.546.176 & -375.275.520 & -54.263.808 & -5.308.416 & -262.144 \end{bmatrix} $$

Dan menggunakan Teorema 5 diperoleh:

$$ tr({B_5}^9) \;= 5(-262.144) = -1.310.720 $$

Contoh 3 Diberikan Matriks $A_5 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ dengan menggunakan Teorema 6, maka

$$ = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{-9}{16} & \frac{24}{32} & \frac{18}{64} & \frac{-181}{128} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{-9}{16} & \frac{24}{32} & \frac{18}{64} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{-9}{16} & \frac{24}{32} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{-9}{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix} $$

Dan dengan menggunakan Teorema 7 diperoleh:

$$ tr({A_5}^{-3}) = 5\frac{1}{\left(\frac{1}{8}\right)^3} $$
$$ = 2.560 $$

Contoh 4 Diberikan Matriks $B_5 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -3 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 3 & -3 & 0 \\ 2 & -5 & 4 & 3 & -3 \end{bmatrix}$. Dengan menggunakan Teorema 6, maka

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$=\begin{bmatrix} \frac{1}{27} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{6}{81} & \frac{1}{27} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{21`}{243} & -\frac{6}{81} & \frac{1}{27} & 0 & 0 \\ \frac{172}{729} & -\frac{21`}{243} & -\frac{6}{81} & \frac{1}{27} & 0 \\ \frac{897}{2.187} & \frac{172}{729} & -\frac{21`}{243} & -\frac{6}{81} & \frac{1}{27} \end{bmatrix}$$

Dan dengan menggunakan Teorema 7 diperoleh:

$$tr(B_5{}^{-3}) = 5\frac{1}{\left(\frac{1}{27}\right)^3}$$
$$= 98.415$$

4. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dijelaskan di atas, maka terdapat teorema-teorema yang menjadi kesimpulan dari hasil yang diperoleh. Jika diberikan matriks segitiga (atas dan bawah) pada Persamaan (1) dan (2), maka diperoleh:

a. Bentuk Umum Perpangkatan Matriks Segitiga 5×5 Berpangkat Bilangan Bulat Positif, terdapat pada Teorema 4 dan Teorema 5.
b. Bentuk Umum Perpangkatan Matriks Segitiga 5×5 Berpangkat Bilangan Bulat Negatif, terdapat pada Teorema 6 dan Teorema 7.
c. Bentuk Umum *Trace* Matriks Segitiga 5×5 Berpangkat Bilangan Bulat terdapat pada Teorema 8.

Daftar Pustaka

[1] Anton H, Rorres C. Dasar-Dasar Aljabar inear Versi Aplikasi. Edisi Ketujuh. Jakarta: Erlangga. 2004.
[2] Aryani F, Solihin M. Trace Matriks Real Berpangkat Bilangan Bula Negatif. *Jurnal Sains Matematika dan Statistik.* 2017; 3 (2).
[3] Aryani F, Fatonah T . *Trace Matriks Berbentuk Khusus* 2×2 *Berpangkat Bilangan Bulat Positif*, Prosiding Semirata Medan. 2018.
[4] Aryani F, Yulianis. Trace Matriks Berbentuk Khusus 2×2 Berpangkat Bilangan Bulat Negatif, *Jurnal Sains Matematika dan Statistika.* 2018; 4 (2).
[5] Aryani F, Andesta R. TraceMatriks Berbentuk Khusus 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif, *Jurnal Sains Matematika dan Statistika.* 2020; 6 (1).
[6] Gentle JE, *Matrix Algebra*. New York: Springer. 2007.
[7] Lipschutz S, Marc L. *Matematika Diskrit*. Jakarta: Salemba Teknika. 2001.
[8] Pahade J, Jha M. Trace of Positive Integer Power of Real 2×2 matrices. In: Advancesin Linear Algebra & Matrix Theory. 2015: 150-155.