ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Trace **Matriks Ketetanggaan $\boldsymbol{n \times n}$ Berpangkat $\boldsymbol{m = -2, -3, -4}$**

Fitri Aryani [1], Aulia Arjuna Nugraha [2], Muhammad Faisal [3], Helsivianingsih [4], Corry Corazon Marzuki [5]
[1,2,3,4,5]Prodi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
e-mail: [1]khodijah_fitri@uin-suska.ac.id, [2]auliaarjuna237@gmail.com, [4]helsivianingsih27@gmail.com, [5]corry@ui-suska.ac.id

Abstrak

Jumlah dari elemen-elemen diagonal utama dari matriks bujursangkar disebut trace matriks. Penelitian ini bertujuan untuk mendapatkan bentuk umum trace matriks berpangkat negatif dua, negatif tiga, dan negatif empat, dengan matriks yang digunakan adalah matriks ketetanggaan $n \times n$ dari graf lengkap, yakni matriks yang diperoleh dari hasil representasi suatu graf lengkap. Dengan mendapatkan rumus umum perpangkatan matriks ketetanggan $n \times n$ dari graf lengkap terlebih dahulu maka diperoleh trace matriks ketetanggaan $n \times n$ dari graf lengkap tersebut dengan menggunakan definisi trace matriks. Lebih lanjut contoh diberikan untuk melihat aplikasi rumus yang diperoleh.

Kata kunci: *graf lengkap, matriks ketetanggaan, perpangkatan matriks, trace matriks*

Abstract

The sum of the main diagonal elements of the square matrix is called the trace matrix. This study aims to obtain the general form of trace matrices to the power of negative two, three, and four, with the matrix used is the n × n adjacency matrix from the complete graph. By obtaining the general form for the power nxn adjacency matrix from complete graphs first, then we obtain trace of power of nxn adjacency matriks from the complete graph using trace matrix definition. The application is also given in the form of an example problem.

Keywords*: complete graph, adjacency matrix, trace.*

1. Pendahuluan

Trace matriks dapat ditentukan dengan menjumlahkan elemen-elemen pada diagonal utama pada matriks bujursangkar. Permasalahan pada artikel ini adalah bagaimana menentukan *trace* matriks ketetanggaan $n \times n$ dari graf lengkap berpangkat negatif dua, tiga dan empat. Bentuk matriks ketetanggaan $n \times n$ dari graf lengkap yang dibahas pada artikel ini adalah:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Penghitungan *trace* matriks berpangkat telah banyak diteliti. Datta [7] telah melakukan penelitian mengenai *trace* matriks berpangkat dan mendapatkan hasil algoritma penghitungan *trace* matriks berpangkat $Tr(A^k)$, dengan k adalah bilangan bulat dengan A adalah matriks Hassenberg dengan unit *codiagonal*. Penelitian selanjutnya Chu. Mt [6] mendapatkan hasil penelitian mengenai penghitungan kalkulasi simbolik pada *trace* matriks tridiagonal yang berpangkat. Pan.V [12] pada artikelnya mendapatkan hasil mengenai bagaimana menentukan nilai eigen suatu matriks simetris, juga memberikan prosedur dasar dalam mengestimasi *trace* (A^n)dan (A^{-n}) dengan n adalah bilangan bulat. Pada teori bilangan dan kombinatorik, Zarelua [13] mendapatkan hasil penelitian mengenai *trace* matriks berpangkat bilangan bulat berhubungan dengan kekongruenan Euler, yaitu:

$$Tr(Ap^r) = Tr(Ap^{r-1}) \; mod \; (p^r)$$

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

untuk semua matriks A bilangan bulat, p adalah bilangan prima dan r adalah bilangan bulat. Makalah tersebut juga membahas mengenai invariant pada sistem dinamik yang digambarkan sebagai bentuk *trace* matriks berpangkat bilangan bulat. Contoh yang diberikan pada makalah tersebut adalah bilangan Lefschetz.

Pada bidang analisis jaringan tepatnya pada *triangle counting in a graph*, menurut Avron [4] ketika menganalisa suatu jaringan yang kompleks, masalah terpenting yaitu menghitung bilangan total segitiga pada graf sederhana terhubung. Bilangan tersebut sama dengan $Tr(A^3)/6$, dengan A adalah matriks ketetanggaan pada graf. Menurut Brezinski [5], *trace* dari matriks berpangkat sering dibahas pada beberapa bidang matematika, seperti Analisis Jaringan, Teori Bilangan, Sistem Dinamik, Teori Matriks dan Persamaan Diferensial.

Pahade [10], telah mendapatkan bentuk umum *trace* matriks $2\,x\,2$ berpangkat bilangan bulat positif. Penelitian tersebut menggunakan matriks real dengan bentuk sebagai berikut :

$$A_{2x2} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},\ \forall\, a,b,c,d\ \in R \tag{2}$$

Langkah pertama yang harus dilakukan untuk menentukan *trace* dari matriks berpangkat adalah mengalikan matriks tersebut sebanyak pangkatnya. Langkah kedua, jumlahkan elemen diagonal utama dari perpangkatan matriks tersebut. Namun, dengan menggunakan persamaan bentuk umum *trace* matriks yang telah diperoleh maka tidak perlu lagi proses yang panjang dan rumit, cukup mensubstitusikan entri-entri matriks kedalam bentuk umum yang diperoleh, maka dengan cepat dapat ditentukan *trace* matriksnya. Hal tersebutlah yang dilakukan oleh Pahade [6] dan hasil yang diperoleh adalah bentuk umum *trace* matriks real 2 × 2 berpangkat bilangan bulat positif yaitu:

$$tr(A^n) = \sum_{r=0}^{n/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)] \ldots \left[n-\left(r+(r-1)\right)\right](\det(A))^r \left(tr(A)\right)^{n-2r}\ ,\quad n \text{ genap}$$

$$tr(A^n) = \sum_{r=0}^{n-1/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)] \ldots \left[n-\left(r+(r-1)\right)\right](\det(A))^r \left(tr(A)\right)^{n-2r},\ n \text{ ganjil}$$

Aryani [2] telah mendapatkan bentuk umum *trace* matriks real $2\,x\,2$ berpangkat bilangan bulat negatif dengan menggunakan bentuk matriks yang sama pada Persamaan (2) yang ditulis oleh Pahade [6]. Bentuk umum *trace* matriks $2\,x\,2$ real berpangkat bilangan bulat negatif untuk n genap, yaitu :

$$tr(A^{-n}) = \frac{\sum_{r=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)] \ldots \left[n-\left(r+(r-1)\right)\right](\det(A))^r \left(tr(A)\right)^{n-2r}}{(\det(A))^n}$$

dan untuk n ganjl, yaitu :

$$tr(A^{-n}) = \frac{\sum_{r=0}^{n-\frac{1}{2}} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)] \ldots \left[n-\left(r+(r-1)\right)\right](\det(A))^r \left(tr(A)\right)^{n-2r}}{(\det(A))^n}$$

Pahade [11] kembali lagi membahas mengenai *trace* matriks berpangkat bilangan bulat positif. Kali ini matriks yang digunakan adalah matriks ketetanggan dari graf lengkap yang sama dengan Persamaan (1). Adapaun hasil yang diperoleh pada penelitian tersebut yaitu :

$$tr(A)^k = \sum_{r=1}^{n/2} s(k,r) n(n-1)^r (n-2)^{k-2r},\qquad n \text{ genap}$$

dan

$$tr(A)^k = \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} s(k,r) n(n-1)^r (n-2)^{k-2r},\quad n \text{ ganjil.}$$

Dengan

$$S(k,1) = 1, S\left(k,\frac{k}{2}\right) = 1, S\left(k,\frac{k-1}{2}\right) = \frac{k-1}{2},$$

dan

$$S(k,r) = 1, S\left(k,\frac{k}{2}\right) = S(k-1,r) + S(k-2,r-1).$$

Aryani [3] juga melakukan penelitian mengenai *trace* matriks berpangkat bilangan bulat negatif dan matriks yang digunakan pada penelitian tersebut adalah matriks bentuk khusus $2\,x\,2$, yang berbentuk sebagai berikut:

$$A_{2x2} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix},\ \forall\, a,b\ \in R, \tag{3}$$

dan bentuk umum *trace* matriksnya adalah:

$$tr(A^{-n}) = \begin{cases} 0 & ,\quad \textit{untuk } n \textit{ ganjil} \\ \dfrac{2}{(ab)^{\frac{n}{2}}}, & \quad \textit{untuk } n \textit{ genap} \end{cases}$$

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Penelitian kali ini berhubungan dengan matriks ketetanggaan dari graf lengkap pada Persamaan (1). Berdasarkan matriks tersebut, akan ditentukan *trace* matriks berpangkat bilangan bulat negatif dua, tiga, dan empat, artinya artikel ini melanjutkan penelitian Pahade [11].

2. Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan studi literatur atau kajian pustaka. Sebelum diberikan beberapa kajian pustaka yang diperlukan pada penelitian ini, maka berikut dipaparkan langkah-langkah pada penelitian ini.

1) Diberikan matriks ketetanggaan dari graf lengkap A_n pada Persamaan (1)
2) Membuktikan perpangkatan dua, tiga, dan empat pada matriks ketetanggan dari graf lengkap.
3) Menentukan perpangkatan matriks ketetanggan dari graf lengkap berpangkat negatif dua, tiga, dan empat dari ordo 2 sampai ordo 11.
4) Menduga bentuk umum $(A_n)^{-2}$, $(A_n)^{-3}$, dan $(A_n)^{-4}$.
5) Membuktikan perpangkatan matriks ketetanggaan dari graf lengkap berpangkat negatif dua menggunakan aturan $(A_n)^2(A_n)^{-2} = I = (A_n)^{-2}(A_n)^2$, $(A_n)^3(A_n)^{-3} = I = (A_n)^{-3}(A_n)^3$, dan $(A_n)^4(A_n)^{-4} = I = (A_n)^{-4}(A_n)^4$.
6) Membuktikan bentuk umum $(A_n)^{-2}$, $tr\,(A_n)^{-3}$, dan $tr\,(A_n)^{-4}$ dari graf lengkap dengan pembuktian langsung.
7) Mengaplikasikan bentuk umum perpangkatan matriks $(A_n)^{-2}$, $(A_n)^{-3}$, $(A_n)^{-4}$ dan $tr(A_n)^{-2}$, $tr(A_n)^{-3}$, $tr(A_n)^{-4}$.

Beberapa kajian pustaka yang diperlukan pada penelitian ini.

Definisi 1 [8] Misalkan $A = [a_{ij}]$ suatu matriks persegi berukuran $n \times n$, maka *trace* dari matriks A didefinisikan sebagai jumlah dari elemen diagonal matriks A dan dinotasikan dengan $tr(A)$. Dinyatakan bahwa *trace* matriks A adalah:

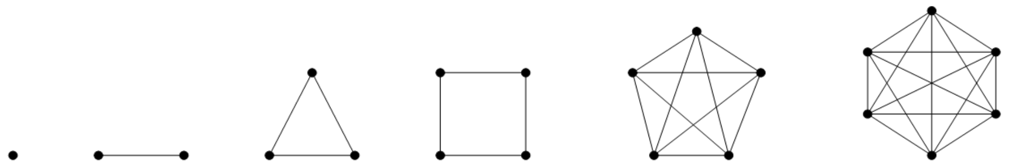
$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}$$

Teorema 1 [8] Jika A dan B adalah matriks bujursangkar dengan orde yang sama dan c adalah skalar, maka berlaku:

1. $tr(A) = tr(A^T)$
2. $tr(cA) = ctr(A)$
3. $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$
4. $tr(AB) = tr(BA)$

Definisi 2 [9] Graf G didefenisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) ditulis dengan notasi $G = (V, E)$, yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak kosong dari simpul-simpul dan E adalah himpunan sisi yang menghubungkan sepasang simpul.

Definisi 3 [9] Graf lengkap merupakan graf sederhana yang setiap simpulnya mempunyai sisi ke semua simpullainnya. Graf lengkap dengan n buah simpul dilambangkan dengan K_n. Jumlah sisi pada graf lengkap yang terdiri dari n buah simpul adalah $n(n-1))/2$.

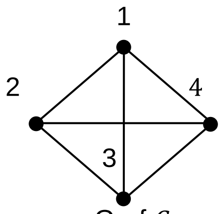


K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6

Definisi 4 [9] Matriks ketetanggaan adalah matriks yang berukuran $n \times n$. Bila matriks tersebut dinamakan $A = [a_{ij}]$, maka $a_{ij} = 1$, jika simpul i dan j bertetanggaan, sebaliknya $a_{ij} = 0$, jika simpul i dan $j$tidak bertetangga.

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

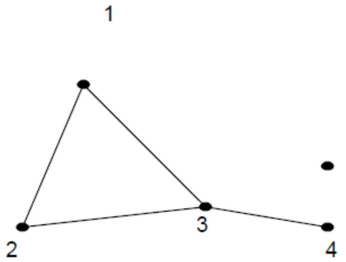
Matriks Ketetanggaan dari graf G_1



$$\rightarrow \qquad A = \begin{bmatrix} 0111 \\ 1011 \\ 1101 \\ 1110 \end{bmatrix}$$

Graf G_1

Matriks Ketetanggan dari Graf G_2



$$\rightarrow \qquad A = \begin{bmatrix} 01100 \\ 10100 \\ 11010 \\ 00100 \\ 00000 \end{bmatrix}$$

Graf G_2

Definisi 5 [1] Jika A adalah matriks bujursangkar, maka pangkat bilangan bulat tak negatif dari A didefinisikan sebagai:

$$A^0 = 1 \qquad A^n = \underbrace{AAA...A}_{n \ faktor} \qquad (n > 0).$$

Akan tetapi, jika A dapat dibalik, maka kita mendefinisikan pangkat bilangan bulat negatif menjadi

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = \underbrace{A^{-1}A^{-1}...A^{-1}}_{n \ faktor} \qquad (n > 0).$$

Definisi 6 [1] Jika *A* adalah suatu matriks bujursangkar, maka minor dari entri a_{ij} dinyatakan sebagai M_{ij} dan didefinisikan sebagai determinan dari submatriks yang tersisa setelah baris ke-*i* dan kolom ke-*j* dihilangkan dari *A*. bilangan$(-1)^{i+j}M_{ij}$ dinyatakan sebagai C_{ij} dan disebut sebagai kofaktor dari entri a_{ij}.

Definisi 7 [1]Jika$A$ adalah matriks $n \times n$ sebarang dan C_{ij} adalah kofaktor dari a_{ij}, maka matriks

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & & C_{21} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{33} \end{bmatrix}$$

Disebut matriks kofaktor dari A. Tranpose dari matriks ini disebut adjoin dari A dan dinyatakan sebagai $adj(A)$.

Teorema 2 [1] Jika A adalah suatu matriks yang dapat dibalik, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A).$$

Teorema 3 [11] Misalkan A adalah matriks ketetanggaan simetris dari graf lengkap dengan n sisi, maka

$trA^k = \sum_{r=1}^{n/2} s(k,r)n(n-1)^r(n-2)^{k-2r}$, unutk k bilangan ganjil.

dan

$trA^k = \sum_{r=1}^{n-1/2} s(k,r)n(n-1)^r(n-2)^{k-2r}$,unutk k bilangan genap.

Dengan$S(k,r)$ yang didefinisikan sebagai berikut.

$S(k,r) = 1$, $S(k,k/2) = 1$, $S(k,(k-1)/2) = \frac{k-1}{2}$, dan $S(k,r) = S(k-1,r) + S(k-2,r-1) = 1$.

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

3. Hasil dan Pembahasan

Hasil penelitian ini diperoleh berdasarkan langkah-langkah yang berikan pada metode penelitian di atas. Dan hasilnya ada tiga bentuk. Pertama, didapatkan bentuk umum matriks ketetanggaan dari graf lengkap berpangkat dua, tiga, dan empat. Kedua, didapatkan bentuk umum matriks ketetanggaan dari graf lengkap berpangkat negatif dua, negatif tiga, dan negatif empat. Ketiga, didapatkan bentuk umum *trace* matiks ketetanggan dari graf lengkap berpangkat negatif dua, negatif tiga, dan negatif empat. Serta akan diberikan beberapa aplikasi mengenai hal tersebut dalam bentuk contoh soal.

A. Matriks ketetanggaan dari graf lengkap berpangkat $m = 2,3,4$

Teorema 4 Diberikan matriks ketetanggaan pada Persamaan (1), maka diperoleh

$$A_n^2 = a_{ij} = \begin{cases} (n-2), & i \neq j \\ (n-1), & i = j \end{cases}, \quad 1 \le i \le n, 1 \le j \le n, \qquad n \ge 2$$

Bukti:

Membuktikan bentuk umum perpangkatan matriks A_n^2 dengan menggunakan aturan perpangkatan matriks yang sesuai dengan Definisi 5 yaitu: $A_n^2 = A_n \cdot A_n$. Diketahui bahwa A_n pada Persamaan (1), maka

$A_n^2 = A_n \cdot A_n$

$$A_n^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jika diperhatikan bentuk matriks di atas, maka entri-entri matriks hanya ada angka 1 dan 0. Untuk setiap baris dan kolom memiliki angka 0 sebanyak 1 buah dan angka 1 sebanyak $n - 1$ buah. Artinya apabila baris yang sama di kali dengan kolom yang sama maka hasil perkaliannya angka 0 sebanyak 1 buah dan angka 1 sebanyak $n - 1$ buah, sehingga yang terjadi adalah:

$$a_{ij} = 0.0 + \underbrace{1.1 + 1.1 + 1.1 + \cdots + 1.1}_{(n-1)\ \ faktor} = 0 + \underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{(n-1)\ \ faktor} = (n-1), \qquad untuk\ i = j$$

dan apabila baris yang berbeda dikali dengan kolom yang berbeda, maka hasil perkaliannya entri 0 ada sebanyak 2 buah dan entri 1 sebanyak $n - 2$ buah, sehingga yang terjadi adalah:

$$a_{ij} = 0 + 0 + \underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{(n-2)\ \ faktor} = (n-2), \qquad untuk\ i \neq j$$

Sehingga bentuk perkalian matriksnya adalah:

$$A_n^2 = a_{ij} = \begin{cases} (n-2), & i \neq j \\ (n-1), & i = j \end{cases}, \quad 1 \le i \le n, 1 \le j \le n, \quad n \ge 2$$

Berdasarkan pembuktian di atas, maka Teorema 4 terbukti ■.

Teorema 5 Diberikan matriks ketetanggaan pada Persamaan (1), maka diperoleh

$$A_n^3 = a_{ij} = \begin{cases} (n-1) + (n-2)^2, & i \neq j \\ (n-1)(n-2), & i = j \end{cases}, \quad 1 \le i \le n, 1 \le j \le n, \quad n \ge 2$$

Bukti: Membuktikan bentuk umum perpangkatan matriks A_n^3 dengan menggunakan aturan perpangkatan matriks yang sesuai dengan Definisi 5 yaitu: $A_n^3 = A_n^2 \cdot A_n$. Diketahui bahwa A_n pada Persamaan (1) dan A_n^2 ada pada Teorema 4, maka diperoleh:

$A_n^3 = A_n^2 \cdot A_n$

$$A_n^3 = \begin{bmatrix} (n-1) & (n-2) & (n-2) & \cdots & (n-2) & (n-2) & (n-2) \\ (n-2) & (n-1) & (n-2) & \cdots & (n-2) & (n-2) & (n-2) \\ (n-2) & (n-2) & (n-1) & \cdots & (n-2) & (n-2) & (n-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (n-2) & (n-2) & (n-2) & \cdots & (n-1) & (n-2) & (n-2) \\ (n-2) & (n-2) & (n-2) & \cdots & (n-2) & (n-1) & (n-2) \\ (n-2) & (n-2) & (n-2) & \cdots & (n-2) & (n-2) & (n-1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jika diperhatikan bentuk dua matriks di atas, maka pada matriks A_n setiap baris dan kolom memiliki angka 0 sebanyak 1 buah dan angka 1 sebanyak $n - 1$ buah. Dan pada matriks A_n^2 setiap baris dan kolom memiliki angka $(n-1)$ sebanyak 1 buah dan angka $(n-2)$ sebanyak $n - 1$ buah. Artinya apabila baris yang sama di kali dengan kolom yang sama maka hasil perkaliannya adalah:

$$a_{ij} = (n-1)0 + \underbrace{(n-2)1 + (n-2)1 + (n-2)1 + \cdots + (n-2)1}_{(n-1)\ \ faktor} = (n-1)(n-2), \qquad untuk\ i = j$$

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

dan apabila baris yang berbeda dikali dengan kolom yang berbeda, maka hasil perkaliannya adalah:

$$a_{ij} = (n-1)1 + (n-2)0 + \underbrace{(n-2)1 + (n-2)1 + (n-2)1 + \cdots + (n-2)1}_{(n-2)\ faktor} = (n-1) + (n-2)^2, \quad untuk\ i \neq j$$

Sehingga bentuk perkalian matriksnya adalah:

$$A_n^3 = a_{ij} = \begin{cases} (n-1) + (n-2)^2, & i \neq j \\ (n-1)(n-2), & i = j \end{cases}, \quad 1 \le i \le n, 1 \le j \le n, \quad n \ge 2$$

Berdasarkan pembuktian di atas, maka Teorema (5) terbukti ■.

Teorema 6 Diberikan matriks ketetanggaan pada Persamaan (1), maka diperoleh

$$A_n^4 = a_{ij} = \begin{cases} 2(n-1)(n-2) + (n-2)^3, & i \neq j \\ (n-1)^2 + (n-1)(n-2)^2, & i = j \end{cases}, \quad 1 \le i \le n, 1 \le j \le n, \quad n \ge 2$$

Bukti: Membuktikan bentuk umum perpangkatan matriks A_n^4 dengan menggunakan aturan perpangkatan matriks yang sesuai dengan Definisi 5 yaitu: $A_n^4 = A_n^3 \cdot A_n$. Diketahui bahwa A_n pada Persamaan (1) dan A_n^3 ada pada Teorema 5, maka diperoleh:

$A_n^4 = A_n^3 \cdot A_n$

$$A_n^4 = \begin{bmatrix} (n-1)(n-2) & (n-1)+(n-2)^2 & \cdots & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 \\ (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)(n-2) & \cdots & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 \\ (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & \cdots & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & \cdots & (n-1)(n-2) & (n-1)+(n-2)^2 \\ (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & \cdots & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 \\ (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & \cdots & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)(n-2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jika diperhatikan bentuk dua matriks di atas, maka pada matriks A_n setiap baris dan kolom memiliki angka 0 sebanyak 1 buah dan angka 1 sebanyak $n-1$ buah. Dan pada matriks A_n^3 setiap baris dan kolom memiliki angka $(n-1)(n-2)$ sebanyak 1 buah dan angka $(n-1) + (n-2)^2$ sebanyak $n-1$ buah. Artinya apabila baris yang sama di kali dengan kolom yang sama maka hasil perkaliannya adalah:

$$a_{ij} = (n-1)(n-2)0 + \underbrace{(n-1) + (n-2)^2 + \cdots + (n-1) + (n-2)^2}_{(n-1)\ faktor} = (n-1)^2 + (n-1)(n-2)^2, \quad untuk\ i = j$$

dan apabila baris yang berbeda dikali dengan kolom yang berbeda, maka hasil perkaliannya adalah:

$$a_{ij} = (n-1)(n-2)1 + \left((n-1) + (n-2)^2\right)0 + \underbrace{(n-1) + (n-2)^2 + \cdots + (n-1) + (n-2)^2}_{(n-2)\ faktor}$$
$$= (n-1)(n-2) + (n-1)(n-2) + (n-2)^3 = 2(n-1)(n-2) + (n-2)^3, \quad untuk\ i \neq j$$

Sehingga diperoleh:

$$A_n^4 = a_{ij} = \begin{cases} 2(n-1)(n-2) + (n-2)^3, & i \neq j \\ (n-1)^2 + (n-1)(n-2)^2, & i = j \end{cases}, \quad 1 \le i \le n, 1 \le j \le n, \quad n \ge 2$$

B. Matriks ketetanggaan dari graf lengkap berpangkat $m = -2, -3, -4$.

Teorema 7 Diberikan matriks ketetanggaan pada Persamaan (1), maka diperoleh:

$$A_n^{-2} = a_{ij} = \begin{cases} \dfrac{-(n-2)}{(n-1)^2}, & i \neq j \\ \dfrac{(n-1) + (n-2)^2}{(n-1)^2}, & i = j \end{cases}, \quad 1 \le i \le n, 1 \le j \le n, \quad n \ge 2$$

Bukti:

Pembuktian Teorema 7 ini dengan menggunakan aturan Invers yaitu: $A_n^2 A_n^{-2} = I = A_n^{-2} A_n^2$. Dengan menggunakan matriks A_n^2 yang ada pada Teorema 4, maka akan ditunjukkan $A_n^2 A_n^{-2} = I$. Jika diperhatikan pada matriks A_n^2 setiap baris dan kolom memiliki angka $(n-1)$ sebanyak 1 buah dan angka $(n-2)$ sebanyak $n-1$ buah. Sedangkan pada matriks A_n^{-2} memiliki angka $\frac{(n-1)+(n-2)^2}{(n-1)^2}$ sebanyak 1 buah dan angka $\frac{-(n-2)}{(n-1)^2}$ sebanyak $n-1$ buah. Artinya apabila baris yang sama di kali dengan kolom yang sama maka hasil perkaliannya adalah:

$$a_{ij} = (n-1)\frac{(n-1) + (n-2)^2}{(n-1)^2} + \underbrace{(n-2)\frac{-(n-2)}{(n-1)^2} + \cdots + (n-2)\frac{-(n-2)}{(n-1)^2}}_{(n-1)\ faktor}$$
$$= \frac{(n-1) + (n-2)^2}{(n-1)} + (n-2)\frac{-(n-2)}{(n-1)^2}(n-1) = 1, \quad untuk\ i = j$$

dan apabila baris yang berbeda dikali dengan kolom yang berbeda, maka hasil perkaliannya adalah:

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$a_{ij} = (n-2)\frac{(n-1)+(n-2)^2}{(n-1)^2} + (n-1)\frac{-(n-2)}{(n-1)^2} + \underbrace{(n-2)\frac{-(n-2)}{(n-1)^2} + \cdots + (n-2)\frac{-(n-2)}{(n-1)^2}}_{(n-2)\ faktor}$$

$$= \frac{(n-2)(n-1)+(n-2)^3}{(n-1)^2} - \frac{(n-1)(n-2)}{(n-1)^2} - \frac{(n-2)^3}{(n-1)^2} = 0, \qquad i \neq j$$

Sehingga diperoleh matriks identitas

$$a_{ij} = \begin{cases} 1\,, untuk\ i = j \\ 0\,, untuk\ i \neq j \end{cases}$$

Hal yang sama berlaku untuk $A_n^{-2}A_n^2 = I$, sehingga Teorema 7 terbukti. ∎

Teorema 8 Diberikan matriks ketetanggaan pada Persamaan (1), maka diperoleh:

$$A_n^{-3} = a_{ij} = \begin{cases} \dfrac{(n-1)+(n-2)^2}{(n-1)^3}, & untuk\ i \neq j \\ -\dfrac{2(n-1)(n-2)+(n-2)^3}{(n-1)^3}, & untuk\ \ i = j \end{cases} ,1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\,, \qquad n \geq 2$$

Bukti:
Pembuktian Teorema 8 ini dengan menggunakan aturan Invers yaitu: $A_n^3A_n^{-3} = I = A_n^{-3}A_n^3$. Dengan menggunakan matriks A_n^3 yang ada pada Teorema 5, maka akan ditunjukkan $A_n^3A_n^{-3} = I$. Jika diperhatikan pada matriks A_n^3 setiap baris dan kolom memiliki angka $(n-1)(n-2)$ sebanyak 1 buah dan angka $(n-1)+(n-2)^2$ sebanyak $n-1$ buah. Sedangkan pada matriks A_n^{-3} memiliki angka $-\frac{2(n-1)(n-2)+(n-2)^3}{(n-1)^3}$ sebanyak 1 buah dan angka $\frac{(n-1)+(n-2)^2}{(n-1)^3}$ sebanyak $n-1$ buah. Artinya apabila baris yang sama di kali dengan kolom yang sama maka hasil perkaliannya adalah:

$$a_{ij} = -(n-1)(n-2)\frac{2(n-1)(n-2)+(n-2)^3}{(n-1)^3}$$
$$+ \underbrace{\left((n-1)+(n-2)^2\right)\frac{(n-1)+(n-2)^2}{(n-1)^3} + \cdots + \left((n-1)+(n-2)^2\right)\frac{(n-1)+(n-2)^2}{(n-1)^3}}_{(n-1)\ faktor}$$
$$= 1, \qquad untuk\ i = j$$

dan apabila baris yang berbeda dikali dengan kolom yang berbeda, maka hasil perkaliannya adalah:

$$a_{ij} = (n-1)(n-2)\frac{(n-1)+(n-2)^2}{(n-1)^3} - \left((n-1)+(n-2)^2\right)\frac{2(n-1)(n-2)+(n-2)^3}{(n-1)^3}$$
$$+ \underbrace{\left((n-1)+(n-2)^2\right)\frac{(n-1)+(n-2)^2}{(n-1)^3} + \cdots + \left((n-1)+(n-2)^2\right)\frac{(n-1)+(n-2)^2}{(n-1)^3}}_{(n-2)\ faktor} = 0,$$
$$untuk\ \ i \neq j$$

Sehingga diperoleh matriks identitas

$$a_{ij} = \begin{cases} 1\,, untuk\ i = j \\ 0\,, untuk\ i \neq j \end{cases}$$

Hal yang sama berlaku untuk $A_n^{-3}A_n^3 = I$ Teorema 8 terbukti. ∎

Teorema 9 Diberikan matriks ketetanggaan pada Persamaan (1), maka diperoleh:

$$A_n^{-4} = a_{ij} = \begin{cases} \dfrac{(n-1)^2+3(n-1)(n-2)^2+(n-2)^4}{(n-1)^4}, & untuk\ \ i = \mathrm{j} \\ -\dfrac{(2(n-1)(n-2)+(n-2)^3)}{(n-1)^4}, & untuk\ \ i \neq \mathrm{j} \end{cases} ,1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\,, \qquad n \geq 2$$

Bukti:
Pembuktian Teorema 9 ini dengan menggunakan aturan Invers yaitu: $A_n^4A_n^{-4} = I = A_n^{-4}A_n^4$. Dengan menggunakan matriks A_n^4 yang ada pada Teorema 6, maka akan ditunjukkan $A_n^4A_n^{-4} = I$. Jika diperhatikan pada matriks A_n^4 setiap baris dan kolom memiliki angka $(n-1)^2+(n-1)(n-2)^2$ sebanyak 1 buah dan angka $2(n-1)(n-2)+(n-2)^3$ sebanyak $n-1$ buah. Sedangkan pada matriks A_n^{-4} memiliki angka $\frac{(n-1)^2+3(n-1)(n-2)^2+(n-2)^4}{(n-1)^4}$ sebanyak 1 buah dan angka $-\frac{(2(n-1)(n-2)+(n-2)^3)}{(n-1)^4}$ sebanyak $n-1$ buah. Artinya apabila baris yang sama di kali dengan kolom yang sama maka hasil perkaliannya adalah:

$$a_{ij} = (n-1)^2+(n-1)(n-2)^2\frac{(n-1)^2+3(n-1)(n-2)^2+(n-2)^4}{(n-1)^4} -$$

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$\underbrace{\begin{matrix}(2(n-1)(n-2)+(n-2)^3)\frac{(2(n-1)(n-2)+(n-2)^3)}{(n-1)^4}-\cdots \\ -(2(n-1)(n-2)+(n-2)^3)\frac{(2(n-1)(n-2)+(n-2)^3)}{(n-1)^4}\end{matrix}}_{(n-1)\ faktor} = 1, \quad untuk\ i=j$$

dan apabila baris yang berbeda dikali dengan kolom yang berbeda, maka hasil perkaliannya adalah:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= -(2(n-1)(n-2)+(n-2)^3)\frac{(2(n-1)(n-2)+(n-2)^3)}{(n-1)^4} \\ &+ (2(n-1)(n-2)+(n-2)^3)\frac{(n-1)^2+3(n-1)(n-2)^2+(n-2)^4}{(n-1)^4} \\ &\underbrace{-(2(n-1)(n-2)+(n-2)^3)\frac{(2(n-1)(n-2)+(n-2)^3)}{(n-1)^4}-\cdots-(2(n-1)(n-2)+(n-2)^3)\frac{(2(n-1)(n-2)+(n-2)^3)}{(n-1)^4}}_{(n-2)\ faktor} \\ &= 0, \quad untuk\ i \neq j \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh matriks identitas

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, untuk\ i=j \\ 0, untuk\ i \neq j \end{cases}$$

Hal yang sama berlaku untuk $A_n^{-4}A_n^4 = I$ Teorema 9 terbukti.

C. *Trace* matriks ketetanggaan dari graf lengkap berpangkat $m = -2, -3, -4$

Teorema 10 Diberikan matriks ketetanggan pada Persamaan (1) maka

a. $tr(A_n)^{-2} = \frac{n\left((n-1)+(n-2)^2\right)}{(n-1)^2}, n \geq 2$

b. $tr(A_n)^{-3} = \frac{n[-2(n-1)(n-2)-(n-2)^3]}{(n-1)^3},\ n \geq 2$

c. $tr(A_n)^{-4} = \frac{n[(n-1)^2+3(n-1)(n-2)^2+(n-2)^4]}{(n-1)^4},\ n \geq 2$

Bukti :

a. Berdasarkan Teorema 7 entri $a_{ij}\ dengan\ i=j$ adalah $\frac{(n-1)+(n-2)^2}{(n-1)^2}$ yang jumlahnya sebanyak n buah, maka sesuai definisi *trace* matriks diperoleh:

$$tr(A_n)^{-2} = \underbrace{\frac{(n-1)+(n-2)^2}{(n-1)^2}+\frac{(n-1)+(n-2)^2}{(n-1)^2}+\cdots+\frac{(n-1)+(n-2)^2}{(n-1)^2}}_{n\ faktor} = \frac{n\left((n-1)+(n-2)^2\right)}{(n-1)^2}$$

b. Berdasarkan Teorema 8 entri $a_{ij}\ dengan\ i=j$ adalah $\frac{[-2(n-1)(n-2)-(n-2)^3]}{(n-1)^3}$ yang jumlahnya sebanyak n buah, maka sesuai definisi *trace* matriks diperoleh:

$$\begin{aligned} &tr(A_n)^{-3} \\ &= \underbrace{\frac{[-2(n-1)(n-2)-(n-2)^3]}{(n-1)^3}+\frac{[-2(n-1)(n-2)-(n-2)^3]}{(n-1)^3}+\cdots+\frac{[-2(n-1)(n-2)-(n-2)^3]}{(n-1)^3}}_{n\ faktor} \\ &= \frac{n[-2(n-1)(n-2)-(n-2)^3]}{(n-1)^3} \end{aligned}$$

c. Berdasarkan Teorema 9 entri $a_{ij}\ dengan\ i=j$ adalah $\frac{[(n-1)^2+3(n-1)(n-2)^2+(n-2)^4]}{(n-1)^4}$ yang jumlahnya sebanyak n buah, maka sesuai Definisi *trace* matriks diperoleh:

$$\begin{aligned} tr(A_n)^{-4} &= \underbrace{\begin{matrix}\frac{[(n-1)^2+3(n-1)(n-2)^2+(n-2)^4]}{(n-1)^4}+\frac{[(n-1)^2+3(n-1)(n-2)^2+(n-2)^4]}{(n-1)^4}+\cdots \\ +\frac{[(n-1)^2+3(n-1)(n-2)^2+(n-2)^4]}{(n-1)^4}\end{matrix}}_{n\ faktor} \\ &= \frac{n[(n-1)^2+3(n-1)(n-2)^2+(n-2)^4]}{(n-1)^4} \end{aligned}$$

Berdasarkan pembuktian di atas maka bentuk *trace* matriks pada Teorema 10 terbukti.

D. Aplikasi Perpangkatan dan *Trace* dari matriks ketetanggaan dari graf lengkap berpangkat $m = -2, -3, -4$

Berikut diberikan beberapa contoh soal yang berhubungan dengan perpangkatan dan *trace* dari matriks ketetanggaan dari graf lengkap berpangkat $m = -2, -3, -4$

Contoh 1 : Diberikan matriks A_n dengan entri sebagai berikut

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$a_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j \\ 1, & i \neq j \end{cases}$ dengan $n = 18$, tentukanlah A_n^2 , A_n^{-2}, dan $tr(A_n^{-2})$ menggunakan teorema-teorema yang sudah ada!

Penyelesaian:

a. Untuk A_n^2 menggunakan Teorema 4, yaitu:

$A_n^2 = a_{ij} = \begin{cases} (n-2), & i \neq j \\ (n-1), & i = j \end{cases}$, $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$, $n \geq 2$ dengan $n = 18$, maka diperoleh: $A_{18}^2 = a_{ij} = \begin{cases} 16, & i \neq j \\ 17, & i = j \end{cases}$, $1 \leq i \leq 18, 1 \leq j \leq 18$

b. Untuk A_n^{-2} menggunakan Teorema 7, yaitu:

$$A_n^{-2} = a_{ij} = \begin{cases} \dfrac{-(n-2)}{(n-1)^2}, & i \neq j \\ \dfrac{(n-1)+(n-2)^2}{(n-1)^2}, & i = j \end{cases} , \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, \quad n \geq 2$$

dengan $n = 18$, maka diperoleh:

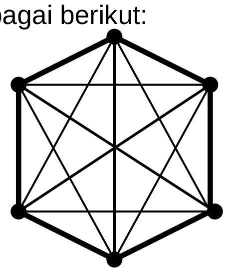
$$A_{18}^{-2} = a_{ij} = \begin{cases} \dfrac{-16}{289}, & i \neq j \\ \dfrac{273}{289}, & i = j \end{cases} , \quad 1 \leq i \leq 18, 1 \leq j \leq 18$$

c. Untuk $tr(A_n^{-2})$ menggunakan Teorema 10 bagian a, yaitu:

$tr(A_n)^{-2} = \frac{n((n-1)+(n-2)^2)}{(n-1)^2}$, $n \geq 2$ dengan $n = 18$, maka diperoleh:

$$tr(A_{18})^{-2} = \frac{18(17+16^2)}{17^2} = \frac{18(273)}{289} = \frac{4914}{289}$$

Contoh 2 : Diberikan sebuah graf sebagai berikut:



tentukanlah A_n^2 , A_n^{-2}, dan $tr(A_n^{-2})$ menggunakan teorema-teorema yang sudah ada!

Penyelesaian:

Diketahui $n = 6$, maka

a. Untuk A_n^2 menggunakan Teorema 4, yaitu:

$A_n^2 = a_{ij} = \begin{cases} (n-2), & i \neq j \\ (n-1), & i = j \end{cases}$, $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$, $n \geq 2$ dengan $n = 6$, maka diperoleh: $A_6^2 = a_{ij} = \begin{cases} 4, & i \neq j \\ 5, & i = j \end{cases}$, $1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq 6$

b. Untuk A_n^{-2} menggunakan Teorema 7, yaitu:

$$A_n^{-2} = a_{ij} = \begin{cases} \dfrac{-(n-2)}{(n-1)^2}, & i \neq j \\ \dfrac{(n-1)+(n-2)^2}{(n-1)^2}, & i = j \end{cases} , \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, \quad n \geq 2$$

dengan $n = 6$, maka diperoleh:

$$A_6^{-2} = a_{ij} = \begin{cases} \dfrac{-4}{25}, & i \neq j \\ \dfrac{21}{25}, & i = j \end{cases} , \quad 1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq 6$$

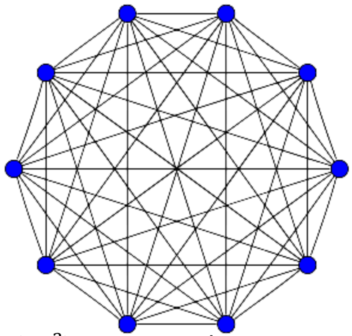
c. Untuk $tr(A_n^{-2})$ menggunakan Teorema 10 bagian a, yaitu:

$tr(A_n)^{-2} = \frac{n((n-1)+(n-2)^2)}{(n-1)^2}$, $n \geq 2$ dengan $n = 6$, maka diperoleh:

$$tr(A_6)^{-2} = \frac{6(5+4^2)}{5^2} = \frac{6(21)}{25} = \frac{126}{25}$$

Contoh 3: Tentukan perpangkatan matriks ketetanggaan (A_{10}^3) dari graf lengkap yang terbentuk dari himpunan $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ sebagai berikut :

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406



tentukanlah A_{10}^{3} , A_{10}^{-3}, dan $tr(A_{10}^{-3})$ menggunakan teorema-teorema yang sudah ada!

Penyelesaian:

Diketahui $n = 10$, maka

a. Untuk A_{10}^{3} menggunakan Teorema 5, yaitu:

$$A_n^3 = a_{ij} = \begin{cases} (n-1) + (n-2)^2, & i \neq j \\ (n-1)(n-2), & i = j \end{cases} \quad , \ 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, \quad n \geq 2$$

dengan $n = 10$, maka diperoleh:

$$A_{10}^3 = a_{ij} = \begin{cases} 73, & i \neq j \\ 72, & i = j \end{cases} \quad , \ 1 \leq i \leq 10, \qquad 1 \leq j \leq 10$$

b. Untuk A_{10}^{-3} menggunakan Teorema 8, yaitu:

$$(A_n^3)^{-1} = a_{ij} = \begin{cases} \dfrac{(n-1) + (n-2)^2}{(n-1)^3}, & untuk\ i \neq j \\ -\dfrac{2(n-1)(n-2) + (n-2)^3}{(n-1)^3}, & untuk\ \ i = j \end{cases} , 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\ , \qquad n \geq 2$$

dengan $n = 10$, maka diperoleh:

$$(A_{10}^3)^{-1} = a_{ij} = \begin{cases} \dfrac{73}{729}, & untuk\ i \neq j \\ -\dfrac{656}{729}, & untuk\ \ i = j \end{cases} , 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$$

c. Untuk $tr(A_{n10}^{-3})$ menggunakan Teorema 10 bagian b, yaitu:

$tr(A_n)^{-3} = \frac{n[-2(n-1)(n-2)-(n-2)^3]}{(n-1)^3}$, $n \geq 2$ dengan $n = 10$, maka diperoleh:

$$tr(A_n)^{-3} = \frac{10[-2(9)(8) - (8)^3]}{(9)^3} = \frac{-6560}{729}$$

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan,jika diberikan matriks ketetanggaan $n \, x \, n$ dari graf lengkap seperti Persamaan (1) sebagai berikut:

$$A_n = a_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j \\ 1, & i \neq j \end{cases}$$

maka diperoleh beberapa kesimpulan, sebagai berikut:

1) Bentuk umum perpangkatan matriks ketetanggaan dari graf lengkap berpangkat $m = 2{,}3{,}4$

a. $A_n^2 = a_{ij} = \begin{cases} (n-2), & i \neq j \\ (n-1), & i = j \end{cases} \ , \ 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\ , \quad n \geq 2$

b. $A_n^3 = a_{ij} = \begin{cases} (n-1) + (n-2)^2, & i \neq j \\ (n-1)(n-2), & i = j \end{cases} \ , \ 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, \quad n \geq 2$

c. $A_n^4 = a_{ij} = \begin{cases} 2(n-1)(n-2) + (n-2)^3, & i \neq j \\ (n-1)^2 + (n-1)(n-2)^2, & i = j \end{cases} \ , \ 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, \quad n \geq 2$

2) Bentuk umum perpangkatan matriks ketetanggaan dari graf lengkap berpangkat $m = -2, -3, -4$

a. $A_n^{-2} = a_{ij} = \begin{cases} \frac{-(n-2)}{(n-1)^2}, & i \neq j \\ \frac{(n-1)+(n-2)^2}{(n-1)^2}, & i = j \end{cases} \ , \ 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, \ n \geq 2$

b. $A_n^{-3} = a_{ij} = \begin{cases} \frac{(n-1)+(n-2)^2}{(n-1)^3}, & untuk\ i \neq j \\ -\frac{2(n-1)(n-2)+(n-2)^3}{(n-1)^3}, & untuk\ \ i = j \end{cases} , 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\ , \ n \geq 2$

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

c. $A_n^{-4} = a_{ij} = \begin{cases} \frac{(n-1)^2+3(n-1)(n-2)^2+(n-2)^4}{(n-1)^4}, & untuk\ \ i = \text{j} \\ -\frac{(2(n-1)(n-2)+(n-2)^3)}{(n-1)^4}, & untuk\ \ i \neq \text{j} \end{cases}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\ ,\ n \geq 2$

3) *Trace* matriks ketetanggaan dari graf lengkap berpangkat $m = -2, -3, -4$

a. $tr(A_n)^{-2} = \frac{n\left((n-1)+(n-2)^2\right)}{(n-1)^2}, n \geq 2$

b. $tr(A_n)^{-3} = \frac{n\left[-2(n-1)(n-2)-(n-2)^3\right]}{(n-1)^3},\ n \geq 2$

c. $tr(A_n)^{-4} = \frac{n[(n-1)^2+3(n-1)(n-2)^2+(n-2)^4]}{(n-1)^4},\ \ n \geq 2$

Daftar Pustaka

[1] Anton H, Rorres C. *Dasar-Dasar Aljabar inear Versi Aplikasi*. Edisi Ketujuh. Jakarta: Erlangga. 2004.

[2] Aryani F, Solihin M. Trace Matriks Real Berpangkat Bilangan Bula Negatif. *Jurnal Sains Matematika dan Statistika.* 2017; 3 (2).

[3] Aryani F, Yulianis. Trace Matriks Berbentuk Khusus 2×2 Berpangkat Bilangan Bulat Negatif, *Jurnal Sains Matematika dan Statistika.* 2018; 4 (2).

[4] Avron H. *Counting Triangles in Large Graphs Using Randomized Matrix Trace Estimation*. Proceeding of Kdd-Ldmta'10, 2010.

[5] Brezinski C, Fika P, Mitrouli M. Estimations of the Trace of Power of Positive by Extrapolation of the Moment. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*. 2012; 39 : 144-155.

[6] Chu MT, Raleigh. Symbolic Calculation of the Trace of the Power of a Tridiagonal Matrix, *Computing*. 1985; 35 : 257-268.

[7] Data BN, Datta K. An Algorithm for Computing Power of a Hessenberg Matrix and its Applictions, *Linear Algebra and its Application*. 1976; 14 : 273-284.

[8] Gentle JE. Matrix Algebra. NewYork : Springer. 2007.

[9] Munir R. Matematika Diskrit. Penerbit Informatika. 2005

[10] Pahade J, Jha M. Trace of Positive Integer Power of Real 2×2 matrices. *Advancesin Linear Algebra & Matrix Theory*. 2015 ; 5 : 150-155.

[11] Pahade J, M Jha. Trace of Positive Integer Power of Adjacency Matrix. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2017; 13 (6).

[12] Pan V. Estimating the Extremal Eigenvalues of a Symetric Matrix. *Computers & Mathematics with Applications*. 1990; 20: 17-22.

[13] Zarelua AV. *On Congruences for the Trace of Power of Some Matrices*. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2008; 63: 78-98.