Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 3, No. 1, Januari 2017
ISSN 1693-2390 print/ISSN 2407-0939 online

Metode Iterasi Tiga Langkah Bebas Turunan Orde Konvergensi Delapan untuk Menyelesaikan Persamaan Nonlinear

M. N. Muhaijir[1], L. L. Nanda[2]
[1, 2] Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: *nizam_ys86@yahoo.com*

ABSTRAK

Penelitian ini membahas kombinasi antara metode doubel-Newton dan metode Noor-Khan menjadi metode iterasi tiga langkah. Turunan fungsi yang ada pada metode iterasi tersebut diaproksimasi menggunakan beda terbagi dan interpolasi Hermite orde dua dan tiga, sehingga diperoleh metode iterasi baru bebas turunan untuk menyelesaikan persamaan nonlinear. Secara analitik, metode baru ini mempunyai orde konvergensi delapan dengan empat evaluasi fungsi. Komputasi numerik menunjukkan metode yang dihasilkan lebih unggul dibandingkan metode lain yang didiskusikan.

Kata Kunci: Interpolasi Hermite, metode doubel-Newton, metode Noor-Khan, orde konvergensi, beda terbagi.

ABSTRACT

This research discusses combination betwen double-Newton and Noor-Khan methods become as three-step iteration method. The derivative functions present in the iteration method are approximated using divided diference and Hermite interpolation of second and third order, so that, we are obtained new iteration method freederivative to solving nonlinear equations. Analytically, this new method has an eight-order convergence with four evaluations function. Numerical computations show the resulting method is superior to other methods discussed.

Keywords: *Hermite interpolation, doubel-Newton method, Noor-Khan method, order of convergence, divided difference.*

Pendahuluan

Di bidang Matematika, metode numerik merupakan salah satu cabang ilmu yang menarik untuk dibahas. Salah satu materi dalam metode numerik yang sering dibahas adalah teknik untuk mencari solusi persamaan nonlinear dalam bentuk

$$f(x) = 0. \tag{1}$$

Penyelesaian untuk persamaan (1), jika metode analitik tidak dapat digunakan, maka metode numerik digunakan yang hasilnya berupa nilai hampiran. Salah satu metode klasik yang sangat populer dan digunakan untuk menyelesaikan persamaan (1) adalah metode Newton dengan bentuk iterasi diberikan oleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \text{ dan } f'(x) \neq 0, \tag{2}$$

yang memiliki orde konvergensi dua [8]. Beberapa modifikasi metode Newton dengan orde konvergensi tiga dapat di lihat pada [4, 9, 10, 12, 18] dan modifikasi metode Newton dengan orde konvergensi empat dapat di lihat [6, 7, 17].

Kung dan Trub [13] memodifikasi metode Newton menjadi metode iterasi dua langkah dengan bentuk iterasi

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{3}$$

$$x_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}, \tag{4}$$

yang memiliki orde konvergensi empat [13]. Noor [15] juga membuat metode iterasi baru untuk menyelesaikan persamaan (1) yang memiliki orde konvergensi empat dengan bentuk iterasi

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{5}$$

$$x_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)} - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)}\left(1 - \frac{f'(y_n)}{f'(x_n)}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{f(y_n)}{f'(x_n)}\right)^2 \frac{f''(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{6}$$

Selanjutnya, Noor dan Khan [16] mengakproksimasi turunan ke dua pada persamaan (6) menggunakan beda maju, sehingga diperoleh metode iterasi baru bebas turunan kedua dengan bentuk

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{7}$$

$$x_{n+1} = y_n - \frac{2f(y_n)}{f'(x_n)} + \frac{f(y_n)f'(y_n)}{\left(f'(x_n)\right)^2} + \frac{f'(y_n) - f'(x_n)}{2f(x_n)}\left(\frac{f(y_n)}{f'(x_n)}\right)^2, \tag{8}$$

yang memiliki orde konvergensi empat [16].

Artikel ini membahas metode iterasi baru tiga langkah yang mengkombinasikan metode doubel-Newton dan metode Noor-Khan. Selanjutnya, turunan-turunan fungsi yang muncul pada metode iterasi tersebut diaproksimasi menggunakan beberapa metode aproksimasi untuk turunan fungsi. Untuk $f'(x_n)$ diaproksimasi menggunakan beda terbagi, $f'(y_n)$ menggunakan interpolasi Hermite orde dua, dan $f'(z_n)$ menggunakan interpolasi Hermite orde tiga. Selanjutnya, metode iterasi yang diperoleh ditunjukkan orde konvergensinya secara analitik menggunakan deret Taylor. Terakhir, metode iterasi baru dilakukan uji komputasi untuk melihat orde konvergensi secara numerik serta untuk melihat keunggulan metode dengan beberapa metode yang digunakan sebagai pembanding.

Metode dan Bahan Penelitian

Metodologi yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literature dengan mengumpulkan berbagai informasi terhadap materi-materi yang berkaitan dengan penelitian yang diperoleh dari beberapa buku dan artikel. Adapun langkah-langkah dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mendefinisikan kembali metode doubel-Newton pada persamaan (3) dan (4) serta metode Noor-Khan persamaan (5) dan (6) yang dikombinasikan menjadi metode iterasi tiga langkah.
2. Selanjutnya, $f'(x_n)$ yang ada pada metode tersebut ditaksir mengggunakan beda terbagi, untuk $f'(y_n)$ ditaksir menggunakan interpolasi Hermite orde dua, dan $f'(z_n)$ ditaksir menggunakan interpolasi Hermite orde tiga, sehingga diperoleh metode iterasi baru tiga langkah yang bebas turunan.
3. Menentukan orde konvergensi seacara analitik dan indeks efisiensi dari metode iterasi yang diperoleh serta melakukan simulasi numerik untuk beberapa persamaan yang digunakan menggunakan bantuan program Maple 13.

Selanjutnya, bagian ini juga memuat beberapa definisi dan teorema dasar yang dapat digunakan sebagai landasan matematis untuk uraian-uraian pada bagian selanjutnya yang disajikan berikut ini.

Definisi 1 (Akar Persamaan) [14] Misalkan $f(x)$ adalah suatu fungsi kontinu. Setiap bilangan α pada domain f yang memenuhi $f(\alpha) = 0$ disebut pembuat nol fungsi $f(x)$, atau juga disebut akar persamaan $f(x) = 0$.

Teorema 2 (Teorema Taylor) [3] Misalkan $n \in N$, dengan N bilangan bulat positif. Misalkan suatu interval $I = [a, b]$ dan sedemikian hingga f dan $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ kontinu pada I dan $f^{(n+1)}$ ada pada (a, b). Jika $x_0 \in I$ maka untuk sebarang $x \in I$ terdapat suatu titik c diantara x dan x_0 sehingga

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Definisi 3 (Beda Terbagi) [2]. Diketahui fungsi f yang terdefinisi pada titik x_n dan x_{n+1} yang berbeda yaitu $f(x_n)$ dan $f(x_{n+1})$. Beda terbagi orde pertama adalah

$$f[x_n, x_{n+1}] = \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n}.$$

Untuk $x_0, x_1, \ldots, x_n$ titik yang berbeda, maka beda terbagi orde n dinyatakan dengan

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, \ldots x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}.$$

Definisi 4 (Interpolasi Hermite) [5] Andaikan bahwa $f \in C^1[a, b]$ dan $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$ adalah berbeda. Polinomial dengan derajat terendah yang sesuai dengan $f(x)$ dan $f'(x)$ pada titik $x_0, \ldots, x_n$ adalah polinomial untuk derajat paling tinggi $2n + 1$ yang diberikan oleh

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)H_{n,j}(x) + \sum_{j=0}^{n} f'(x_j)\hat{H}_{n,j}(x),$$

dengan

$$H_{n,j}(x) = \left[1 - 2(x - x_j)L'_{n,j}(x_j)\right]L^2_{n,j}(x),$$

dan

$$\hat{H}_{n,j}(x) = (x - x_j)L^2_{n,j}(x).$$

Bentuk $L_{n,j}(x)$ adalah koefisien polinomial Lagrange ke-j berderajat n.

Definisi 5 (Orde Konvergensi) [1] Sebuah barisan iterasi $\{x_n \mid n \geq 0\}$ dikatakan konvergen dengan orde $p \geq 1$ ke α jika

$$|\alpha - x_{n+1}| \leq c|\alpha - x_n|^p, \quad n \geq 0,$$

untuk suatu konstanta $c > 0$. Jika $p = 1$, maka barisan disebut konvergen linear ke α.

Definisi 6 (*COC*) [18] Misalkan α adalah akar persamaan nonlinear $f(x)$, dan andaikan x_{n-1}, x_n, x_{n+1} adalah tiga iterasi berturut-turut yang cukup dekat ke akar α. Maka *computational order of convergence* (*COC*) dapat diaproksimasi menggunakan rumus

$$COC \approx \frac{\ln|(x_{n+1} - \alpha)/(x_n - \alpha)|}{\ln|(x_n - \alpha)/(x_{n-1}) - \alpha|}.$$

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 3, No. 1, Januari 2017
ISSN 1693-2390 print/ISSN 2407-0939 online

Definisi 7 (Indeks Efisiensi) [11] Misalkan q adalah banyak evaluasi fungsi yang dibutuhkan oleh suatu metode iterasi. Efisiensi dari metode tersebut dihitung dengan indeks efisiensi yang didefinisikan sebagai $p^{1/q}$, dengan p adalah orde konvergensi dari metode tersebut.

Hasil dan Pembahasan

Metode doubel-Newton persamaan (3) dan (4) memiliki orde konvergensi empat, dan metode Noor-Khan persamaan (7) dan (8) juga memiliki orde konvergensi empat. Untuk memperoleh metode dengan orde konvergensi yang lebih tinggi, kedua metode tersebut dikombinasikan sehingga diperoleh metode iterasi tiga langkah dengan bentuk

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{9}$$

$$z_n = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}, \tag{10}$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{2f(z_n)}{f'(y_n)} + \frac{f(z_n)f'(z_n)}{\left(f'(y_n)\right)^2} + \frac{f'(z_n)-f'(y_n)}{2f(y_n)}\left(\frac{f(z_n)}{f'(y_n)}\right)^2. \tag{11}$$

Langkah selanjutnya yang dilakukan adalah menghilangkan semua turunan yang ada pada metode iterasi persamaan (9) – (11) dengan cara diaproksimasi. Untuk $f'(x_n)$ diaproksimasi menggunakan selisih terbagi berikut

$$f'(x_n) \approx \frac{f(w_n)-f(x_n)}{w_n - x_n} =: f[x_n, w_n], \tag{12}$$

dengan $w_n = x_n + f(x_n)^3$. Kemudian $f'(y_n)$ diaproksimasi menggunakan interpolasi Hermite orde dua yang melalui titik-titik $H_2(x_n) = f(x_n)$, $H_2(y_n) = f(y_n)$, dan $H'_2(x_n) = f'(x_n)$ sehingga diperoleh bentuk

$$f'(y_n) \approx 2f[x_n, y_n] - f'(x_n). \tag{13}$$

Untuk $f'(z_n)$ diaproksimasi menggunakan interpolasi Hermite order tiga yang melalui titik-titik $H_3(x_n) = f(x_n)$, $H_3(y_n) = f(y_n)$, $H_3(z_n) = f(z_n)$, dan $H'_3(x_n) = f'(x_n)$ sehingga diperoleh bentuk

$$f'(z_n) \approx 2f[x_n, z_n] + f[y_n, z_n] - 2f[x_n, y_n] + (y_n - z_n) f[x_n, x_n, y_n]. \tag{14}$$

Jika persamaan (12) disubstitusikan ke persamaan (13) dan (14) maka secara berturut-turut diperoleh persamaan berikut

$$f'(y_n) \approx 2f[x_n, y_n] - f[x_n, w_n] =: N_1(f), \tag{15}$$

dan

$$f'(z_n) \approx 2f[x_n, z_n] + f[y_n, z_n] - 2f[x_n, y_n] + (y_n - z_n) f[x_n, w_n, y_n] := N_2(f). \tag{16}$$

Selanjutnya, persamaan (12) disubstitusikan ke persamaan (9), persamaan (15) dan (16) disubstitusikan ke persamaan (10) dan (11) sehingga diperoleh metode iterasi berikut

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f[x_n, w_n]}, \tag{17}$$

$$z_n = y_n - \frac{f(y_n)}{N_1(f)}, \tag{18}$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{2f(z_n)}{N_1(f)} + \frac{f(z_n)N_2(f)}{\left(N_1(f)\right)^2} + \frac{N_2(f)-N_1(f)}{2f(y_n)}\left(\frac{f(z_n)}{N_1(f)}\right)^2. \tag{19}$$

Persamaan (17) – (19) merupakan metode iterasi baru tiga langkah kombinasi metode doubel-Newton dan metode Noor-Khan yang bebas turunan. Berikut ini ditunjukkan orde konvergensi metode iterasi (17) – (19) yang disajikan pada Teorema 8.

Teorema 8 (Kekonvergenan Metode Iterasi) Misalkan $f : I \subset R \to R$ fungsi yang mempunyai turunan pada interval terbuka D. Selanjutnya asumsikan bahwa α adalah akar sederhana dari persamaan $f(x) = 0$. Misalkan diberikan tebakan awal x_0 cukup dekat ke α, maka metode iterasi persamaan (17) – (19) mempunyai orde konvergensi delapan dan memenuhi persamaan *error*:

$$e_{n+1} = \left(\frac{4c_2^7}{c_1^7} - \frac{15c_2^5}{2c_1^6} + \frac{4c_2^3c_3^2}{c_1^5} - \frac{c_2c_3^3}{2c_1^4} - \frac{c_2^2c_3c_4}{c_1^3} + \frac{c_2^5}{c_1^2} - \frac{c_2^3c_3}{c_1} \right) e_n^8 + O(e_n^9),$$

dengan $c_j = \dfrac{f^{(j)}(\alpha)}{j!\, f'(\alpha)}$, $j \geq 1$ dan $e_n = x_n - \alpha$.

Bukti. Misalkan α akar sederhana dari persamaan $f(x) = 0$, maka $f(\alpha) = 0$. Ekspansi Taylor untuk $f(x_n)$ di sekitar $x_n = \alpha$ dan dengan mengabaikan suku yang memuat $(x_n - \alpha)^j$, dengan $j \geq 9$ diperoleh

$$f(x_n) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{1}{2} f''(\alpha)(x_n - \alpha)^2 + \cdots + O((x_n - \alpha)^9). \tag{20}$$

Oleh karena $c_j = \dfrac{f^{(j)}(\alpha)}{j!\, f'(\alpha)}$ dengan $j = 1, 2, \ldots, 8$ dan $e_n = x_n - \alpha$, sehingga setelah penyederhanaan persamaan (20) dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$f(x_n) = f'(\alpha)(c_1e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + c_4e_n^4 + c_5e_n^5 + \cdots + O(e_n^9). \tag{21}$$

Berdasarkan persamaan (21) diperoleh

$$w_n = \alpha + e_n + c_1^3e_n^3 + 3c_1^2c_2e_n^4 + (3c_3c_1^2 + 3c_2^2c_1)e_n^5 + \cdots + O(e_n^9). \tag{22}$$

Untuk $f(w_n)$ dapat diperoleh menggunakan ekspansi deret Taylor di sekitar $w_n = \alpha$ dan setelah disederhanakan diperoleh

$$f(w_n) = f'(\alpha)(c_1e_n + c_2e_n^2 + (c_1^4 + c_3)e_n^3 + (5c_1^3c_2 + c_4)e_n^4 + \cdots + O(e_n^9)). \tag{23}$$

Persamaan (21), (22), dan (23) disubstitusikan ke persamaan (12) diperoleh

$$f[x_n, w_n] = c_1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + (c_1^3c_2 + 4c_4)e_n^3 + (5c_5 + 3c_3c_1^3 + 3c_2^2c_1^2)e_n^4 + \cdots + O(e_n^9). \tag{24}$$

Selanjutnya, jika persamaan (21) dan (24) disubstitusikan ke persamaan (17) maka diperoleh

$$y_n = \alpha + \frac{c_2}{c_1}e_n^2 + \left(\frac{2c_3}{c_1} - \frac{2c_2}{c_1} \right) e_n^3 + \left(\frac{3c_4}{c_1} + c_1^2c_2 - \frac{7c_2c_3}{c_1^2} + \frac{4c_2^3}{c_1^3} \right) e_n^4 + \cdots + O(e_n^9). \tag{25}$$

Kemudian, $f(y_n)$ diperoleh menggunakan ekspansi deret Taylor di sekitar $y_n = \alpha$ dan setelah disederhanakan menjadi

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 3, No. 1, Januari 2017
ISSN 1693-2390 print/ISSN 2407-0939 online

$$f(y_n) = f'(\alpha)\left(c_2 e_n^2 + \left(2c_3 - \frac{2c_2^2}{c_1}\right)e_n^3 + \left(3c_4 + c_1^3 c_2 - \frac{7c_2c_3}{c_1^2} + \frac{5c_2^3}{c_1^2}\right)e_n^4 + \cdots + O(e_n^9)\right).$$

(26)

Berdasarkan persamaan (21), (25), dan (26) diperoleh

$$f[x_n, y_n] = c_1 + c_2 e_n + \left(c_3 + \frac{c_2^2}{c_1}\right)e_n^2 + \left(c_4 + \frac{3c_2c_3}{c_1} - \frac{2c_2^3}{c_1^2}\right)e_n^3 + \cdots + O(e_n^9). \tag{27}$$

Persamaan (24) dan (27) disubstitusikan ke persamaan (15) menghasilkan

$$N_1(f) = c_1 + \left(\frac{2c_2^2}{c_1} - c_3\right)e_n^2 + \left(\frac{6c_2c_3}{c_1} - c_1^3 - 2c_4 + \frac{6c_2c_3}{c_1} - \frac{4c_2^3}{c_1^2}\right)e_n^3 + \cdots + O(e_n^9). \tag{28}$$

Selanjutnya, jika persamaan (25), (26) dan (28) disubstitusikan ke persamaan (18) maka diperoleh

$$z_n = \alpha + \left(\frac{c_2^3}{c_1^3} - \frac{c_2c_3}{c_1^2}\right)e_n^4 + \cdots + O(e_n^9). \tag{29}$$

Untuk $f(z_n)$ dapat diperoleh menggunakan ekspansi deret Taylor di sekitar $z_n = \alpha$ dan setelah disederhanakan diperoleh

$$f(z_n) = f'(\alpha)\left(\left(\frac{c_2^3}{c_1^3} - \frac{c_2c_3}{c_1^2}\right)e_n^4 + \cdots + O(e_n^9)\right). \tag{30}$$

Berdasarkan persamaan (21) – (26), (29), dan (30) diperoleh

$$f[x_n, z_n] = c_1 + c_2 e_n + c_3 e_n^2 + c_4 e_n^3 + \left(c_5 - \frac{c_3c_2^2}{c_1^2} + \frac{c_2^4}{c_1^3}\right)e_n^4 + \cdots + O(e_n^9), \tag{31}$$

$$f[y_n, z_n] = c_1 + \frac{c_2^2}{c_1}e_n^2 + \left(\frac{2c_2c_3}{c_1} - \frac{2c_2^3}{c_1^2}\right)e_n^3 + \cdots + O(e_n^9), \tag{32}$$

dan

$$f[x_n, w_n, z_n] = c_2 + 2c_3 e_n + \left(3c_4 + \frac{c_2c_3}{c_1} + c_1^3 c_2\right)e_n^2 + \cdots + O(e_n^9). \tag{33}$$

Persamaan (25), (27) (29), (31), (32), dan (33) disubstitusikan ke persamaan (16) diperoleh

$$N_2(f) = c_1 + \left(\frac{2c_2^4}{c_1^4} + c_2^2 c_1^2 + \frac{c_2c_4}{c_1} - \frac{2c_3c_2^2}{c_1^2}\right)e_n^4 + \cdots + O(e_n^9). \tag{34}$$

Kemudian, jika persamaan (28), (29), (30), dan (34) disubstitusikan ke persamaan (19) dan setelah disederhanakan diperoleh

$$x_{n+1} = \alpha + \left(\frac{4c_2^7}{c_1^7} - \frac{15c_2^5}{2c_1^6} + \frac{4c_2^3c_3^2}{c_1^5} - \frac{c_2c_3^3}{2c_1^4} - \frac{c_2^2c_3c_4}{c_1^3} + \frac{c_2^5}{c_1^2} - \frac{c_2^3c_3}{c_1}\right)e_n^8 + O(e_n^9). \tag{35}$$

Oleh karena $e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha$, persamaan (35) dapat ditulis menjadi

$$e_{n+1} = \left(\frac{4c_2^7}{c_1^7} - \frac{15c_2^5}{2c_1^6} + \frac{4c_2^3c_3^2}{c_1^5} - \frac{c_2c_3^3}{2c_1^4} - \frac{c_2^2c_3c_4}{c_1^3} + \frac{c_2^5}{c_1^2} - \frac{c_2^3c_3}{c_1} \right) e_n^8 + O(e_n^9). \qquad (36)$$

Berdasarkan persamaan (36) dan Definisi 5 diperoleh orde konvergensi orde delapan, sehingga Teorema 6 terbukti. ■

Selanjutnya, dilakukan simulasi numerik untuk membandingkan banyak iterasi berbagai metode, seperti metode Newton (MN), metode doubel-Newton (MDN), metode Noor-Khan (MNK), dan metode iterasi bebas turunan pada persamaan (18) – (20) (MBT) dalam menemukan akar persamaan nonlinear $f(x) = 0$. Simulasi dilakukan menggunakan program Maple 13 dengan kriteria pemberhentian program jika $|f(x_{n+1})| \le \varepsilon$ atau $|x_{n+1} - x_n| \le \varepsilon$, dan jumlah iterasi mencapai maksimum iterasi. Sedangkan toleransi yang digunakan adalah $\varepsilon = 1{,}0 \times 10^{-100}$. Dalam melakukan perbandingan ini ada beberapa persamaan nonlinear yang digunakan yaitu sebagai berikut:

$f_1(x) = \sqrt{x} - x$ $\qquad \alpha = 1{,}000000000000000,$

$f_2(x) = x^2 - e^x - 3x + 2$ $\qquad \alpha = 0{,}257530285439860,$

$f_3(x) = \cos(x) - x$ $\qquad \alpha = 0{,}739085133215161,$

$f_4(x) = (x-1)^3 - 1$ $\qquad \alpha = 2{,}000000000000000.$

Hasil uji komputasi untuk ke empat persamaan nonlinear di atas diberikan pada Tabel 1 – 4 berikut:

Tabel 1. Perbandingan Komputasi Beberapa Metode untuk Fungsi $f_1(x) = \sqrt{x} - x$.

x_0	n	Metode	COC	$\|f(x_{n+1})\|$	$\|x_{n+1} - x_n\|$
0,4	8	MN	2,0000	3,71899e-132	5,45453e-66
	4	MDN	4,0000	3,71899e-132	4,67099e-33
	5	MNK	4,0000	2,10839e-336	2,86599e-84
	3	MBT	7,9987	1,93446e-156	7,76419e-20
0,6	7	MN	2,0000	5,76716e-107	2,14796e-53
	4	MDN	4,0000	1,66301e-213	2,14796e-53
	5	MNK	4,0000	2,54734e-146	9,50187e-37
	3	MBT	8,0000	8,33985e-307	1,24286e-38
1,4	7	MN	2,0000	1,75765e-142	3,74983e-71
	4	MDN	4,0000	1,54467e-284	3,74983e-71
	4	MNK	4,0000	6,23293e-241	2,11330e-60
	3	MBT	8,0000	6,33489e-448	2,84770e-56
1,6	7	MN	2,0000	1,49262e-125	1,09275e-62
	4	MDN	4,0000	1,11396e-250	1,09275e-62
	4	MNK	4,0000	1,63635e-209	1,51271e-52
	3	MBT	8,0000	1,56253e-381	5,66898e-48

Tabel 2. Perbandingan Komputasi Beberapa Metode untuk Fungsi $f_2(x) = x^2 - e^x - 3x + 2$.

x_0	n	Metode	COC	$\|f(x_{n+1})\|$	$\|x_{n+1} - x_n\|$
0,0	7	MN	2,0000	8,87889e-201	1,58566e-100
	4	MDN	4,0000	1,94975e-402	1,58566e-100
	4	MNK	4,0000	1,08966e-350	9,69442e-88
	3	MBT	8,0000	9,33224e-373	5,72724e-47
0,2	6	MN	2,0000	1,34541e-143	6,17245e-72
	3	MDN	4,0000	1,34541e-143	8,12696e-36
	3	MNK	4,0000	6,69217e-131	8,58205e-33
	3	MBT	8,0000	1,10265e-789	4,38533e-99

0,4	6	MN	2,0000	1,19715e-121	5,82242e-61
	3	MDN	4,0000	1,19715e-121	2,49604e-30
	3	MNK	4,0000	3,51496e-109	2,31036e-27
	3	MBT	8,0000	5,31293e-660	7,11810e-83
0,6	6	MN	2,0000	3,61630e-103	1,01196e-51
	3	MDN	4,0000	3,61630e-103	1,04059e-25
	4	MNK	4,0000	8,16587e-366	1,60398e-91
	3	MBT	7,9849	1,37520e-175	2,53509e-22

Tabel 3. Perbandingan Komputasi Beberapa Metode untuk Fungsi $f_3(x)=\cos(x)-x$.

x_0	*n*	Metode	*COC*	$\lvert f(x_{n+1})\rvert$	$\lvert x_{n+1}-x_n\rvert$
1,0	7	MN	2,0000	1,19130e-166	1,79547e-83
	4	MDN	4,0000	1,87240e-333	1,79547e-83
	4	MNK	4,0000	6,17602e-287	5,41055e-72
	3	MBT	8,0000	1,94226e-514	1,10148e-64
2,0	7	MN	2,0000	1,17199e-191	5,63158e-96
	4	MDN	4,0000	1,81220e-383	5,63158e-96
	4	MNK	4,0000	4,44768e-296	2,80283e-74
	3	MBT	7,9944	1,06201e-123	7,65955e-16
3,0	9	MN	2,0000	1,04626e-124	1,68263e-62
	5	MDN	4,0000	1,44423e-249	1,68263e-62
	5	MNK	4,0000	5,17610e-234	9,20587e-59
	4	MBT	8,0000	6,49065e-669	5,40098e-84
4,0	*	MN	*	*	*
	*	MDN	*	*	*
	7	MNK	4,0000	5,69836e-223	5,30276e-56
	4	MBT	8,0000	5,97074e-613	5,34491e-77

Tabel 4. Perbandingan Komputasi Beberapa Metode untuk Fungsi $f_4(x)=(x-1)^3-1$.

x_0	*n*	Metode	*COC*	$\lvert f(x_{n+1})\rvert$	$\lvert x_{n+1}-x_n\rvert$
1,2	14	MN	2,0000	4,38696e-164	1,20926e-82
	7	MDN	4,0000	4,38696e-164	1,09967e-41
	38	MNK	4,0000	4,55410e-158	2,48202e-40
	3	MBT	8,0000	2,29951e-322	3,74229e-41
1,8	8	MN	2,0000	2,49902e-164	9,12692e-83
	4	MDN	4,0000	2,49902e-164	9,55349e-42
	5	MNK	4,0000	6,66370e-392	8,63244e-99
	3	MBT	7,9994	2,02457e-192	6,54974e-25
2,2	8	MN	2,0000	1,16094e-193	1,96718e-97
	4	MDN	4,0000	1,16094e-193	4,43529e-49
	4	MNK	4,0000	1,00005e-152	5,37292e-39
	4	MBT	8,0000	1,25538e-586	3,46960e-74
2,3	8	MN	2,0000	1,70698e-155	2,38536e-78
	4	MDN	4,0000	1,70698e-155	1,54446e-39
	4	MNK	4,0000	2,79141e-118	2,19614e-30
	4	MBT	7,9986	4,43930e-171	3,04682e-22

Tabel 1 – 4 kolom pertama merupakan variasi nilai awal, kolom kedua merupakan jumlah iterasi, kolom ketiga merupakan metode yang dibandingkan, kolom keempat merupakan orde konvergensi secara numerik, kolom kelima merupakan nilai fungsi yang dihasilkan, dan kolom enam merupakan selisih iterasi terakhir dengan iterasi sebelumnya. Tanda * menyatakan bahwa metode tidak dapat menemukan akar yang diinginkan.

Berdasarkan Tabel 1 – 4 dapat di lihat bahwa MDN, MNK, dan MBT memberikan hasil iterasi yang sebanding, tidak terdapat perbedaan jumlah iterasi yang signifikan. Secara keseluruhan, MN memiliki jumlah iterasi yang lebih banyak dari tiga metode lainnya. Selanjutnya, Tabel 1 – 4 menunjukkan bahwa jika dilihat dari nilai fungsi yang dihasilkan, MBT memiliki nilai fungsi yang lebih kecil dibandingkan dengan ketiga metode lainnya. Pada Tabel 1 – 4 juga dapat dilihat bahwa secara keseluruhan untuk semua fungsi yang digunakan dengan berbagai variasi nilai awal, nilai *COC* untuk MBT konvergen menuju delapan. Hal ini menunjukkan bahwa orde konvergensi MBT secara numerik juga delapan.

Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan maka metode iterasi baru bebas turunan (MBT) yang didiskusikan memiliki orde konvergensi delapan dengan melibatkan empat evaluasi fungsi yaitu $f(x_n), f(w_n), f(y_n)$ dan $f(z_n)$. Dengan demikian, metode ini memiliki indeks efisiensi $8^{\frac{1}{4}} \approx 1{,}6818$ lebih baik jika dibandingan metode Newton $2^{\frac{1}{2}} \approx 1{,}4142$, metode doubel-Newton $4^{\frac{1}{4}} \approx 1{,}4142$ dan metode Noor-Khan $4^{\frac{1}{4}} \approx 1{,}4142$. Hal ini menunjukkan bahwa metode iterasi baru ini lebih efektif dibandingkan metode lainnya dalam menyelesaikan persamaan nonlinear.

Daftar Pustaka

[1] K. E. Atkinson, *An Introduction to Numerical Analysis, Second Edition*, John Wiley & Son, Inc., New York, 1989, Hal. 56.

[2] K. E. Atkinson, *Elementary Numerical Analysis, Third Edition*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2004, Hal. 124 .

[3] R. G. Bartle, D. R. Shebert, *Introduction to Real Analysis, Fourth Edition*, Jhon Wiley & Sons, Inc., New York, 1999, Hal. 184.

[4] C. Chun, A simply constructed third-order modifications of Newton's method, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 219 (2008), 81–89.

[5] J. D. Faires dan R. L. Burden, *Numerical Analysis, Third Edition*, Bro-oks Cole, Belmont, 2002, Hal. 104.

[6] C. Chun, Y. M. Ham, Some fourth modifications of Newton's method, *Applied Mathematics and Computation*, 197 (2008), 654–658.

[7] C. Chun, B. Neta, Certain improvement of Newton's method with fourth order convergence, *Applied Mathematics and Computation*, 215 (2009), 821–823.

[8] R. V. Dukkipati, *Numerical Method*, New Age International (p) Limited, New Delhi, 2010, Hal. 83.

[9] L. Fang, G. He, Z. Hu, A cubically convergent Newton-type method under weak condition, *Journal Computational and Applied Mathematics*, 220 (2008), 409–412.

[10] M. Frontini, E. Sormani, Some variants of Newton's methods with third-order convergence, *Applied Mathematics Computation*, 140 (2003), 419–426.

[11] W. Gautschi, *Numerical Analysis, Second Edition*, Birkhauser, New York, 2012, Hal. 261.

[12] J. Kou, L. Yitian, W. Xiuhua, Third-order modification of Newton's method, *Journal Computational and Applied Mathematics*, 205 (2007), 1–5.

[13] H. T. Kung, J. F. Traub, Optimal order of one-point and multipoint iteration, *Journal of the Association for Computing*, 21 (4) (1974), 643–651.

[14] A. Kharab dan R. B. Guenther, *An Introduction to Numerical Methods: A MATLAB Approach, Third Edition*, CRC Press, New York, 2012, Hal. 39.

[15] M. A. Noor, Some iterative methods for solving nonlinear equations using homotopy pertubations method, *International Journal of Computer Mathematics*, 87 (2010), 141-149.

[16] M. A. Noor, W. A. Khan, New iterative methods for solving nonlinear equations by using homotopy pertubation method, *Applied Mathematics and Physics*, 219 (2012), 3565-3574

[17] R. Sharma, R. K. Guha, R. Sharma, Some modified Newton's methods with fourth-order convergence, *Advances in Applied Science Research*, 2 (1) (2011), 240–247.

[18] S. Weerakon, T. G. I. Fernando, A variant of Newton's methods with accelarated third order convergence, *Applied Mathematics Letters*,13 (2000), 87–93.