**PENYELESAIAN PEMROGRAMAN LINEAR DAN**

**ANALISA SENSITIVITAS DENGAN METODA**

**MODIFIKASI PROYEKSI KONYUGASI GRADIEN**

**(SOLUTION LINEARPROGRAMMING AND SENSITIVITY ANALISYS WITH CONJUGATED GRADIENT PROJECTION METHOD)**

**Endang Lily1\*,Lely Deswita1\*,Harison,1\*dan Eki Nining Saputri2\***

**1Dosen 2Mahasiswa Matematika FMIPA Universitas Riau**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

Kampus Binawidya Pekanbaru (28293) Indonesia

endang.lily60@gmail.com

ABSRACT

Linear programming is solved by tracing from one feasible solution to another through the direction vector determined by the projection matrix. The optimum solution is indicated when the optimum values for the primal and dual problems are the same.

Keywords: Linear programming, projection matrix, primal and dual problem.

ABSTRAK

Pemrograman linear diselesaikan dengan menelusuri dari suatu solusi fisibel ke solusi fisibel lainnya melalui vektor arah yang ditentukan oleh matriks proyeksi. Solusi optimum ditunjukan bila nilai optimum pada masalah primal dan dual adalah sama.

Kata Kunci: Pemrograman linear, matriks proyeksi, masalah primal, dan dual.

1. **PENDAHULUAN**

Pemrograman Linear adalah salah satu bentuk dari rumus rumus masalah optimisasi yang ter bentuk atas fungsi linear dan tersusun atas sebuah fungsi obyektif, satu atau beberapa fungsi kendala dan satu atau beberapa variabel non negatif. Dalam kehidupan nyata pemrograman linear banyak membantu menyelesaikan kegiatan memproduksi barang, kegiatan ekonomi, sosial, perencanaan pembangunan rumah dan lain-lain. [1] dan [3].Metoda simpleks adalah sebuah metoda yang sudah lama dikenal dapat penyelesaian pemrograman linear dan metoda ini pertama kali dikembangkan oleh Dantzig pada tahun 1947. Adapun proses untuk mencapai solusi optimum dapat direpresntasikan sebuah solusi fisibel bergerak menuju solusi optimum secara geometris solusi fisibel tersebut melintasi garis batas daerah fisibel. Selanjutnya dapat ditinjau pergerakan solusi fisibel pada pemrograman nonlinear untuk mencapai solusi optimum, secara geometris solusi fisibel tidak hanya melintas garis batas daerah fisibel tetapi juga melintasi dalam daerah fisibel dan salah satu metodenya yang sudah dikenal lama adalah metoda proyeksi konyugasi gradient [2]. Pada metoda ini solusi fisibel membentuk suatu barisan yang konvergen terhadap solusi optimum. Secara geometris pada metoda proyeksi konyugasi gradient bahwa sebuah solusi fisibel yang termuat pada vektor garis arah selalu tegak lurus dengan vektor garis yang memuat solusi fisibel berikutnya dan ini berlanjut sampai di solusi optimum. Berikutnya dalam [4] dibahas prosedur menentukan solusi optimum dengan metoda iterasi. Dalam hal ini solusi fisibel dapat direpresentasikan barisan yang konvergen ke solusi optimum dan solusi fisibel yang termuat pada vektor berarah tegak lurus dengan vektor arah yang memuat solusi fisibel berikutnya. Dengan demikian timbullah pertanyaan atas dasar apakah solusi fisibel dapat bergerak menuju solusi optimum? Di dalam [2] diuraikan tentang konsep matriks proyeksi dan menggunakan konsep matriks proyeksi dapat dijelaskan munculnya vektor arah yang saling tegak lurus. Selanjutnya dengan menggunakan konsep matriks proyeksi didapatkan menentukan solusi fisibel diselesaikan dengan metoda iterasi,seperti hal metoda proyeksi konyugasi gradient. Meskipun demikan didapatka bahwa pada pemrograman nonlinear pada umumnya ditemukan untuk masalah minimum. Sedangkan pemrograman linear yang dibahas adalah masalah nilai maksimum.Oleh karena itu dengan teorema dualitas pada pemrograman linear untuk masalah maksimum dapat diselesaikan dan metodanya untuk selanjut disebut metoda modifikasi proyeksi konyugasi gradien.

1. **SYARAT KUHN-TUCKER PADA PEMROGRAMAN LINEAR**

Dalam [3] diuraikan bentuk umum pemrograman linear:

 $Maksimum F\left(X\right)=CX^{T}$ (P1)

 $kendala AX\leq b$

 $X\geq 0$

dengan $X=(x\_{1},x\_{2},…,x\_{n})$,$ C=(c\_{1},c\_{2},…,c\_{n})$,$0=(0,0,…,0)$,$b^{T}=(b\_{1},b\_{2},…,b\_{n})$ dan $A=(a\_{ij})$ dengan $i=1,2,…,m ,j=1,2,…,n$.

Dari masalah (P1) dapat ditentukan fungsi lagrange,

 $f\left(X,U,s,\right) = C^{T}X- U\left(AX+s^{2}-b\right)$ (1)

Selanjutnya dari persamaan (1) diperoleh syarat Kuhn-Tucker sebagai berikut, [2]

 $ AU=C^{T}$ **atau** $ U=A^{-1}C^{T}$ (2)

Persamaan (2) merupakan kendala masalah dual dari masalah primal (P1) dengan fungsi obyektifnya $W\left(U\right)=b^{T}U$ . Dengan dapat dinyatakan masalah dual dari masalah primal (P1)

 Minimum $W\left(U\right)=b^{T}U$

 Kendala, $AU=C^{T}$

 $U\geq 0$

Selanjutnya berdasarkan Teorema Dual bahwa nilai optimum problem primal$ F(X^{o})$ sama dengan nilai optimum problem dual,[3]

 $W\left(U\right)=F(X^{o})$

1. **METODA MODIFIKASI PROYEKSI KONYUGASI GRADIEN**

Metoda ini merupakan metoda untuk menentukan solusi ekstrim fisibel dengan cara mengaplikasikan matriks proyeksi sehingga garis arah yang memuat solusi ekstrim yang baru berpotongan tegak lurus dengan garis arah yang memuat solusi ekstrim sebelumnya.

Secara umum bila dirumuskan $X^{k-1}$ adalah solusi ekstrim fisibel ke-(k-1), (k=1,2,...) maka di iterasi ke-k solusi ekstrim fisibel adalah,

$X^{k}=X^{k-1}+α\_{k-1}d^{k-1} $ (3)

Dengan $d^{k-1} $adalah vektor arah lintasan dengan rumus,

$d^{k-1}=H\_{k-1}C^{T}$ (4)

dengan $C$ adalah koefusien fungsi obyektif pada pemrograman linear (P3) dan $H\_{k-1}$adalah matriks simetris $ n×n$,semidefinit positp dan matriks proyeksi untuk iterasi ke-k-1.Berdasarkan Definisi 1, matriks $H\_{k-1}$adalah matriks proyeksi maka matriks $H\_{k}=I-H\_{k-1}$ juga matriks proyeksi.Selain itu misal dibentuk ruang $L=\left\{H\_{k-1}X,X\in R^{n}\right\}$ dan ruang $L^{T}=\left\{H\_{k-1}X,X\in R^{n}\right\}$ maka kedua ruang tersebut orthogonal. Selanjutnya dirumuskan,

$H\_{k-1}=\left\{\begin{array}{c}I bila k=1 \\H\_{k-1}^{q} bila k>1\end{array}\right.$ (5)

Dalam persamaan (5), $I$ adalah matriks identitas $n×n$, **q** adalah banyaknya kendala aktif di solusi ektrim fisibel pada pemrograman linear (P3) dan $H\_{k-1}^{q}$didefinisikan untuk kendala ke-s,s = 1,2,..q,

 $H\_{k-1}^{q}=H\_{k-1}^{s-1}- \frac{H\_{k-1 }^{s-1}a\_{s a\_{s}^{T }}H\_{k-1}^{s-1}}{a\_{s}^{T} H\_{k-1}^{s-1} a\_{s}}$(6)

dengan $H\_{k-1}^{0}=I$**.** Selanjutnya parameter panjang arah vektor ke-(k-1) , $α\_{k-1}$ditentukan dengan mensubstitusikan persamaan (3) ke setiap kendala aktif pemrograman linear (P3),

 $a\_{i}^{T}($$X^{k-1}+α\_{k-1}d^{k-1})=b\_{i}$(7)

Dari persamaan (7) diperoleh,

$∝\_{k-1}=\frac{b\_{i}-a\_{i}^{T}X^{k-1}}{a\_{i}^{T}d^{k-1}}$ **, i = 1,2,…m**  (8)

Dari persamaan (8) dipilih $∝\_{k-1}$minimum maka dapat dirumuskan,

$∝\_{k-1}=\min\_{i=1,2,…m}\left\{g\_{i,}g=\frac{b\_{i}-a\_{i}^{T}X^{k-1}}{a\_{i}^{T}d^{k-1}}\_{i}dan g\_{i}>0\right\}$ (9)

.

Misalkan pada pemrograman linear (P3) diperoleh kendala aktif sebanyak r maka dapat diperhatikan koefusien kendalanya adalah matriks $A\_{r}$ordo $r×r.$ Selanjutnya berdasarkan syarat Kuhn-Tucker pada persamaan (2) diperoleh

 $ U^{T}A\_{r}=C^{T}$ **atau** $ U^{T}=C^{T}A\_{r}^{-1}$ (10)

dan berdasarkan persamaan (15) berlaku sebagai petunjuk solusi optimum pemrograman linear (P3) optimal,yaitu

 $W\left(U\right)=bU^{T}=F(X^{o}$**)** (11)

1. **ALGORITMA PENYELESAIAN PEMROGRAMAN LINEAR**

Berikutnya dapat diuraikan langkah-langkah menyelesaikan pemrograman linear dengan metoda modifikasi proyeksi konyugasi gradient.

**Langkah 0** : Ambil k = 1, $H\_{0}=I$ ,misalkan $X^{0}$ adalah basis awal dengan menggunakan

 Persamaan (14) diperoleh $∝\_{0}$

**Langkah 1 :** Dengan menggunakan persamaan (8) diperoleh $X^{k} $

**Langkah 2 :** Dengan menggunakan persamaan (2) dapat ditemukan$U>0$sehingga diperoleh

$W\left(U\right)=bU^{T}=F(X^{o}$**) ,** artinya nilai optimum masalah primal sama dengan nilai

 optimal masalah dual. Lainnya,kembali ke langkah 3

**Langkah 3** : Susun k = k+1dengan menggunakanpersamaan (11), (9) dan (14) masing-masing

 Diperoleh $H\_{k-1}$ **,** $d^{k-1}$ dan$∝\_{k-1}$dan lanjut langkah 1

1. **PENYELESAIAN PEMROGRAMAN LINEAR**

 $Maksimum Z=2x\_{1}+4x\_{2}+x\_{3}+x\_{4}$

 Kendala , $x\_{1}+3x\_{2}+x\_{4} \leq 4$

 $ 2 x\_{1}+x\_{2} \leq 3$

 $x\_{2}+4x\_{3}+x\_{4} \leq 3$

 $x\_{1},x\_{2},x\_{3},x\_{4} \geq 0$

Berdasarkan Syarat Kuhn-Tucker pada persamaan (2) diperoleh

 $A\_{r}U=C^{T}\rightarrow \left(\begin{matrix}1&3&0\\2&1&0\\0&1&4\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}U\_{1}\\U\_{2}\\U\_{3}\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}2\\4\\1\end{matrix}\right)$

 $U=A\_{r}^{-1}C^{T}\rightarrow \left(\begin{matrix}U\_{1}\\U\_{2}\\U\_{3}\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}-0,2&0,6&6\\0,4&-0,2&0\\-0,1&0,05&0,25\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}2\\4\\1\end{matrix}\right) =\left(\begin{matrix}1,1\\0,45\\0,25\end{matrix}\right)$

Jadi nilai optimal solusi masalah dual,

 $W\left(U\right)=b^{T}U=\left(\begin{matrix}4&3&3\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}1,1\\0,45\\0,25\end{matrix}\right)=$ **6,5**

**Langkah 0 :** k=1 , $H\_{0}=\left(\begin{matrix}1&0&\begin{matrix}0&0\end{matrix}\\0&1&\begin{matrix}0&0\end{matrix}\\\begin{matrix}0\\0\end{matrix}&\begin{matrix}0\\0\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}1&0\end{matrix}\\\begin{matrix}0&1\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)$**,** misalkan $X^{0}=\left(\begin{matrix}0,5\\0,5\\\begin{matrix}0,25\\0,5\end{matrix}\end{matrix}\right)$ **dan** $d^{0}=\left(\begin{matrix}2\\4\\\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\end{matrix}\right)$

 Dengan menggunakan persamaan (9) diperoleh $∝\_{0}=0,1$

**Langkah 1** : Dengan menggunakan persamaan (3) diperoleh ,

$ X^{1}=\left(\begin{matrix}0,5\\0,5\\\begin{matrix}0,25\\0,5\end{matrix}\end{matrix}\right)+0,1\left(\begin{matrix}2\\4\\\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}0,7\\0,9\\\begin{matrix}0,35\\0,6\end{matrix}\end{matrix}\right)$

**Langkah 2** : Untuk $ X^{1}$ hanya kendala pertama sebagai kendala aktif, $x\_{1}+3x\_{2}+x\_{4}$ = 4,

Berdasarkan persamaan (2),tidak terdapat $U>0$sehingga

$W\left(U\right)=bU^{T}= F(X^{o}$**).** (belum optimal)

**Langkah 3 :** Ambil k = 2 dengan menggunakan persamaan (6),(4) dan (9) diperoleh,

 $H\_{1}=\left(\begin{matrix}\begin{matrix}0,91\\-0,27\\\begin{matrix}0\\-0,09\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}-0,27\\0,18\\\begin{matrix}0\\-0,27\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}0\\0\\\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}-0,09\\-0,27\\\begin{matrix}0\\-0,91\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)$ ,$d^{1}=\left(\begin{matrix}0,65\\-0,09\\\begin{matrix}1\\-0,35\end{matrix}\end{matrix}\right)$ dan $∝\_{1}=0,03$

**Langkah 1 :** Dengan menggunakan persamaan (3) diperoleh ,

$ X^{2}=\left(\begin{matrix}0,7\\0,9\\\begin{matrix}0,35\\0,6\end{matrix}\end{matrix}\right)+0,03\left(\begin{matrix}0,65\\-0,09\\\begin{matrix}1\\-0,35\end{matrix}\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}0,72\\0,9\\\begin{matrix}0,38\\0,59\end{matrix}\end{matrix}\right)$

**Langkah 2 :** Untuk$X^{2}$ hanya kendala 1 dan 3 sebagai kendala aktif, $x\_{1}+3x\_{2}+x\_{4}=4$ dan

$x\_{2}+4x\_{3}+x\_{4}=3$.Selanjutnya berdasarkan persaman (2) menunjukan

$X^{2} $bukan solusi optimal.

**Langkah 3 :** Ambil k = 3 dengan menggunakan persamaan (6), (4) dan (9) diperoleh

 $H\_{2}=\left(\begin{matrix}\begin{matrix}0,9\\-0,27\\\begin{matrix}0,09\\-0,08\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}-0,27\\0,18\\\begin{matrix}0,02\\-0,27\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}0,09\\0,02\\\begin{matrix}0,03\\-0,15\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}-0,08\\-0,27\\\begin{matrix}-015\\-0,88\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)$ ,$d^{2}=\left(\begin{matrix}0,73\\-0,07\\\begin{matrix}0,14\\-0,5\end{matrix}\end{matrix}\right)$ dan $∝\_{2}=0,49$

**Langkah 1 :** Dengan menggunakan persamaan (3) diperoleh,

 $ X^{3}=\left(\begin{matrix}0,72\\0,9\\\begin{matrix}0,38\\0,59\end{matrix}\end{matrix}\right)+0,49\left(\begin{matrix}0,73\\-0,07\\\begin{matrix}0,14\\-0,5\end{matrix}\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}1,07\\0,87\\\begin{matrix}0,45\\0,35\end{matrix}\end{matrix}\right)$

**Langkah 2 :** Untuk solusi $ X^{3}$,kendala 1,2 dan 3 adalah kendala aktif, $x\_{1}+3x\_{2}+x\_{4}=4$,

 $ 2x\_{1}+x\_{2}=3$ dan $x\_{2}+4x\_{3}+x\_{4}=3.$

 Berdasarkan persamaan (2) solusi $ X^{3}$bukan solusi optimal.

**Langkah 3:** Ambil k = 4 dengan menggunakan persaman (6),(4) dan (9) diperoleh

 $H\_{3}=\left(\begin{matrix}\begin{matrix}0,03\\-0,07\\\begin{matrix}-0,02\\0,16\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}-0,07\\0,13\\\begin{matrix}0,05\\-0,33\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}-0,02\\0,05\\\begin{matrix}0,02\\-0,12\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}0,16\\-0,33\\\begin{matrix}-012\\-0,82\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)$ ,$d^{3}=\left(\begin{matrix}-0,06\\0,11\\\begin{matrix}0,04\\-0,29\end{matrix}\end{matrix}\right)$ dan $∝\_{2}=1,2$

 Dengan menggunakan persamaan (3) diperoleh,

 $ X^{4}=\left(\begin{matrix}1,07\\0,87\\\begin{matrix}0,45\\0,35\end{matrix}\end{matrix}\right)+1,2\left(\begin{matrix}-0,06\\0,11\\\begin{matrix}0,04\\-0,29\end{matrix}\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}1\\1\\\begin{matrix}0,5\\0\end{matrix}\end{matrix}\right)$

 Diperoleh nilai solusi masalah primal sama dengan nilai solusi masalah dual,

 $W\left(U\right)=$ $F(X^{o}$**)** = 2(1)+4(1)+1(0,5)+1(0) = 6,5 maka $ X^{4} $ solusi optimal

1. **PENYELESAIAN ANALISA SENSITIVITAS**

 $Maksimum Z=(2+μ)x\_{1}+(4-2μ)x\_{2}+(1+μ)x\_{3}+(1-μ)x\_{4}$

 Kendala, $x\_{1}+3x\_{2}+x\_{4} \leq 4$

 $ 2 x\_{1}+x\_{2} \leq 3$

 $x\_{2}+4x\_{3}+x\_{4} \leq 3$

 $x\_{1},x\_{2},x\_{3},x\_{4} \geq 0$

Berdasarkan syarat Kuhn-Tucker pada persamaan (2)

$A\_{r}U=C^{T}\rightarrow \left(\begin{matrix}1&3&0\\2&1&0\\0&1&4\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}U\_{1}\\U\_{2}\\U\_{3}\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}2+μ\\4-2μ\\1-μ\end{matrix}\right)$

 $U=A\_{r}^{-1}C^{T}\rightarrow \left(\begin{matrix}U\_{1}\\U\_{2}\\U\_{3}\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}-0,2&0,6&6\\0,4&-0,2&0\\-0,1&0,05&0,25\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}2+μ\\4-2μ\\1-μ\end{matrix}\right) =\left(\begin{matrix}1,1-0,9μ\\0,45+0,95μ\\0,25-0,25μ\end{matrix}\right)$

 Diperoleh range $-0,47μ\leq 0,33$.

1. **KESIMPULAN DAN SARAN**

Metoda modifikasi proyeks ikonyugasi gradien memberikan sebuah alternatif pada penyelesaian pemrograman linear. Hal yang menarik adalah variabel solusi ekstrim fisibel membentuk su-atu barisan yang konvergen ke solusi optimal. Keadaan tersebut sudah umum terjadi pada pe-nyelesaian pemrograman nonlinear Selain itu bahwa sebuah solusi ekstrim fisibel di suatu itera si punya pengaruh untuk variabel solusi ektrim fisibel berikutnya.Metoda modifikasi konyu gasi gradien pada pemrograman linear yang telah diteliti terbatas hanya pada ma salah maksimum.Selanjutnya peneliti menyarankan untuk meneliti pemakaian me toda modifikasi konyugasi gradien pemrograman linear untuk masalah minimum.

**DAFTAR PUSTAKA**

[1] H. A. Taha, *Operations* *Research :*  *An Introduction, thd Edition,* Macmillan Publishing

 , New York, 1982.

[2] M. S. Bazaraa and C. M. Shetty, *Nonlinear Programming :* *Theory and Algorithms, 2th*

  *Edition*, John Wiley & Sons, 1993.

[3] W. L. Wiston, *Operations Research, Applications and Algorithms, 4th  Edition*,

 Brooks/Cole-Thomson Learning, Belmount, 2004.

[4] S. Tantawy, A *New Procedure for Solving Linier Programming Problem with Sensitivity*

 *Analysi*s, Trends in Appliied Sciences Researc,.14: 7-11,2019.

[5] S. S. RAO, *OTIMIZATION Theory and Applications, second Edition*, WILEY EASTERN

 LIMITED, 1984.

[6] F. S. Hillier dan G. J. Liebermen, *Introduction Operations Research ,Seventh Edition*,

 McGraw-Hill, New York, 2001