Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 6, No. 1, Januari 2020
ISSN 2460-4542, e-ISSN 2615-8663

Invers Matriks *RSFPLRcircfr (0,b,...,b)*

Rahmawati[1], Nour Fitri[2], Ade Novia Rahma
[1,2,3] Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: rahmawati@uin-suska.ac.id

ABSTRAK

Matriks *RSFPLRcircfr (0,b,...,b)* merupakan bentuk khusus dari matriks sirkulan *RSFPLRcircfr* $\left(a_0, a_1,...,a_{n-1}\right)$ dengan mengganti $a_0 = 0, a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = b, b \in R$. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan bentuk umum invers dari matriks *RSFPLRcircfr (0,b,...,b)* berordo $n \times n$ $\left(n \geq 4\right)$. Proses dimulai dengan menentukan invers dari matriks *RSFPLRcircfr (0,b,...,b)* berordo 4 x 4 hingga 9 x 9 dengan menggunakan Operasi Baris Elementer. Selanjutnya dengan mengamati polanya, maka hasil akhir dari penelitian ini diperoleh bentuk umum invers dari matriks *RSFPLRcircfr (0,b,...,b)* berorde $n \times n (n \geq 4)$ yang selanjutnya dibuktikan dengan pembuktian langsung.

Kata kunci : *invers, matriks RSFPLRcircfr (0,b,...,b), matriks sirkulan, Operasi Baris Elementer*

ABSTRACT

Matrix RSFPLRcircfr(0,b,...,b) is a special form of the matrix sirkulan RSFPLRcircfr $\left(a_0, a_1,..., a_{n-1}\right)$ *with by replacing* $a_0 = 0, a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = b, b \in R$. *This study purpose to determine the general form of the inverse matrix RSFPLRcircfr (0, b, ..., b) order* $n \times n$ $\left(n \geq 4\right)$. *The process begins by determining the inverse of the matrix RSFPLRcircfr (0,b,...,b) order 4 x 4 to 9 x 9 by using Elementary Row Operations. Furthermore, by observing the pattern, then the result of this research obtained the general form of the inverse of the matrix RSFPLRcircfr (0,b,...b) order* $n \times n$ $\left(n \geq 4\right)$ *which is further proved by direct proof.*

Keywords: *elementary row operations, inverse, matrix RSFPLRcircfr(0,b,...,b), matrix circulant*

Pendahuluan

Matriks sirkulan adalah matriks bujur sangkar yang setiap elemen dari barisnya, identik dengan baris sebelumnya, namun dipindahkan satu posisi ke kanan [3]. Terdapat beberapa jenis matriks sirkulan, diantaranya adalah matriks sirkulan *RSFPLR(Row Skew First-Plus-Last Right)* dan matriks sirkulan *RSLPFL(Row Skew Last-Plus-First Left)* [4], matriks *FLDcirc*$_r$[6], matriks *FLScirc*$_r$ [5], dan lain sebagainya. Matriks sirkulan *RSFPLR (Row Skew First-Plus-Last Right)* adalah suatu matriks bujur sangkar dengan baris pertama $(a_0,\, a_1, ..., a_{n-1})$ yang dinotasikan dengan $RSFPLRcircfr(a_0,\, a_1, \ldots, a_{n-1})$, dengan bentuk umum

$$A_n = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ -a_{n-1} & a_0 + a_{n-1} & a_1 & \ldots & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} \\ -a_{n-2} & -a_{n-1} + a_{n-2} & a_0 + a_{n-1} & \ldots & a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_3 & -a_4 + a_3 & -a_5 + a_3 & \ldots & a_0 + a_{n-1} & a_1 & a_2 \\ -a_2 & -a_3 + a_2 & -a_4 + a_3 & \ldots & -a_{n-1} + a_{n-2} & a_0 + a_{n-1} & a_1 \\ -a_1 & -a_2 + a_1 & -a_3 + a_2 & \ldots & -a_{n-2} & -a_{n-1} + a_{n-2} & a_0 + a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Untuk mendapatkan entri-entri pada baris $i+1$, entri pertama dimulai dengan mengambil entri terakhir dari baris ke-i yang dikalikan dengan -1. Setelah diperoleh entri pertama dari baris $i+1$, maka entri kedua diperoleh dengan cara menjumlahkan entri pertama dan entri terakhir pada baris ke-i, dan kemudian menggeser entri-entri dari baris ke-i (secara siklis) satu posisi ke kanan. Hal ini dijelaskan oleh Jiang dan Kicheon [4].

Beberapa penelitian terdahulu yang telah membahas mengenai matriks sirkulan diantaranya tahun 2018, Aryani dkk [2] yang membahas determinan matriks $FLDcirc_r$ bentuk khusus menggunakan ekspansi kofaktor. Selanjutnya, pada tahun 2019 Rahma AN dkk [7] membahas determinan matriks *FLScircr* bentuk khusus $n\,x\,n, n \geq 3$ menggunakan metode kondensasi Chio. Di tahun yang sama, Rahma AN dkk [8] juga membahas determinan matriks blok 2 x 2 dalam aplikasi matriks $FLDCirc_r$ bentuk khusus. Pada penelitian ini, akan dibahas mengenai salah satu bentuk khusus matriks sirkulan yaitu matriks $RSFPLRcircfr(a_0,\, a_1, \ldots, a_{n-1})$ dengan mengganti $a_0 = 0, a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_{n-1} = b, b \neq 0$, $b \in R$ pada Persamaan (1) sehingga menjadi matriks $RSFPLRcircfr(0,\, b, \ldots, b)$

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & b & b & \ldots & b & b & b \\ -b & b & b & \ldots & b & b & b \\ -b & 0 & b & \ldots & b & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -b & 0 & 0 & 0 & b & b & b \\ -b & 0 & 0 & 0 & 0 & b & b \\ -b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix} \quad (2)$$

yang kemudian akan ditentukan bentuk umum invers dari Persamaan (2) tersebut.

Metode dan Bahan Penelitian

Metode penelitian yang digunakan pada penelitian ini adalah tinjauan pustaka dengan teori-teori matriks dasar seperti menentukan invers matriks menggunakan Operasi Baris Elementer (OBE) [1] dan definisi matriks dikatakan *invertible* yang diberikan berikut ini.

Definisi 1[1] Jika A dan B adalah matriks bujur sangkar dan jika matriks B dapat dicari sedemikian sehingga $AB = BA = I$, maka A dikatakan dapat dibalik (*invertible*) dan B dinamakan invers dari A dan dapat ditulis $B = A^{-1}$.

Suatu matriks A mempunyai invers yang ditulis dengan A^{-1} maka matriks A dapat dibalik (*invertible*) yaitu $\det(A) \neq 0$ dan matriks A disebut juga dengan matriks *non singular*. Sebaliknya matriks A disebut *singular* apabila A tidak mempunyai invers. Dalam pembahasan ini, matriks $RSFPLRcircfr(0, b, \ldots, b)$ yang diberikan pada Persamaan (2) merupakan matriks *non singular*.

Untuk mendapatkan bentuk umum invers dari martiks $RSFPLRcircfr(0, b, \ldots, b)$ akan diberikan proses berikut

1. Diberikan matriks $RSFPLRcircfr(0, b, \ldots, b)$ pada Persamaan (2)
2. Menentukan invers matriks $RSFPLRcircfr(0, b, \ldots, b)$ ordo 4 x 4 sampai 9 x 9 dengan Operasi baris Elementer (OBE)
3. Menduga bentuk umum invers dari matriks $RSFPLRcircfr(0, b, \ldots, b)$ ordo *n* x *n* dengan memperhatikan polanya.
4. Membuktikan invers dari matriks $RSFPLRcircfr(0, b, \ldots, b)$ ordo *n* x *n* dengan menggunakan pembuktian langsung yaitu $A_n^{-1} A_n = A_n A_n^{-1} = I$.

Hasil dan Pembahasan

Dalam penelitian ini, untuk menentukan bentuk umum invers dari matriks $RSFPLRcircfr\ (0, b, \ldots, b)$ maka terlebih dahulu ditentukan invers dari matriks $RSFPLRcircfr\ (0, b, \ldots, b)$ untuk ordo 4 x 4 sampai ordo 9 x 9 dengan menggunakan teknik Operasi Baris Elementer [1].

Untuk $n = 4$, maka menurut Persamaan (2) matriks $RSFPLRcircfr\ (0, b, b, b)$ yaitu

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & b & b & b \\ -b & b & b & b \\ -b & 0 & b & b \\ -b & 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

sehingga dengan OBE diperoleh

$$A_4^{-1} = \begin{bmatrix} b^{-1} & -b^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & b^{-1} & -b^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & b^{-1} & -b^{-1} \\ b^{-1} & -b^{-1} & 0 & b^{-1} \end{bmatrix} \tag{3}$$

Dengan cara yang sama, untuk $n = 5$ hingga $n = 9$ diperoleh invers matriks $RSFPLRcircfr\ (0, b, \ldots, b)$ ordo 5 x 5 sampai ordo 9 x 9 yaitu

$$A_5^{-1} = \begin{bmatrix} b^{-1} & -b^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^{-1} & -b^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^{-1} & -b^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^{-1} & -b^{-1} \\ b^{-1} & -b^{-1} & 0 & 0 & b^{-1} \end{bmatrix}$$

(4)

$$A_6^{-1} = \begin{bmatrix} b^{-1} & -b^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^{-1} & -b^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^{-1} & -b^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^{-1} & -b^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b^{-1} & -b^{-1} \\ b^{-1} & -b^{-1} & 0 & 0 & 0 & b^{-1} \end{bmatrix}$$

(5)

$$A_7^{-1} = \begin{bmatrix} b^{-1} & -b^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^{-1} & -b^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^{-1} & -b^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^{-1} & -b^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b^{-1} & -b^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b^{-1} & -b^{-1} \\ b^{-1} & -b^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & b^{-1} \end{bmatrix}$$

(6)

$$A_8^{-1} = \begin{bmatrix} b^{-1} & -b^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^{-1} & -b^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^{-1} & -b^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^{-1} & -b^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b^{-1} & -b^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b^{-1} & -b^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b^{-1} & -b^{-1} \\ b^{-1} & -b^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b^{-1} \end{bmatrix}$$

(7)

$$A_9^{-1}=\begin{bmatrix} b^{-1} & -b^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^{-1} & -b^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^{-1} & -b^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^{-1} & -b^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b^{-1} & -b^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b^{-1} & -b^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b^{-1} & -b^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b^{-1} & -b^{-1} \\ b^{-1} & -b^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b^{-1} \end{bmatrix}.$$

(8)

Dari Persamaan (3) hingga Persamaan (8) diduga bahwa

$$A_n^{-1}=\begin{bmatrix} b^{-1} & -b^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^{-1} & -b^{-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^{-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b^{-1} & -b^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b^{-1} & -b^{-1} \\ b^{-1} & -b^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & b^{-1} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa dugaan A_n^{-1} untuk matriks $RSFPLRcircfr$ $\left(0,b,b,b\right)$ benar dan dinyatakan dalam Teorema 1 berikut.

Teorema 1. Diberikan A_n suatu matriks *RSFPLRcircfr (0,b...,b)* berordo $n\times n$ $\left(n \geq 4\right)$ dengan $b \neq 0, b\in R$ maka invers dari matriks A_n adalah

$$A_n^{-1}=\begin{bmatrix} b^{-1} & -b^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^{-1} & -b^{-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^{-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b^{-1} & -b^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b^{-1} & -b^{-1} \\ b^{-1} & -b^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & b^{-1} \end{bmatrix}$$

(9)

dan dapat ditulis sebagai

$$A_n^{-1}=\left[a_{ij}\right]; \qquad i,j=1,2,...,n$$

dengan

$$a_{ij}=\begin{cases} b^{-1}, & \text{jika } i=j \text{ atau } (i=n,\, j=1) \\ -b^{-1}, & \text{jika } (j=i+1, i=1,2,..,n-1) \text{ atau } (i=n,\, j=2) \\ 0, & \text{untuk } i,\, j \text{ lainnnya.} \end{cases}$$

Bukti.

Berdasarkan Definisi 1, maka pembuktian Teorema 1 dilakukan dengan menunjukkan bahwa terdapat matriks identitas I sedemikian sehingga $A_n^{-1} A_n = A_n A_n^{-1} = I$.

Pembuktian $A_n^{-1} A_n = I$ (pembuktian invers kiri) yaitu mengalikan Persamaan (9) dan Persamaan (2) sebagai berikut.

$$A_n^{-1} A_n = \begin{bmatrix} b^{-1} & -b^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^{-1} & -b^{-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^{-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b^{-1} & -b^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b^{-1} & -b^{-1} \\ b^{-1} & -b^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & b^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & b & b & ... & b & b & b \\ -b & b & b & ... & b & b & b \\ -b & 0 & b & ... & b & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -b & 0 & 0 & 0 & b & b & b \\ -b & 0 & 0 & 0 & 0 & b & b \\ -b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= I$$

Hal ini dapat dianalisa sebagai berikut,

a) Untuk entri i_{11} , jika diperhatikan perkalian dua matriks tersebut, untuk baris ke-1 pada matriks A_n^{-1} memiliki 2 entri yang bernilai selain nol sedangkan untuk kolom ke-1 pada matriks A_n memiliki $(n-1)$ entri yang bernilai selain nol. Apabila baris dan kolom tersebut dikalikan, maka akan menghasilkan nilai 1.

b) Untuk entri i_{22} , jika diperhatikan perkalian dua matriks tersebut, untuk baris ke-2 pada matriks A_n^{-1} memiliki 2 entri yang bernilai selain nol sedangkan untuk kolom ke-2 pada matriks A_n memiliki 2 entri yang bernilai selain nol. Apabila baris dan kolom tersebut dikalikan, maka akan menghasilkan nilai 1.

c) Untuk entri i_{33} , jika diperhatikan perkalian dua matriks tersebut, untuk baris ke-3 pada matriks A_n^{-1} memiliki 2 entri yang bernilai selain nol sedangkan untuk kolom ke-3 pada matriks A_n memiliki 3 entri yang bernilai selain nol. Apabila baris dan kolom tersebut dikalikan, maka akan menghasilkan nilai 1.

d) Begitu seterusnya hingga untuk entri $i_{n-2,n-2}$, jika diperhatikan perkalian dua matriks tersebut, untuk baris ke-$(n-2)$ pada matriks A_n^{-1} memiliki 2 entri yang bernilai selain nol sedangkan untuk kolom ke- $(n-2)$ pada matriks A_n memiliki $(n-2)$ entri yang bernilai selain nol. Apabila baris dan kolom tersebut dikalikan, maka akan menghasilkan nilai 1.

e) Untuk entri $i_{n-1,n-1}$, jika diperhatikan perkalian dua matriks tersebut, untuk baris ke- $(n-1)$ pada matriks A_n^{-1} memiliki 2 entri yang bernilai selain nol sedangkan untuk kolom ke- $(n-1)$ pada matriks A_n memiliki $(n-1)$ entri yang bernilai selain nol. Apabila baris dan kolom tersebut dikalikan, maka akan menghasilkan nilai 1.

f) Untuk entri i_{nn} , jika diperhatikan perkalian dua matriks tersebut, untuk baris ke- n pada matriks A_n^{-1} memiliki 3 entri yang bernilai selain nol sedangkan untuk kolom ke- n pada matriks A_n memiliki n entri yang bernilai selain nol. Apabila baris dan kolom tersebut dikalikan, maka akan menghasilkan nilai 1.

g) Untuk entri lainnya selain entri pada diagonal utama, yaitu entri i_{kl} dengan $k \neq l$, jika diperhatikan perkalian dua matriks tersebut, untuk baris ke- k pada matriks A_n^{-1} dikalikan dengan kolom ke- l pada matriks A_n akan selalu menghasilkan nilai nol.

Sebaliknya, untuk pembuktian $A_n\, A_n^{-1} = I$ (pembuktian invers kanan) yaitu dengan tehnik analisa yang sama diperoleh

$$A_n\, A_n^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & b & b & \dots & b & b & b \\ -b & b & b & \dots & b & b & b \\ -b & 0 & b & \dots & b & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -b & 0 & 0 & 0 & b & b & b \\ -b & 0 & 0 & 0 & 0 & b & b \\ -b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b^{-1} & -b^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^{-1} & -b^{-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^{-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b^{-1} & -b^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b^{-1} & -b^{-1} \\ b^{-1} & -b^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & b^{-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= I$$

Berdasarkan pembuktian di atas, maka terdapat matriks identitas sedemikian sehingga $A_n^{-1}\, A_n = A_n\, A_n^{-1} = I$, sehingga Teorema 1 terbukti.
■

Contoh 1.

Diberikan matriks $RSFPLRcircfr\left(0,\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ yang disajikan ke dalam matriks C_5 berikut

$$C_5 = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Dari matriks C_5 diketahui $n=5, b=\sqrt{2}$ sehingga menurut Teorema 1, entri-entri dari $C_5^{-1}=[c_{ij}];\ i,j=1,2,3,4,5$ ditentukan sebagai berikut.

Untuk $i=j$ maka $c_{11}=c_{22}=c_{33}=c_{44}=c_{55}=\left(\sqrt{2}\right)^{-1}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$ dan untuk $i=5, j=1$ maka $c_{51}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Untuk $j=i+1,\ \ i=1,2,3,4$ diperoleh $c_{12}=c_{23}=c_{34}=c_{45}=\left(-\sqrt{2}\right)^{-1}=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ dan untuk $i=5, j=2$ maka $c_{52}=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Sedangkan untuk entri-entri lainnya bernilai nol yaitu $c_{13}=c_{14}=c_{15}=c_{21}=c_{24}=c_{25}=c_{31}=c_{32}=c_{35}=c_{41}=c_{42}=c_{43}=c_{53}=c_{54}=0$ sehingga diperoleh

$$\left(C_5\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan, maka diperoleh kesimpulan bahwa bentuk umum invers dari matriks $RSFPLRcircfr\left(0,b,\ldots,b\right)$ berordo $n\,x\,n,(n\geq 4)$ adalah

$$A_n^{-1}=\left[a_{ij}\right]; \qquad i,j=1,2,\ldots,n$$

dengan

$$a_{ij} = \begin{cases} b^{-1}, & \text{jika } i = j \text{ atau } (i = n,\ j = 1) \\ -b^{-1}, & \text{jika } (j = i+1, i = 1, 2, .., n-1) \text{ atau } (i = n,\ j = 2) \\ 0, & \text{untuk } i, j \text{ lainnnya.} \end{cases}$$

Daftar Pustaka

[1] Anton, Howard., dan Chris, Rorres., *Dasar-Dasar Aljabar Linear Versi Aplikasi*, Edisi Ke-tujuh, Erlangga, Jakarta, 2004.

[2] Aryani F, dkk., *Determinan Matriks FLDcircr Bentuk Khusus Menggunkan Ekspansi Kofaktor*. Prosiding Seminar Nasional Teknologi Informasi, Komunikasi dan Industri.UIN Sultan Syarif Kasim Riau, 2018. 682-688.

[3] Davis, Philip J., *Circulan Matrices: Division of Applied Mathematics Brown University* New York. 1979.

[4] Jiang, Xiaoyu dan Hong, Kicheon., Exact Determinants of some Special Circulant Matrices Involving Four Kinds of Famous Numbers, *Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis*, 2014. 1-12.

[5] Jiang, Zhaolin., and Benxu, Zong., Efficient Algorithm For Finding The Inverse And The Group Inverse Of FLScirc Matrix, *Journal of Application Math and Computing*, 18(12), 2005.

[6] Pan X, Qin M., *The Discriminance for FLDcircr Matrices and the Fast Algorithm of Their Inverse and Generalized Inverse*. Shanghai. 2015.

[7] Rahma AN, dkk., *Determinan Matriks FLScircr Bentuk Khusus* $n\,x\,n, n \geq 3$ *menggunakan metode kondensasi Chio*, Jurnal Sains Matematika dan Statistika, 5(10), 2019. 23-29.

[8] Rahma AN, dkk., *Determinan matriks Blok 2 x 2 dalam aplikasi matriks FLDCirc*$_r$ *Bentuk khusus*, Jurnal Sains Matematika dan Statistika, 4(2), 2019.

[9] Rinaldi,M. *Matematika Diskrit.* Edisi 5: Informatika, 2005.