Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 6, No. 1, Januari 2020
ISSN 2460-4542, e-ISSN 2615-8663

Trace Matriks Berbentuk Khusus 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Fitri Aryani[1], Rio Andesta[2], Corry Corazon Marzuki[3]
[1,2,3]Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: khodijah_fitri@uin-suska.ac.id, rheolawangsewu@gmail.com

Abstrak

Penelitian ini membahas mengenai *trace* matriks berbentuk khusus 3×3 berpangkat bilangan bulat positif. Langkah pertama yang dilakukan mendapatkan bentuk umum perpangkatan matriks $(\mathrm{A}_3)^{\mathrm{n}}$, serta membuktikannya menggunakan induksi matematika. Selanjutnya mendapatkan bentuk umum *trace* $(\mathrm{A}_3)^{\mathrm{n}}$, dan membuktikan bentuk umum tersebut dengan pembuktian langsung. Diperoleh bentuk umum dari $(\mathrm{A}_3)^{\mathrm{n}}$ dan *trace* $(\mathrm{A}_3)^{\mathrm{n}}$.
Katakunci: koefisien binomial, induksi matematika, kombinasi, perkalian matriks, *trace*.

Abstract

This paper discusses the trace of positive integer power of 3×3 *special matrices. The first step is to get a general form of the matrix* $(A_3)^n$*, and prove it to use mathematical induction. Then get the general trace form* $(A_3)^n$*, and prove the general form with direct proof. There is a general form of* $(A_3)^n$*and trace* $(A_3)^n$*and its application in the example.*

Keywords*: binomial coefficient, mathematical induction, combination, multiplication of matrix, trace.*

Pendahuluan

Trace matriks bujur sangkar dinyatakan dengan $tr\,(A)$, didefinisikan sebagai jumlah anggota-anggota pada diagonal utama A. *Trace* A tidak terdefinisi jika A bukan matriks bujur sangkar. Menghitung *trace* suatu matriks tidaklah begitu sulit, namun apabila matriks tersebut adalah matriks yang berpangkat n, maka untuk menghitung *trace*nyaharus dilakukan perkalian matriks sebanyak $n$kali. Selanjutnya dapat ditentukan *trace* matriks berpangkat tersebut. Sehingga untuk menghitung *trace* matriks berpangkat cukup rumit. Artinya, hal ini cukup menarik untuk diteliti bagaimana menemukan formula yang tepat untuk menghitung *trace* matriks berpangkat tanpa menghitung perpangkatan atau perkalian matriks. Dengan hanya mensubtitusi entri-entri matriks ke dalam formula, maka diperolehlah nilai *trace* matriks berpangkat tersebut, tanpa harus melalui proses yang panjang pada pemangkatan atau perkalian matriks.

Penghitungan *trace* matriks berpangkat telah banyak diteliti. Datta [9] telah mendapatkan algoritma penghitungan *trace* matriks berpangkat $Tr\left(A^k\right)$, dengan k adalah bilangan bulat dan A adalah matriks Hassenberg dengan unit *codiagonal*. Selanjutnya Chu. Mt [8] telah membahas mengenai kalkulasi simbolik pada *trace* matriks tridiagonal yang berpangkat. Tahun 1990 Pan.V [12] pada makalahnya menentukan nilai eigen suatu matriks simetris, juga memberikan prosedur dasar dalam mengestimasi *trace* (A^n)dan (A^{-n}) dengan n adalah bilangan bulat. Menurut Zarelua [15] pada teori bilangan dan kombinatorik, *trace* matriks berpangkat bilangan bulat berhubungan dengan kekongruenan Euler, yaitu:

$$Tr(Ap^r) = Tr(Ap^{r-1}) mod(p^r)$$

untuk semua matriks A bilangan bulat, p adalah bilangan prima dan r adalah bilangan bulat. Makalah tersebut juga membahas mengenai invariant pada sistem dinamik yang digambarkan sebagai bentuk *trace* matriks berpangkat bilangan bulat. Contoh yang diberikan pada makalah tersebut adalah bilangan Lefschetz.

Pada bidang analisis jaringan tepatnya pada *triangle counting in a graph*, menurut Avron [6] ketika menganalisis suatu jaringan yang kompleks, masalah terpenting yaitu menghitung bilangan total segitiga pada graf sederhana terhubung. Bilangan tersebut sama dengan $Tr(A^3)/6$, dengan A adalah matriks ketetanggaan pada graf. Menurut Brezinski [7],*trace* dari matriks berpangkat sering dibahas pada beberapa bidang matematika, seperti, Analisis Jaringan, Teori Bilangan, Sistem Dinamik, Teori Matriks dan Persamaan Diferensial. Pembahasan mengenai formula *trace* matriks berpangkat juga telah dibahas oleh Pahade [10] yang mendapatkan bentuk umum *trace* matriks orde 2×2 berpangkat bilangan bulat positif. Dalam makalah tersebut terdapat dua bentuk umum *trace* matriks berpangkat untuk n genap, yaitu:

$$tr(A^n) = \sum_{r=0}^{n/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)]\cdots\left[n-\left(r+(r-1)\right)\right]\left(det(A)\right)^r\left(tr(A)\right)^{n-2r} \quad (1)$$

Kedua, formula *trace* matriks berpangkat untuk n ganjil, yaitu:

$$tr(A^n) = \sum_{r=0}^{n-1/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)]\cdots\left[n-\left(r+(r-1)\right)\right]\left(det(A)\right)^r\left(tr(A)\right)^{n-2r} \quad (2)$$

Aryani [3] membahas mengenai *trace* matriks orde 2×2 berpangkat bilangan bulat negatif. Dalam makalah tersebut terdapat dua bentuk formula *trace* matriks berpangkat. Pertama, formula *trace* matriks berpangkat untuk n genap, yaitu:

$$tr(A^n) = \frac{\sum_{r=0}^{n/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)]\cdots\left[n-\left(r+(r-1)\right)\right]\left(det(A)\right)^r\left(tr(A)\right)^{n-2r}}{\left(det(A)\right)^n} \quad (3)$$

Kedua, formula *trace* matriks berpangkat untuk n ganjil, yaitu:

$$tr(A^n) = \frac{\sum_{r=0}^{n-1/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)]\cdots\left[n-\left(r+(r-1)\right)\right]\left(det(A)\right)^r\left(tr(A)\right)^{n-2r}}{\left(det(A)\right)^n} \quad (4)$$

Aryani [4] membahas mengenai formula *trace* matriks berbentuk khusus orde 2×2 berpangkat bilangan bulat positif. Makalah tersebut membahas mengenai bentuk umum *trace* matriks berbentuk khusus 2×2 berpangkat bilangan bulat positif untuk n genap dan n ganjil. Matriks yang digunakan adalah $A_{2x2} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}, \forall a, b, \in \mathbb{R}$. Hasil yang diperoleh ada dua bentuk umum. Pertama bentuk umum dari perpangkatan matriks atau A^n yaitu:

$$A^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}} \\ a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix}, & untuknganjil \\ \begin{bmatrix} a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix}, & untukngenap \end{cases}$$

dan yang kedua bentuk umum *trace* matriks berbentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif yaitu:

$$tr(A^n) = \begin{cases} 0 & , \quad untuknganjil \\ 2a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}}, & untukngenap \end{cases}$$

Selain itu, pada tahun yang sama Aryani [5] membahas hal yang sama yaitu membahas mengenai bentuk umum *trace* matriks berbentuk khusus 2×2 berpangkat bilangan bulat negatif untuk n genap dan n ganjil. Matriks yang digunakan adalah $A_{2x2} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}, \forall a. b \in \mathbb{R}$, dengan A mempunyai invers, maka bentuk umum A^{-n} untuk ganjil dan genap yaitu:

$$A^{-n} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}}} \\ \dfrac{1}{a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}}} & 0 \end{bmatrix}, & untuknganjil \\ \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(ab)^{\frac{n}{2}}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(ab)^{\frac{n}{2}}} \end{bmatrix}, & untukngenap \end{cases}$$

dan bentuk umum *trace* matriks berbentuk khusus berpangkat bilangan bulat negatif diperoleh:

$$tr(A^{-n}) = \begin{cases} 0 \quad , & untuknganjil \\ \dfrac{2}{(ab)^{\frac{n}{2}}}, & untukngenap \end{cases}$$

Berdasarkan uraian yang telah dipaparkan di atas penulis tertarik untuk membahas mengenai *trace* matriks 3×3 berbentuk khususberpangkat bilangan bulat positif. Bentuk matriks khusus3×3 yang diteliti adalah sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & b & b \end{bmatrix}, \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Metode dan Bahan Penelitian

Definisi 1 [1] Jika A adalah sebuah matriks bujursangkar, maka dapat didefinisikan pangkat-pangkat bilangan bulat tak negatif A menjadi.

$$A^0 = I \text{ dan } A^n = \underbrace{AA \ldots A}_{nfaktor} \, (n > 0) \tag{5}$$

Definisi 2 [8] Kombinasi r elemen dan n elemen adalah jumlah pemilihan yang tidak terurut r elemen yang diambil dari n buah elemen.. Secara umum rumus kombinasi adalah

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} \tag{6}$$

Teorema 2 [14] Jika k dan r bilangan-bilangan asli dengan $k > r$, maka

$$C(k, r-1) + C(k, r) = C(k+1, r) \tag{7}$$

Teorema 3 [8] Misalkan x dan y adalah peubah, dan n adalah bilangan bulat tak negatif. Maka:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) x^{n-k} y^k \tag{8}$$

Definisi 6 [6] Misalkan $A = [a_{ij}]$ suatu matriks persegi berukuran $n \times n$, maka *trace* dari matriks A didefinisikan sebagai jumlah dari elemen diagonal matriks A dan dinotasikan dengan $tr(A)$. Dinyatakan bahwa *trace* matriks A adalah:

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{9}$$

Teorema 4 [6] Jika A dan B adalah matriks bujursangkar dengan orde yang sama dan c adalah skalar, maka berlaku:

1. $tr(A) = tr(A^T)$ (10)
2. $tr(cA) = ctr(A)$ (11)
3. $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$ (12)
4. $tr(AB) = tr(BA)$ (13)

Salah satu metode pembuktian yang digunakan untuk membuktikan rumus yang diperoleh dari pola rekursif tersebut adalah induksi matematika. Berikut diberikan definisi dari induksi matematika.

Definisi 7 [14] Induksi matematika adalah salah satu metode pembuktian dari banyak teorema dalam teori bilangan maupun dalam matematika lainnya. Induksi matematika merupakan salah satu argumentasi pembuktian suatu teorema atau pernyataan matematika yang semesta pembicaraannya himpunan bilangan bulat atau lebih khusus himpunan bilangan asli.

Misalkan $p(n)$ adalah suatu proporsi/pernyataan yang akan dibuktikan kebenarannya untuk setiap bilangan asli n. Langkah-langkah pembuktiannya dengan induksi matematika adalah sebagai berikut:
Langkah (1) : Ditunjukkan bahwa $p(1)$ benar.
Langkah (2) : Diasumsikan bahwa $p(k)$ benar untuk suatu bilangan asli k dan akan ditunjukkan bahwa $p(k+1)$ juga benar.

Hasil dan Pembahasan

Pembahasan berikut merupakanlangkah-langkah untuk menentukan bentuk umum matriks berbentuk khusus 3×3dan bentuk umum *trace* matriks berbentuk khusus3×3berpangkat bilangan bulat positif**.** Berikut diberikan langkah-langkahnya sebagai berikut:

1. Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & b & b \end{bmatrix}, \forall a, b \in \mathbb{R}$.
2. Hasil perpangkatan matriks A^2 sampai A^{12}.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (a^2+ab) & (a^2+ab) \\ 0 & (ab+b^2) & (ab+b^2) \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (a^3+2(a^2b)+ab^2) & (a^3+2(a^2b)+ab^2) \\ 0 & (a^2b+2(ab^2)+ab^3) & (a^2b+2(ab^2)+ab^3) \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (a^4+3(a^3b)+3(a^2b^2)+ab^3) & (a^4+3(a^3b)+3(a^2b^2)+ab^3) \\ 0 & (a^3b+3(a^2b^2)+3(ab^3)+b^4) & (a^3b+3(a^2b^2)+3(ab^3)+b^4) \end{bmatrix}$$

$$A^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (a^5+4(a^4b)+6(a^3b^2)+4(a^2b^3)+ab^4) & (a^5+4(a^4b)+6(a^3b^2)+4(a^2b^3)+ab^4) \\ 0 & (a^4b+4(a^3b^2)+6(a^2b^3)+4(ab^4)+b^5) & (a^4b+4(a^3b^2)+6(a^2b^3)+4(ab^4)+b^5) \end{bmatrix}$$

$$A^6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (a^6+5(a^5b)+10(a^4b^2)+10(a^3b^3)+5(a^2b^4)+ab^5) & (a^6+5(a^5b)+10(a^4b^2)+10(a^3b^3)+5(a^2b^4)+ab^5) \\ 0 & (a^5b+5(a^4b^2)+10(a^3b^3)+10(a^2b^4)+5(ab^5)+b^6) & (a^5b+5(a^4b^2)+10(a^3b^3)+10(a^2b^4)+5(ab^5)+b^6) \end{bmatrix}$$

$$A^7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (a^7+6(a^6b)+15(a^5b^2)+20(a^4b^3)+15(a^3b^4)+6(a^2b^5)+ab^6) & (a^7+6(a^6b)+15(a^5b^2)+20(a^4b^3)+15(a^3b^4)+6(a^2b^5)+ab^6) \\ 0 & (a^6b+6(a^5b^2)+15(a^4b^3)+20(a^3b^4)+15(a^2b^5)+6(ab^6)+b^7) & (a^6b+6(a^5b^2)+15(a^4b^3)+20(a^3b^4)+15(a^2b^5)+6(ab^6)+b^7) \end{bmatrix}$$

$$A^8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (a^8+7(a^7b)+21(a^6b^2)+35(a^5b^3)+35(a^4b^4)+21(a^3b^5)+7(a^2b^6)+ab^7) & (a^7b+7(a^6b^2)+21(a^5b^3)+35(a^4b^4)+35(a^3b^5)+21(a^2b^6)+7(ab^7)+b^8) \\ 0 & (a^7b+7(a^6b^2)+21(a^5b^3)+35(a^4b^4)+35(a^3b^5)+21(a^2b^6)+7(ab^7)+b^8) & (a^7b+7(a^6b^2)+21(a^5b^3)+35(a^4b^4)+35(a^3b^5)+21(a^2b^6)+7(ab^7)+b^8) \end{bmatrix}$$

$$A^9 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (a^9 + 8(a^8b) + 28(a^7b^2) + 56(a^6b^3) + 70(a^5b^4) + 56(a^4b^5) + 28(a^3b^6) + 8(a^2b^7) + ab^8) & (a^9 + 8(a^8b) + 28(a^7b^2) + 56(a^6b^3) + 70(a^5b^4) + 56(a^4b^5) + 28(a^3b^6) + 8(a^2b^7) + ab^8) \\ 0 & (a^8b + 8(a^7b^2) + 28(a^6b^3) + 56(a^5b^4) + 70(a^4b^5) + 56(a^3b^6) + 28(a^2b^7) + 8(ab^8) + b^9) & (a^8b + 8(a^7b^2) + 28(a^6b^3) + 56(a^5b^4) + 70(a^4b^5) + 56(a^3b^6) + 28(a^2b^7) + 8(ab^8) + b^9) \end{bmatrix}$$

$$A^{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (a^{10} + 9(a^9b) + 36(a^8b^2) + 84(a^7b^3) + 126(a^6b^4) + 126(a^5b^5) + 84(a^4b^6) + 36(a^3b^7) + 9(a^2b^8) + ab^9) & (a^{10} + 9(a^9b) + 36(a^8b^2) + 84(a^7b^3) + 126(a^6b^4) + 126(a^5b^5) + 84(a^4b^6) + 36(a^3b^7) + 9(a^2b^8) + ab^9) \\ 0 & (a^9b + 9(a^8b^2) + 36(a^7b^3) + 84(a^6b^4) + 126(a^5b^5) + 126(a^4b^6) + 84(a^3b^7) + 36(a^2b^8) + 9(ab^9) + b^{10}) & (a^9b + 9(a^8b^2) + 36(a^7b^3) + 84(a^6b^4) + 126(a^5b^5) + 126(a^4b^6) + 84(a^3b^7) + 36(a^2b^8) + 9(ab^9) + b^{10}) \end{bmatrix}$$

Setelah menentukan perpangkatan matriks A^2 sampai A^{12} diduga bentuk umum A^n yaitu:

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{r=0}^{n-1} C(n-1,r)a^{n-r}b^r & \sum_{r=0}^{n-1} C(n-1,r)a^{n-r}b^r \\ 0 & \sum_{r=0}^{n-1} C(n-1,r)a^{n-(r+1)}b^{r+1} & \sum_{r=0}^{n-1} C(n-1,r)a^{n-(r+1)}b^{r+1} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Bentuk pada Persamaan (12) dinyatakan dalam Teorema 5 sebagai berikut:

Teorema 5 : Diberikan matriks dengan bentuk $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & b & b \end{bmatrix}, \forall a, b \in \mathbb{R}$, maka

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \displaystyle\sum_{r=0}^{n-1} C(n-1,r)a^{n-r}b^r & \displaystyle\sum_{r=0}^{n-1} C(n-1,r)a^{n-r}b^r \\ 0 & \displaystyle\sum_{r=0}^{n-1} C(n-1,r)a^{n-(r+1)}b^{r+1} & \displaystyle\sum_{r=0}^{n-1} C(n-1,r)a^{n-(r+1)}b^{r+1} \end{bmatrix}$$

Bukti : Pembuktian menggunakan induksi matematika sebagai berikut:

Misal $p(n)$: $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{r=0}^{n-1} C(n-1,r)a^{n-r}b^r & \sum_{r=0}^{n-1} C(n-1,r)a^{n-r}b^r \\ 0 & \sum_{r=0}^{n-1} C(n-1,r)a^{n-(r+1)}b^{r+1} & \sum_{r=0}^{n-1} C(n-1,r)a^{n-(r+1)}b^{r+1} \end{bmatrix}$

1) Akan ditunjukkan $p(1)$ benar, yaitu: $A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C(0,0)a^1b^0 & C(0,0)a^1b^0 \\ 0 & C(0,0)a^0b^1 & C(0,0)a^0b^1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C(0,0)a^1b^0 & C(0,0)a^1b^0 \\ 0 & C(0,0)a^0b^1 & C(0,0)a^0b^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & b & b \end{bmatrix} = A = A^1 .$$

2) Asumsikan $p(k)$ benar, yaitu:

$$p(k): A^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{r=0}^{k-1} C(k-1,r)a^{k-r}b^r & \sum_{r=0}^{k-1} C(k-1,r)a^{k-r}b^r \\ 0 & \sum_{r=0}^{k-1} C(k-1,r)a^{k-(r+1)}b^{r+1} & \sum_{r=0}^{k-1} C(k-1,r)a^{k-(r+1)}b^{r+1} \end{bmatrix}$$

Akan ditunjukkan $p(k+1)$ juga benar, yaitu:

$$p(k+1): A^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\sum_{r=0}^{k} C(k,r)a^{k+1-r}b^r) & (\sum_{r=0}^{k} C(k,r)a^{k+1-r}b^r) \\ 0 & (\sum_{r=0}^{k} C(k,r)a^{k-r}b^{r+1}) & (\sum_{r=0}^{k} C(k,r)a^{k-r}b^{r+1}) \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa:

$$A^{k+1} = A^k A$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{r=0}^{k-1} C(k-1,r)a^{k-r}b^r & \sum_{r=0}^{k-1} C(k-1,r)a^{k-r}b^r \\ 0 & \sum_{r=0}^{k-1} C(k-1,r)a^{k-(r+1)}b^{r+1} & \sum_{r=0}^{k-1} C(k-1,r)a^{k-(r+1)}b^{r+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & b & b \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (a\sum_{r=0}^{k-1} C(k-1,r)a^{k-r}b^r + b\sum_{r=0}^{k-1} C(k-1,r)a^{k-r}b^r) & (a\sum_{r=0}^{k-1} C(k-1,r)a^{k-r}b^r + b\sum_{r=0}^{k-1} C(k-1,r)a^{k-r}b^r) \\ 0 & (a\sum_{r=0}^{k-1} C(k-1,r)a^{k-(r+1)}b^{r+1} + b\sum_{r=0}^{k-1} C(k-1,r)a^{k-(r+1)}b^{r+1}) & (a\sum_{r=0}^{k-1} C(k-1,r)a^{k-(r+1)}b^{r+1} + b\sum_{r=0}^{k-1} C(k-1,r)a^{k-(r+1)}b^{r+1}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\sum_{r=0}^{k-1} C(k-1,r)a^{k+1-r}b^r + \sum_{r=0}^{k-1} C(k-1,r)a^{k-r}b^{r+1}) \\ 0 & (\sum_{r=0}^{k-1} C(k-1,r)a^{k-r}b^{r+1} + \sum_{r=0}^{k-1} C(k-1,r)a^{k-(r+1)}b^{r+2}) \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 0 \\ (\sum_{r=0}^{k-1} C(k-1,r)a^{k+1-r}b^{r} + \sum_{r=0}^{k-1} C(k-1,r)a^{k-r}b^{r+1}) \\ (\sum_{r=0}^{k-1} C(k-1,r)a^{k-r}b^{r+1} + \sum_{r=0}^{k-1} C(k-1,r)a^{k-(r+1)}b^{r+2}) \end{matrix}\right]$$

Selanjutnya untuk suku kedua pada entri a_{22},a_{23}, a_{32} dan a_{33} ubah r menjadi $r-1$, sehingga diperoleh:

$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\sum_{r=0}^{k-1} C(k-1,r)a^{k+1-r}b^{r} + \sum_{r=1}^{k} C(k-1,r-1)a^{k+1-r}b^{r}\right) & (\sum_{r=0}^{k-1} C(k-1,r)a^{k+1-r}b^{r} + \sum_{r=1}^{k} C(k-1,r-1)a^{k+1-r}b^{r}) \\ 0 & (\sum_{r=0}^{k-1} C(k-1,r)a^{k-r}b^{r+1} + \sum_{r=1}^{k} C(k-1,r-1)a^{k-r}b^{r+1}) & (\sum_{r=0}^{k-1} C(k-1,r)a^{k-r}b^{r+1} + \sum_{r=1}^{k} C(k-1,r-1)a^{k-r}b^{r+1}) \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan dijabarkan penjumlahan pada entri a_{22},a_{23}, a_{32} dan a_{33} yaitu:

$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C(k-1,0)a^{k+1}b^{0} + \sum_{r=1}^{k-1} C(k-1,r)a^{k+1-r}b^{r} + \sum_{r=1}^{k-1} C(k-1,r-1)a^{k+1-r}b^{r} + C(k-1,k-1)a^{1}b^{k} & C(k-1,0)a^{k+1}b^{0} + \sum_{r=1}^{k-1} C(k-1,r)a^{k+1-r}b^{r} + \sum_{r=1}^{k-1} C(k-1,r-1)a^{k+1-r}b^{r} + C(k-1,k-1)a^{1}b^{k} \\ 0 & C(k-1,0)a^{k}b^{1} + \sum_{r=1}^{k-1} C(k-1,r)a^{k-r}b^{r+1} + \sum_{r=1}^{k-1} C(k-1,r-1)a^{k-r}b^{r+1} + C(k-1,k-1)a^{0}b^{k+1} & C(k-1,0)a^{k}b^{1} + \sum_{r=1}^{k-1} C(k-1,r)a^{k-r}b^{r+1} + \sum_{r=1}^{k-1} C(k-1,r-1)a^{k-r}b^{r+1} + C(k-1,k-1)a^{0}b^{k+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C(k-1,0)a^{k+1}b^{0} + \left(\sum_{r=1}^{k-1} [C(k-1,r) + C(k-1,r-1)]\, a^{k+1-r}b^{r}\right) + C(k-1,k-1)a^{1}b^{k} & C(k-1,0)a^{k+1}b^{0} + \left(\sum_{r=1}^{k-1} [C(k-1,r) + C(k-1,r-1)]\, a^{k+1-r}b^{r}\right) + C(k-1,k-1)a^{1}b^{k} \\ 0 & C(k-1,0)a^{k}b^{1} + \left(\sum_{r=1}^{k-1} [C(k-1,r) + C(k-1,r-1)]a^{k-r}b^{r+1}\right) + C(k-1,k-1)a^{0}b^{k+1} & C(k-1,0)a^{k}b^{1} + \left(\sum_{r=1}^{k-1} [C(k-1,r) + C(k-1,r-1)]a^{k-r}b^{r+1}\right) + C(k-1,k-1)a^{0}b^{k+1} \end{bmatrix}$$

Dengan mengaplikasikan Persamaan (5) diperoleh:

$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\sum_{r=0}^{k} C(k,r)a^{k+1-r}b^{r}) & (\sum_{r=0}^{k} C(k,r)a^{k+1-r}b^{r}) \\ 0 & (\sum_{r=0}^{k} C(k,r)a^{k-r}b^{r+1}) & (\sum_{r=0}^{k} C(k,r)a^{k-r}b^{r+1}) \end{bmatrix} \quad \blacksquare.$$

Bentuk umum *trace* matriks pada Persamaan (13) dinyatakan dalam Teorema 6 sebagai berikut:

Teorema 6 : Diberikan matriks dengan bentuk $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & b & b \end{bmatrix}, \forall a, b \in \mathbb{R}$,

maka $tr(A^n) = 1 + (a+b)^n$, $n$bilangan bulat positif.

Bukti :

Pembuktian teorema tersebut menggunakan aturan pembuktian langsung. Diketahui bentuk umum A^n pada Teorema 5 yaitu:

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{r=0}^{n-1} C(n-1,r)a^{n-r}b^{r} & \sum_{r=0}^{n-1} C(n-1,r)a^{n-r}b^{r} \\ 0 & \sum_{r=0}^{n-1} C(n-1,r)a^{n-r+1}b^{r+1} & \sum_{r=0}^{n-1} C(n-1,r)a^{n-r+1}b^{r+1} \end{bmatrix}$$

Sehingga

$$tr(A^n) = 1 + \sum_{r=0}^{n-1} C(n-1,r)a^{n-r}b^{r} + \sum_{r=0}^{n-1} C(n-1,r)a^{n-r+1}b^{r+1}$$

Selanjutnya mengubah setiap r menjadi $r-1$ pada notasi sigma kedua, sehingga diperoleh:

$$tr(A^n) = 1 + \sum_{r=0}^{n-1} C(n-1,r)a^{n-r}b^{r} + \sum_{r=1}^{n} C(n-1,r-1)a^{n-r}b^{r}$$

Selanjutnya dijabarkan menjadi:

$$tr(A^n) = (1 + C(n-1,0)a^{n}b^{0} + \sum_{r=1}^{n-1} C(n-1,r)a^{n-r}b^{r}$$

$$+ \sum_{r=1}^{n-1} C(n-1,r-1)a^{n-r}b^{r} + C(n-1,n-1)a^{0}b^{n}))$$

$$= (1 + C(n-1,0)a^{n}b^{0} + (\sum_{r=1}^{n-1} [C(n-1,r) + C(n-1,r-1)]\, a^{n-r}b^{r})$$

$$+ C(n-1,n-1)a^{0}b^{n})$$

Dengan menggunakan Persamaan (5) diperoleh:

$$tr(A^n) = (1 + C(n-1,0)a^{n}b^{0} + \sum_{r=0}^{n} C(n,r)a^{n-r}b^{r} + C(n-1,n-1)a^{0}b^{n})$$

Berdasarkan Persamaan (6), bentuk tersebut dapat disederhanakan menjadi:

$$tr(A^n) = 1 + \sum_{r=0}^{n} C(n,r)a^{n-r}b^r$$
$$= 1 + (a+b)^n \qquad \blacksquare$$

Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dipaparkan di atas tentang *trace* matriks yang berbentuk khusus 3×3 berpangkat bilangan bulat positif, dengan matriks A yang berbentuk sebagai berikut :

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & b & b \end{bmatrix}$ dengan $a, b \in \mathbb{R}$, maka diperoleh:

(i) Bentuk umum matriks berpangkat bilangan bulat positif dari matriks A adalah :

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{r=0}^{n-1} C(n-1,r)a^{n-r}b^r & \sum_{r=0}^{n-1} C(n-1,r)a^{n-r}b^r \\ 0 & \sum_{r=0}^{n-1} C(n-1,r)a^{n-(r+1)}b^{r+1} & \sum_{r=0}^{n-1} C(n-1,r)a^{n-(r+1)}b^{r+1} \end{bmatrix}.$$

(ii) Bentuk umum *trace* matriks A^n dengan n bilangan bulat positif diperoleh: $tr(A^n) = 1 + (a+b)^n$.

Daftar Pustaka

[1] Anton, Howard, *Elementary Linear Algebra, Fifth Ed.*, JohnWiley & Sons, New York, 1987.
[2] Anton, Howard & Rorres, Chris, "*Dasar-Dasar Aljabar inear Versi Aplikasi"*, Edisi Ketujuh, Jakarta, Erlangga, 2004.
[3] Aryani, F, dan Solihin, M. Trace Matriks Real Berpangkat Bilangan Bula Negatif, *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, Vol.3 (2), 2017.
[4] Aryani, F, dan Titik Fatonah, M. Trace Matriks Berbentuk Khusus 2×2 Berpangkat Bilangan Bulat Positif, *Prosiding Semirata Medan*, 2018.
[5] Aryani, F, dan Yulianis. Trace Matriks Berbentuk Khusus 2×2 Berpangkat Bilangan Bulat Negatif, *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, Vol.4 (2), 2018.
[6] Avron, H., "Counting Triangles in Large Graphs Using Randomized Matrix Trace Estimation". *Proceeding of Kdd-Ldmta'10*, 2010.
[6] Brezinski, C, P.FikadanM.Mitrouli, Estimations of the Trace of Power of Positive by Extrapolation of the Moment, *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 39, 144-155, 2012.
[7] Chu, M.T, and Raleigh. Symbolic Calculation of the Trace of the Power of a Tridiagonal Matrix, *Computing*, 35, 257-268. 1985.
[8] Data, B.N, dan Datta, K. An Algorithm for Computing Power of a Hessenberg Matrix and its Applictions, *Linear Algebra and its Application*, 14, 273-284. 1976.
[9] J.E.Gentle, *Matrix Algebra*, Springer, NewYork, 2007.
[10] Pahade, J., and M. Jha, Trace of Positive Integer Power of Real 2×2 matrices, *Advancesin Linear Algebra & Matrix Theory*, 5, 150-155, 2015.
[11] Pan, V. Estimating the Extremal Eigenvalues of a Symetric Matrix, *Computers & Mathematics with Applications*, 20, 17-22. 1990.
[12] K. H. Rossen, *Discrete Mathematics and Its Applications, Seventh Ed.*, McGraw-Hill, Singapore, 2007.
[13] R. Larson, *Elementary Linear Algebra, Seventh, Ed.*, Brooks/Cole. Boston, 2013.
[14] Sukirman, 2006, "*Pengantar Teori Bilangan*", Yogyakarta, Hanggar Kreator.

[15] Zarelua, A.V. "On Congruences for the Trace of Power of Some Matrices". *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 263, 78-98, 2008.