Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 6, No. 1, Januari 2020
ISSN 2460-4542, e-ISSN 2615-8663

Metode Eliminasi Gauss untuk Penyelesaian Sistem Kongruensi Linier

Ade Novia Rahma[1], Rahmawati[2], Wita Wahyuni[3]
[1,2,3] Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: ade.novia.rahma@uin-suska.ac.id, rahmawati.@uin-suska.ac.id,witawahyuni0907@gmail.com

ABSTRAK

Sistem kongruensi linier dapat diselesaikan dengan dua metode yaitu metode eliminasi-substitusi dan invers matriks. Pada tulisan ini masalah yang dibahas adalah sistem kongruensi linier memiliki tepat satu solusi yang melibatkan beberapa variabel dengan modulo yang sama. Persoalan dibatasi pada penyelesaian sistem kongruensi linier 4 kongruensi 4 variabel menggunakan metode eliminasi Gauss-Jordan tahap demi tahap yang dapat digunakan untuk mereduksi matriks menjadi bentuk eselon baris tereduksi, sehingga diperoleh solusi dari penyelesaian sistem kongruensi linier. Kemudian, untuk menyelesaikan sistem kongruensi linier adalah dimana pembagian selalu dapat diganti dengan perkalian invers $modulo\ m$. Catatan setiap operasi perkalian, penjumlahan dan pengurangan yang dilakukan terhadap $modulo\ m$. Hasil yang diperoleh adalah bentuk umum dari selesaian sistem kongruensi linier 4 kongruensi 4 variabel

Katakunci: Sistem kongruensi linier, metode eliminasi Gauss, modulo

ABSTRACT

Linier congruence system can be solved by two methods, the method of elimination-substitution and matrix inversion. In this paper the problem discussed is a linier congruence system having exactly one solution involving several variables with the same modulo. The problem is limited to the completion of linier congruence system 4 congruence of 4 variables using the step-by-step Gauss elimination methods that can be used to reduce the matrix to reduced row echelon form, so that a solutions is obtained from the linier congruence solution. Then, to solve the linier congruence system is where the division can always be replaced by multiplication with inverse modulo m. With a note of each multiplication operation, addition and subtraction performed on the module m. The results obtained are getting a general from of the value of the linier congruence system 4 congruence 4 variable.

Keywords: *linier congruence system, Gauss elimination methods, modulo*

Pendahuluan

Teori bilangan merupakan salah satu cabang matematika yang penting dan banyak manfaatnya karena teori-teorinya dapat diterapkan dalam kehidupan sehari-hari. Selain itu teori bilangan juga merupakan salah satu dari beberapa cabang matematika klasik yang sudah lama dipelajari dan dikembangkan oleh banyak matematikawan. Pada awalnya teori bilangan dipelajari dan dikembangkan sebagai kesenangan dan pemenuhan rasa ingin tahu belaka, tetapi saat ini beberapa cabang dari teori bilangan telah mendapatkan tempat sebagai alat dari teknologi modern [6].

Salah satu pokok bahasan dalam teori bilangan adalah kongruensi linier yang serupa dengan persamaan linier, tetapi dengan koefisien dan solusinya himpunan bilangan modulo, yang mana semesta pembicaraannya adalah bilangan bulat. Sistem kongruensi linier merupakan suatu sistem yang terdiri lebih dari satu kongruensi dan variabel dan mempunyai modulo yang sama [2]. Mengingat kongruensi linier yang serupa dengan persamaan linier berarti metode-metode untuk menyelsaikan sistem persamaan linier bisa juga untuk menyelesaiakan kongruensi linier, Terkait dengan pernyataan tersebut menyelesaikan sistem kongruensi linier merupakan salah satu penelitian yang menarik untuk dikaji.

Beberapa penelitian yang membahas tentang sistem kongruensi linier , yaitu Kurnia Era Wati (2009) menjelaskan sistem konguensi linier mempunyai selesaian dan tidak mempunyai selesaian serta menjelaskan cara menyelesaikan sistem kongruensi linier tiga kongruensi tiga variabel. Madinatuz Zuhroh (2011), penulis mengkaji sistem kongruensi linier simultan yang mempunyai selesaian dan tidak mempunyai selesaian dengan menggunakan konsep keterbagian.

Dari beberapa penelitian di atas, penulis tertarik untuk melakukan penelitian tentang sistem kongruensi linier dengan metode eliminasi gauss dengan tujuan bahwa untuk menyelesaikan sistem kongruensi linier dapat diselesaikan banyak metode salah satu nya dengan metode eliminasi gauss.

Metode dan Bahan Penelitian

Adapun teori pendukung yang penulis gunakan dalam menyusun penelitian ini adalah

Definisi 1 [3] Jika m suatu bilangan bulat positif, maka a kongruen dengan b modulo m (ditulis $a \equiv b\ (mod\ m)$) bila m membagi $(a-b)$. Jika m tidak membagi $(a-b)$ maka dikatakan bahwa a tidak kongruen dengan b modulo m (ditulis $a \not\equiv b\ (mod\ m)$).

Definisi 2 [3] Kongruensi linier adalah suatu kongruensi, variabelnya berpangkat paling tinggi satu. Bentuk umum kongruensi linier adalah $ax \equiv b\ (mod\ m)$ dengan $a, b, m \in Z, a \neq 0\ (mod\ m)$ dan $m > 0$.

Sistem Kongruensi linier merupakan Kongruensi linier yang mempunyai beberapa kongruensi dan beberapa variable.
Perhatikan sistem kongruensi linier berikut ini:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \equiv b_1(mod\ m)$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \equiv b_2(mod\ m)$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \equiv b_1(mod\ m)$$
$$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 \equiv b_4(mod\ m)$$

Dengan menggunakan notasi matriks, sistem kongruensi linier tersebut ekuivalen dengan kongruensi matriks $AX \equiv B\ (mod\ m)$, dimana :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{14} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{41} & \cdots & a_{44} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix}, dan\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_4 \end{pmatrix}$$

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 6, No. 1, Januari 2020
ISSN 2460-4542, e-ISSN 2615-8663

Suatu sistem kongruensi linier terdiri lebih dari satu kongruensi linier dan variabel yang mempunyai modulo yang sama.

Teorema 1 [3] Misalkan $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ adalah matriks yang elemennya bilangan-bilangan bulat, sedemikian hingga $\det A = \Delta = ad - bc$ relatif prima terhadap bilangan bulat positif m. Maka $A^{-1} = \Delta^{-1} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ adalah invers dari $A\ modulo\ m$.

Teorema 2 [3] Jika $(a, m) = 1$, maka kongruensi linier $ax \equiv b\ (mod\ m)$ memiliki tepat satu solusi.

Teorema 3 [3]Misalkan m suatu bilangan asli dan $(\Delta, m) = 1$ dengan $\Delta = ad - bc$, maka sistem kongruensi linier

$$ax + by = e\ (mod\ m)$$
$$cx + dy = f\ (mod\ m)$$

mempunyai penyelesaian (x, y) dengan

$$x \equiv \Delta^{-1}\ (de - bf)(mod\ m)$$
$$y \equiv \Delta^{-1}\ (af - ce)(mod\ m)$$

dengan Δ^{-1} adalah invers dari Δ modulo m

Selanjutnya dari persamaan kongruensi yang ada pada langkah 1, dapat diperoleh nilai $w, x,\ y$ dan $z\ (mod\ m)$ dengan melakukan substitusi kongruensi.

Hasil dan Pembahasan

Adapun langkah-langkah dalam menyelesaikan sistem kongruensi linier dengan 4 kongruensi 4 variabel menggunakan metode eliminasi Gauss yang dipaparkan di bawah ini.
Diketahui sistem kongruensi linier

$$a_1w + b_1x + c_1y + d_1z \equiv e_1(mod\ m)$$
$$a_2w + b_2x + c_2y + d_2z \equiv e_2(mod\ m)$$

$$a_3w + b_3x + c_3y + d_3z \equiv e_3(mod\ m)$$
$$a_4w + b_4x + c_4y + d_4z \equiv e_4(mod\ m)$$

Sistem kongruensi linier pada langkah pertama dapat direpresentasikan ke bentuk matriks $AX \equiv B\ (mod\ m)$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} (mod\ m)$$

Tahap selanjutnya melakukan operasi baris elementer untuk memperoleh matriks segitiga atas

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \end{array}\right] (mod\ m)$$

→baris kedua ditambahkan dengan $(-a_2)(a_1)^{-1}$ kali baris pertama, sehingga diperoleh:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_1(mod\ m) & b_1(mod\ m) & c_1(mod\ m) & d_1(mod\ m) & e_1(mod\ m) \\ 0 & (b_2a_1 - b_1a_2)(a_1)^{-1}(mod\ m) & (c_2a_1 - c_1a_2)(a_1)^{-1}(mod\ m) & (d_2a_1 - d_1a_2)(a_1)^{-1}(mod\ m) & (e_2a_1 - e_1a_2)(a_1)^{-1}(mod\ m) \\ a_3(mod\ m) & b_3(mod\ m) & c_3(mod\ m) & d_3(mod\ m) & e_3(mod\ m) \\ a_4(mod\ m) & b_4(mod\ m) & c_4(mod\ m) & d_4(mod\ m) & e_4(mod\ m) \end{array}\right]$$

→baris keempat ditambahkan dengan $(-a_4)(a_1)^{-1}$ kali baris pertama, sehingga diperoleh:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_1(mod\ m) & b_1(mod\ m) & c_1(mod\ m) & d_1(mod\ m) & e_1(mod\ m) \\ 0 & (b_2a_1 - b_1a_2)(a_1)^{-1}(mod\ m) & (c_2a_1 - c_1a_2)(a_1)^{-1}(mod\ m) & (d_2a_1 - d_1a_2)(a_1)^{-1}(mod\ m) & (e_2a_1 - e_1a_2)(a_1)^{-1}(mod\ m) \\ 0 & (b_3a_1 - b_1a_3)(a_1)^{-1}(mod\ m) & (c_3a_1 - c_1a_3)(a_1)^{-1}(mod\ m) & (d_3a_1 - d_1a_3)(a_1)^{-1}(mod\ m) & (e_3a_1 - e_1a_3)(a_1)^{-1}(mod\ m) \\ 0 & (b_4a_1 - b_1a_4)(a_1)^{-1}(mod\ m) & (c_4a_1 - c_1a_4)(a_1)^{-1}(mod\ m) & (d_4a_1 - d_1a_4)(a_1)^{-1}(mod\ m) & (e_4a_1 - e_1a_4)(a_1)^{-1}(mod\ m) \end{array}\right]$$

Dengan cara yang sama lakukan operasi baris elementer sehingga diperoleh :

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 6, No. 1, Januari 2020
ISSN 2460-4542, e-ISSN 2615-8663

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
a_1 (mod\ m) & b_1 (mod\ m) & c_1 (mod\ m) & d_1 (mod\ m) & e_1 (mod\ m) \\
0 & (b_2a_1 - b_1a_2)(a_1)^{-1}(mod\ m) & (c_2a_1 - c_1a_2)(a_1)^{-1}(mod\ m) & (d_2a_1 - d_1a_2)(a_1)^{-1}(mod\ m) & (e_2a_1 - e_1a_2)(a_1)^{-1}(mod\ m) \\
0 & 0 & \begin{array}{c} (c_3a_1b_2 - c_3a_2b_1 - a_3c_1b_2 - b_3a_1c_2 + \\ b_3a_2c_1 + a_3b_1c_2)(b_2a_1 - b_1a_2)^{-1}(mod\ m) \end{array} & \begin{array}{c} (d_3a_1b_2 - d_3a_2b_1 - d_1a_3b_2 - d_2a_1b_3 + \\ d_1a_2b_3 + d_2a_3b_1)(b_2a_1 - b_1a_2)^{-1}(mod\ m) \end{array} & \begin{array}{c} (e_3a_1b_2 - e_3a_2b_1 - e_1a_3b_2 - e_2a_1b_3 + \\ e_1a_2b_3 + e_2a_3b_1)(b_2a_1 - b_1a_2)^{-1}(mod\ m) \end{array} \\
0 & 0 & 0 & \begin{array}{c} (-d_3a_1b_2c_4 + d_4a_1b_2c_3 - d_2a_1b_4c_3 - d_4a_1b_3c_2 \\ +d_2a_1b_3c_4 + d_3a_1b_4c_2 - d_1a_4b_2c_3 + d_1a_3b_2c_4 \\ -d_4a_3b_2c_1 + d_3a_4b_2c_1 - d_2a_3b_1c_4 - d_1a_2b_3c_4 \\ +d_3a_2b_1c_4 + d_2a_4b_1c_3 + d_4a_2b_3c_1 - d_2a_4b_3c_1 \\ -d_4a_2b_1c_3 + d_1a_2b_4c_3 + d_4a_3b_1c_2 - d_1a_4b_3c_2 \\ -d_3a_4b_1c_2 - d_3a_2b_4c_1 + d_2a_3b_4c_1 - d_1a_3b_4c_2) \\ (c_3a_1b_2 - c_3a_2b_1 - a_3c_1b_2 + b_3a_1c_2 + b_3a_2c_1 - a_3b_1c_2)^{-1}(mod\ m) \end{array} & \begin{array}{c} (e_4a_1b_2c_3 - e_3a_1b_2c_4 + e_2a_1b_3c_4 - e_4a_1b_3c_2 \\ -e_2a_1b_4c_3 + e_3a_1b_4c_2 - e_4a_3b_2c_1 - e_1a_4b_2c_3 \\ +e_3a_4b_2c_1 + e_1a_3b_2c_4 + e_4a_3b_1c_2 + e_4a_2b_3c_1 \\ -e_4a_2b_1c_3 - e_2a_4b_3c_1 - e_2a_3b_1c_4 - e_1a_2b_3c_4 \\ +e_3a_2b_1c_4 + e_2a_4b_1c_3 + e_1a_4b_3c_2 + e_1a_2b_4c_3 \\ +e_2a_3b_4c_1 - e_1a_3b_4c_2 - e_3a_2b_4c_1 - e_3a_4b_1c_2) \\ (c_3a_1b_2 - c_3a_2b_1 - a_3c_1b_2 + b_3a_1c_2 + b_3a_2c_1 - a_3b_1c_2)^{-1}(mod\ m) \end{array}
\end{array}\right)
$$

Dari operasi diatas, maka diperoleh :

$$
z \equiv \begin{array}{c}
(e_4a_1b_2c_3 - e_3a_1b_2c_4 + e_3a_1b_4c_2 + e_2a_1b_3c_4 - e_2a_1b_4c_3 - e_4a_1b_3c_2 - e_1a_4b_2c_3 + e_3a_4b_2c_1 + e_1a_3b_2c_4 - e_4a_3b_2c_1 + e_2a_3b_4c_1 + e_1a_4b_3c_2 \\
-e_1a_3b_4c_2 - e_3a_2b_4c_1 + e_4a_3b_1c_2 + e_4a_2b_3c_1 - e_4a_2b_1c_3 - e_2a_4b_3c_1 - e_2a_3b_1c_4 - e_1a_2b_3c_4 + e_3a_2b_1c_4 + e_2a_4b_1c_3 + e_1a_2b_4c_3 - e_3a_4b_1c_2) \\
(d_4a_1b_2c_3 - d_2a_1b_4c_3 - d_3a_1b_2c_4 - d_4a_1b_3c_2 + d_2a_1b_3c_4 + d_3a_1b_4c_2 - d_1a_4b_2c_3 + d_1a_3b_2c_4 + d_3a_4b_2c_1 - d_2a_3b_1c_4 - d_4a_3b_2c_1 - d_1a_2b_3c_4 + \\
d_3a_2b_1c_4 + d_2a_4b_1c_3 + d_4a_2b_3c_1 - d_2a_4b_3c_1 - d_4a_2b_1c_3 + d_1a_2b_4c_3 + d_4a_3b_1c_2 + d_1a_4b_3c_2 - d_3a_4b_1c_2 - d_3a_2b_4c_1 + d_2a_3b_4c_1 - d_1a_3b_4c_2)^{-1}(mod\ m)
\end{array}
$$

$$
y \equiv \begin{array}{c}
(e_3a_1b_2d_4 - e_4a_1b_2d_3 + e_4a_1b_3d_2 - e_3a_1b_4d_2 + e_2a_1b_4d_3 - e_2a_1b_3d_4 + e_3a_2b_4d_1 + e_1a_4b_2d_3 - e_1a_3b_2d_4 + e_4a_3b_2d_1 - e_1a_4b_3d_2 + e_2a_4b_3d_1 \\
-e_3a_2b_1d_4 - e_1a_2b_4d_3 + e_4a_2b_1d_3 - e_2a_4b_1d_3 + e_3a_4b_1d_2 - e_2a_3b_4d_1 + e_1a_3b_4d_2 - e_4a_2b_3d_1 + e_2a_3b_1d_4 + e_1a_2b_3d_4 - e_3a_4b_2d_1 - e_4a_3b_1d_2) \\
(d_4a_1b_2c_3 - d_2a_1b_4c_3 - d_3a_1b_2c_4 - d_4a_1b_3c_2 + d_2a_1b_3c_4 + d_3a_1b_4c_2 - d_1a_4b_2c_3 + d_1a_3b_2c_4 + d_3a_4b_2c_1 - d_2a_3b_1c_4 - d_4a_3b_2c_1 - d_1a_2b_3c_4 + \\
d_3a_2b_1c_4 + d_2a_4b_1c_3 + d_4a_2b_3c_1 - d_2a_4b_3c_1 - d_4a_2b_1c_3 + d_1a_2b_4c_3 + d_4a_3b_1c_2 + d_1a_4b_3c_2 - d_3a_4b_1c_2 - d_3a_2b_4c_1 + d_2a_3b_4c_1 - d_1a_3b_4c_2)^{-1}(mod\ m)
\end{array}
$$

$$
x \equiv \begin{array}{c}
(e_3a_1c_4d_2 - e_4a_1c_3d_2 + e_4a_1c_2d_3 + e_2a_1c_3d_4 - e_3a_1c_2d_4 + e_1a_2c_4d_3 + e_4a_3c_1d_2 - e_3a_4c_1d_2 + e_1a_4c_3d_2 - e_2a_3c_1d_4 + e_2a_3c_4d_1 - e_4a_2c_1d_3 \\
-e_2a_4c_3d_1 - e_1a_3c_4d_2 - e_4a_3c_2d_1 + e_3a_2c_1d_4 + e_4a_2c_3d_1 - e_3a_2c_4d_1 + e_3a_4c_2d_1 - e_1a_4c_2d_3 + e_1a_3c_2d_4 - e_2a_1c_4d_3 - e_1a_2c_3d_4 + e_2a_4c_1d_3) \\
(d_4a_1b_2c_3 - d_2a_1b_4c_3 - d_3a_1b_2c_4 - d_4a_1b_3c_2 + d_2a_1b_3c_4 + d_3a_1b_4c_2 - d_1a_4b_2c_3 + d_1a_3b_2c_4 + d_3a_4b_2c_1 - d_2a_3b_1c_4 - d_4a_3b_2c_1 - d_1a_2b_3c_4 + \\
d_3a_2b_1c_4 + d_2a_4b_1c_3 + d_4a_2b_3c_1 - d_2a_4b_3c_1 - d_4a_2b_1c_3 + d_1a_2b_4c_3 + d_4a_3b_1c_2 + d_1a_4b_3c_2 - d_3a_4b_1c_2 - d_3a_2b_4c_1 + d_2a_3b_4c_1 - d_1a_3b_4c_2)^{-1}(mod\ m)
\end{array}
$$

$$w \equiv \begin{array}{c} (e_4b_1c_3d_2 - e_3b_1c_4d_2 + e_2b_1c_4d_3 + e_3b_1c_2d_4 - e_2b_3c_4d_1 - e_4b_1c_2d_3 - e_3b_2c_1d_4 + e_4b_2c_1d_3 + e_3b_4c_1d_2 - e_4b_3c_1d_2 + e_2b_3c_1d_4 - e_2b_4c_1d_3 \\ -e_4b_2c_3d_1 + e_2b_4c_3d_1 - e_1b_3c_2d_4 - e_3b_4c_2d_1 + e_3b_2c_4d_1 + e_4b_3c_2d_1 + e_1b_4c_2d_3 - e_1b_2c_4d_3 - e_1b_4c_3d_2 - e_2b_1c_3d_4 + e_1b_2c_3d_4 + e_1b_3c_4d_2) \\ (d_4a_1b_2c_3 - d_2a_1b_4c_3 - d_3a_1b_2c_4 - d_4a_1b_3c_2 + d_2a_1b_3c_4 + d_3a_1b_4c_2 - d_1a_4b_2c_3 + d_1a_3b_2c_4 + d_3a_4b_2c_1 - d_2a_3b_1c_4 - d_4a_3b_2c_1 - d_1a_2b_3c_4 + \\ d_3a_2b_1c_4 + d_2a_4b_1c_3 + d_4a_2b_3c_1 - d_2a_4b_3c_1 - d_4a_2b_1c_3 + d_1a_2b_4c_3 + d_4a_3b_1c_2 + d_1a_4b_3c_2 - d_3a_4b_1c_2 - d_3a_2b_4c_1 + d_2a_3b_4c_1 - d_1a_3b_4c_2)^{-1} (mod\ m) \end{array}$$

Contoh 1 Carilah penyelesaian dari sistem kongruensi linier berikut ini!

$$\begin{aligned} 3w + x + 2y + 2z &\equiv 4\ (mod\ 5) \\ w + 2x + 3y + z &\equiv 4\ (mod\ 5) \\ 2w + x + 3y + z &\equiv 5\ (mod\ 5) \\ 3w + 2x + y + 2z &\equiv 2\ (mod\ 5) \end{aligned}$$

Sistem kongruensi ini dapat dinyatakan dalam bentuk perkongruenan matriks

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} (mod\ 5)$$

Diketahui dari perkongruenan matriks diatas

$a_1 = 3$ $b_1 = 1$ $c_1 = 2$ $d_1 = 2$ $e_1 = 4$
$a_2 = 1$ $b_2 = 2$ $c_2 = 3$ $d_2 = 1$ $e_2 = 4$
$a_3 = 2$ $b_3 = 1$ $c_3 = 3$ $d_3 = 1$ $e_3 = 5$
$a_4 = 3$ $b_4 = 2$ $c_4 = 1$ $d_4 = 2$ $e_4 = 2$

Untuk mencari nilai w diperoleh:

$$w \equiv \frac{\begin{gathered}(e_4b_1c_3d_2 - e_3b_1c_4d_2 + e_2b_1c_4d_3 + e_3b_1c_2d_4 - e_2b_3c_4d_1 - e_4b_1c_2d_3 - e_3b_2c_1d_4 + e_4b_2c_1d_3 + e_3b_4c_1d_2 - e_4b_3c_1d_2 + e_2b_3c_1d_4 - e_2b_4c_1d_3 \\ -e_4b_2c_3d_1 + e_2b_4c_3d_1 - e_1b_3c_2d_4 - e_3b_4c_2d_1 + e_3b_2c_4d_1 + e_4b_3c_2d_1 + e_1b_4c_2d_3 - e_1b_2c_4d_3 - e_1b_4c_3d_2 - e_2b_1c_3d_4 + e_1b_2c_3d_4 + e_1b_3c_4d_2)\end{gathered}}{\begin{gathered}(d_4a_1b_2c_3 - d_2a_1b_4c_3 - d_3a_1b_2c_4 - d_4a_1b_3c_2 + d_2a_1b_3c_4 + d_3a_1b_4c_2 - d_1a_4b_2c_3 + d_1a_3b_2c_4 + d_3a_4b_2c_1 - d_2a_3b_1c_4 - d_4a_3b_2c_1 - d_1a_2b_3c_4 + \\ d_3a_2b_1c_4 + d_2a_4b_1c_3 + d_4a_2b_3c_1 - d_2a_4b_3c_1 - d_4a_2b_1c_3 + d_1a_2b_4c_3 + d_4a_3b_1c_2 + d_1a_4b_3c_2 - d_3a_4b_1c_2 - d_3a_2b_4c_1 + d_2a_3b_4c_1 - d_1a_3b_4c_2)^{-1}\end{gathered}} \ (mod\ m)$$

$$w \equiv \frac{\begin{gathered}(2.1.3.1 - 5.1.1.1 + 4.1.1.1 + 5.1.3.2 - 4.1.1.2 - 2.1.3.1 - 5.2.2.2 + 2.2.2.1 + 5.2.2.1 - 2.1.2.1 + 4.1.2.2 - 4.2.2.1 \\ -2.2.3.2 + 4.2.3.2 - 4.1.3.2 - 5.2.3.2 + 5.2.1.2 + 2.1.3.2 + 4.2.3.1 - 4.2.1.1 - 4.2.3.1 - 4.1.3.2 + 4.2.3.2 + 4.1.1.1)\end{gathered}}{\begin{gathered}(2.3.2.3 - 1.3.2.3 - 1.3.2.1 - 2.3.1.3 + 1.3.1.1 + 1.3.2.3 - 2.3.2.3 + 2.2.2.1 + 1.3.2.2 - 1.2.1.1 - 2.2.2.2 - 2.1.1.1 + \\ 1.1.1.1 + 1.3.1.3 + 2.1.1.2 - 1.3.1.22.1.1.3 + 2.1.2.3 + 2.2.1.3 + 2.3.1.3 - 1.3.1.3 - 1.1.2.2 + 1.2.2.2 - 2.2.2.3)^{-1}\end{gathered}} \ (mod\ 5)$$

$w \equiv (2)(4)^{-1}\ (mod\ 5)$

dengan menyelesaikan kongruensi $4x \equiv 1\ (mod\ 5)$, maka $(4)^{-1}\ (mod\ 5) = 4$, sehingga diperoleh:

$w \equiv (2)(4)\ (mod\ 5)$

$w \equiv 8\ (mod\ 5)$

$w \equiv 3\ (mod\ 5)$

Untuk mencari nilai x diperoleh:

$$x \equiv \frac{\begin{gathered}(e_3a_1c_4d_2 - e_4a_1c_3d_2 + e_4a_1c_2d_3 + e_2a_1c_3d_4 - e_3a_1c_2d_4 + e_1a_2c_4d_3 + e_4a_3c_1d_2 - e_3a_4c_1d_2 + e_1a_4c_3d_2 - e_2a_3c_1d_4 + e_2a_3c_4d_1 - e_4a_2c_1d_3 \\ -e_2a_4c_3d_1 - e_1a_3c_4d_2 - e_4a_3c_2d_1 + e_3a_2c_1d_4 + e_4a_2c_3d_1 - e_3a_2c_4d_1 + e_3a_4c_2d_1 - e_1a_4c_2d_3 + e_1a_3c_2d_4 - e_2a_1c_4d_3 - e_1a_2c_3d_4 + e_2a_4c_1d_3)\end{gathered}}{\begin{gathered}(d_4a_1b_2c_3 - d_2a_1b_4c_3 - d_3a_1b_2c_4 - d_4a_1b_3c_2 + d_2a_1b_3c_4 + d_3a_1b_4c_2 - d_1a_4b_2c_3 + d_1a_3b_2c_4 + d_3a_4b_2c_1 - d_2a_3b_1c_4 - d_4a_3b_2c_1 - d_1a_2b_3c_4 + \\ d_3a_2b_1c_4 + d_2a_4b_1c_3 + d_4a_2b_3c_1 - d_2a_4b_3c_1 - d_4a_2b_1c_3 + d_1a_2b_4c_3 + d_4a_3b_1c_2 + d_1a_4b_3c_2 - d_3a_4b_1c_2 - d_3a_2b_4c_1 + d_2a_3b_4c_1 - d_1a_3b_4c_2)^{-1}\end{gathered}} \ (mod\ m)$$

$$x \equiv \frac{\begin{gathered}(5.3.1.1 - 2.3.3.1 + 2.3.3.1 + 4.3.3.2 - 5.3.3.2 + 4.1.1.1 + 2.2.2.1 - 5.3.2.1 + 4.3.3.1 - 4.2.2.2 + 4.2.1.2 - 2.1.2.1 \\ -4.3.3.2 - 4.2.1.1 - 2.2.3.2 + 5.1.2.2 + 2.1.3.2 - 5.1.1.2 + 5.3.3.2 - 4.3.3.1 + 4.2.3.2 - 4.3.1.1 - 4.1.3.2 + 4.3.2.1)\end{gathered}}{\begin{gathered}2.3.2.3 - 1.3.2.3 - 1.3.2.1 - 2.3.1.3 + 1.3.1.1 + 1.3.2.3 - 2.3.2.3 + 2.2.2.1 + 1.3.2.2 - 1.2.1.1 - 2.2.2.2 - 2.1.1.1 + \\ 1.1.1.1 + 1.3.1.3 + 2.1.1.2 - 1.3.1.2 - 2.1.1.3 + 2.1.2.3 + 2.2.1.3 + 2.3.1.3 - 1.3.1.3 - 1.1.2.2 + 1.2.2.2 - 2.2.2.3)^{-1}\end{gathered}} \ (mod\ 5)$$

$x \equiv (3)(4)^{-1}(mod\ 5)$

dengan menyelesaikan kongruensi $4x \equiv 1\ (mod\ 5)$, maka $(4)^{-1}\ (mod\ 5) = 4$, sehingga diperoleh:

$x \equiv (3)(4)\ (mod\ 5)$

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 6, No. 1, Januari 2020
ISSN 2460-4542, e-ISSN 2615-8663

$x \equiv 12 \ (mod\ 5)$
$x \equiv \ 2 \ \ (mod\ 5)$
Untuk mencari nilai y diperoleh:

$$y \equiv \frac{\begin{array}{c}(e_3a_1b_2d_4 - e_4a_1b_2d_3 + e_4a_1b_3d_2 - e_3a_1b_4d_2 + e_2a_1b_4d_3 - e_2a_1b_3d_4 + e_3a_2b_4d_1 + e_1a_4b_2d_3 - e_1a_3b_2d_4 + e_4a_3b_2d_1 - e_1a_4b_3d_2 + e_2a_4b_3d_1 \\ -e_3a_2b_1d_4 - e_1a_2b_4d_3 + e_4a_2b_1d_3 - e_2a_4b_1d_3 + e_3a_4b_1d_2 - e_2a_3b_4d_1 + e_1a_3b_4d_2 - e_4a_2b_3d_1 + e_2a_3b_1d_4 + e_1a_2b_3d_4 - e_3a_4b_2d_1 - e_4a_3b_1d_2)\end{array}}{\begin{array}{c}(d_4a_1b_2c_3 - d_2a_1b_4c_3 - d_3a_1b_2c_4 - d_4a_1b_3c_2 + d_2a_1b_3c_4 + d_3a_1b_4c_2 - d_1a_4b_2c_3 + d_1a_3b_2c_4 + d_3a_4b_2c_1 - d_2a_3b_1c_4 - d_4a_3b_2c_1 - d_1a_2b_3c_4 + \\ d_3a_2b_1c_4 + d_2a_4b_1c_3 + d_4a_2b_3c_1 - d_2a_4b_3c_1 - d_4a_2b_1c_3 + d_1a_2b_4c_3 + d_4a_3b_1c_2 + d_1a_4b_3c_2 - d_3a_4b_1c_2 - d_3a_2b_4c_1 + d_2a_3b_4c_1 - d_1a_3b_4c_2)^{-1}\end{array}} \ (mod\ m)$$

$$y \equiv \frac{\begin{array}{c}(5.3.2.2 - 2.3.2.1 + 2.3.1.1 - 5.3.2.1 + 4.3.2.1 - 4.3.1.2 + 5.1.2.2 + 4.3.2.1 - 4.2.2.2 + 2.2.2.2 - 4.3.1.1 + 4.3.1.2 \\ -5.1.1.2 - 4.1.2.1 + 2.1.1.1 - 4.3.1.1 + 5.3.1.1 - 4.2.2.2 + 4.2.2.1 - 2.1.1.2 + 4.2.1.2 + 4.1.1.2 - 5.3.2.2 - 2.2.1.1)\end{array}}{\begin{array}{c}(2.3.2.3 - 1.3.2.3 - 1.3.2.1 - 2.3.1.3 + 1.3.1.1 + 1.3.2.3 - 2.3.2.3 + 2.2.2.1 + 1.3.2.2 - 1.2.1.1 - 2.2.2.2 - 2.1.1.1 + \\ 1.1.1.1 + 1.3.1.3 + 2.1.1.2 - 1.3.1.2 - 2.1.1.3 + 2.1.2.3 + 2.2.1.3 + 2.3.1.3 - 1.3.1.3 - 1.1.2.2 + 1.2.2.2 - 2.2.2.3)^{-1}\end{array}} \ (mod\ 5)$$

$y \equiv (1)(4)^{-1}(mod\ 5)$

dengan menyelesaikan kongruensi $4x \equiv 1\ (mod\ 5)$, maka $(4)^{-1}\ (mod\ 5) = 4$, sehingga diperoleh:

$y \equiv (1)(4)\ (mod\ 5)$

$y \equiv 4\ (mod\ 5)$

Untuk mencari nilai z diperoleh:

$$z \equiv \begin{gathered} (e_4a_1b_2c_3 - e_3a_1b_2c_4 + e_3a_1b_4c_2 + e_2a_1b_3c_4 - e_2a_1b_4c_3 - e_4a_1b_3c_2 - e_1a_4b_2c_3 + e_3a_4b_2c_1 + e_1a_3b_2c_4 - e_4a_3b_2c_1 + e_2a_3b_4c_1 + e_1a_4b_3c_2 \\ -e_1a_3b_4c_2 - e_3a_2b_4c_1 + e_4a_3b_1c_2 + e_4a_2b_3c_1 - e_4a_2b_1c_3 - e_2a_4b_3c_1 - e_2a_3b_1c_4 - e_1a_2b_3c_4 + e_3a_2b_1c_4 + e_2a_4b_1c_3 + e_1a_2b_4c_3 - e_3a_4b_1c_2) \\ (d_4a_1b_2c_3 - d_2a_1b_4c_3 - d_3a_1b_2c_4 - d_4a_1b_3c_2 + d_2a_1b_3c_4 + d_3a_1b_4c_2 - d_1a_4b_2c_3 + d_1a_3b_2c_4 + d_3a_4b_2c_1 - d_2a_3b_1c_4 - d_4a_3b_2c_1 - d_1a_2b_3c_4 + \\ d_3a_2b_1c_4 + d_2a_4b_1c_3 + d_4a_2b_3c_1 - d_2a_4b_3c_1 - d_4a_2b_1c_3 + d_1a_2b_4c_3 + d_4a_3b_1c_2 + d_1a_4b_3c_2 - d_3a_4b_1c_2 - d_3a_2b_4c_1 + d_2a_3b_4c_1 - d_1a_3b_4c_2)^{-1}(mod\ m) \end{gathered}$$

$$z \equiv \begin{gathered} (2.3.2.3 - 5.3.2.1 + 5.3.2.3 + 4.3.1.1 - 4.3.2.3 - 2.3.1.3 - 4.3.2.3 + 5.3.2.2 + 4.2.2.1 - 2.2.2.2 + 4.2.2.2 + 4.3.1.3 \\ -4.2.2.3 - 5.1.2.2 + 2.2.1.3 + 2.1.1.2 - 2.1.1.3 - 4.3.1.2 - 4.2.1.1 - 4.1.1.1 + 5.1.1.1 + 4.3.1.3 + 4.1.2.3 - 5.3.1.3) \\ (2.3.2.3 - 1.3.2.3 - 1.3.2.1 - 2.3.1.3 + 1.3.1.1 + 1.3.2.3 - 2.3.2.3 + 2.2.2.1 + 1.3.2.2 - 1.2.1.1 - 2.2.2.2 - 2.1.1.1 + \\ 1.1.1.1 + 1.3.1.3 + 2.1.1.2 - 1.3.1.2 - 2.1.1.3 + 2.1.2.3 + 2.2.1.3 + 2.3.1.3 - 1.3.1.3 - 1.1.2.2 + 1.2.2.2 - 2.2.2.3)^{-1}(mod\ 5) \end{gathered}$$

$z \equiv (0)(4)^{-1}(mod\ 5)$

dengan menyelesaikan kongruensi $4x \equiv 1\ (mod\ 5)$, maka $(4)^{-1}\ (mod\ 5) = 4$, sehingga diperoleh:

$z \equiv (0)(4)\ (mod\ 5)$

$z \equiv 0\ (mod\ 5)$

Jadi penyelesaian dari sistem kongruensi linier diatas adalah

$w \equiv 3\ (mod\ 5)$

$x \equiv 2\ (mod\ 5)$

$y \equiv 4\ (mod\ 5)$

$z \equiv 0$

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 6, No. 1, Januari 2020
ISSN 2460-4542, e-ISSN 2615-8663

Kesimpulan

Untuk menyelesaian Sistem Kongruensi Linier dengan metode eliminasi Gausian, diperoleh bentuk umum sebagai berikut:

$$z \equiv \begin{gathered} (e_4a_1b_2c_3 - e_3a_1b_2c_4 + e_3a_1b_4c_2 + e_2a_1b_3c_4 - e_2a_1b_4c_3 - e_4a_1b_3c_2 - e_1a_4b_2c_3 + e_3a_4b_2c_1 + e_1a_3b_2c_4 - e_4a_3b_2c_1 + e_2a_3b_4c_1 + e_1a_4b_3c_2 \\ -e_1a_3b_4c_2 - e_3a_2b_4c_1 + e_4a_3b_1c_2 + e_4a_2b_3c_1 - e_4a_2b_1c_3 - e_2a_4b_3c_1 - e_2a_3b_1c_4 - e_1a_2b_3c_4 + e_3a_2b_1c_4 + e_2a_4b_1c_3 + e_1a_2b_4c_3 - e_3a_4b_1c_2) \\ (d_4a_1b_2c_3 - d_2a_1b_4c_3 - d_3a_1b_2c_4 - d_4a_1b_3c_2 + d_2a_1b_3c_4 + d_3a_1b_4c_2 - d_1a_4b_2c_3 + d_1a_3b_2c_4 + d_3a_4b_2c_1 - d_2a_3b_1c_4 - d_4a_3b_2c_1 - d_1a_2b_3c_4 + \\ d_3a_2b_1c_4 + d_2a_4b_1c_3 + d_4a_2b_3c_1 - d_2a_4b_3c_1 - d_4a_2b_1c_3 + d_1a_2b_4c_3 + d_4a_3b_1c_2 + d_1a_4b_3c_2 - d_3a_4b_1c_2 - d_3a_2b_4c_1 + d_2a_3b_4c_1 - d_1a_3b_4c_2)^{-1} (mod\ m) \end{gathered}$$

$$y \equiv \begin{gathered} (e_3a_1b_2d_4 - e_4a_1b_2d_3 + e_4a_1b_3d_2 - e_3a_1b_4d_2 + e_2a_1b_4d_3 - e_2a_1b_3d_4 + e_3a_2b_4d_1 + e_1a_4b_2d_3 - e_1a_3b_2d_4 + e_4a_3b_2d_1 - e_1a_4b_3d_2 + e_2a_4b_3d_1 \\ -e_3a_2b_1d_4 - e_1a_2b_4d_3 + e_4a_2b_1d_3 - e_2a_4b_1d_3 + e_3a_4b_1d_2 - e_2a_3b_4d_1 + e_1a_3b_4d_2 - e_4a_2b_3d_1 + e_2a_3b_1d_4 + e_1a_2b_3d_4 - e_3a_4b_2d_1 - e_4a_3b_1d_2) \\ (d_4a_1b_2c_3 - d_2a_1b_4c_3 - d_3a_1b_2c_4 - d_4a_1b_3c_2 + d_2a_1b_3c_4 + d_3a_1b_4c_2 - d_1a_4b_2c_3 + d_1a_3b_2c_4 + d_3a_4b_2c_1 - d_2a_3b_1c_4 - d_4a_3b_2c_1 - d_1a_2b_3c_4 + \\ d_3a_2b_1c_4 + d_2a_4b_1c_3 + d_4a_2b_3c_1 - d_2a_4b_3c_1 - d_4a_2b_1c_3 + d_1a_2b_4c_3 + d_4a_3b_1c_2 + d_1a_4b_3c_2 - d_3a_4b_1c_2 - d_3a_2b_4c_1 + d_2a_3b_4c_1 - d_1a_3b_4c_2)^{-1} (mod\ m) \end{gathered}$$

$$x \equiv \begin{gathered} (e_3a_1c_4d_2 - e_4a_1c_3d_2 + e_4a_1c_2d_3 + e_2a_1c_3d_4 - e_3a_1c_2d_4 + e_1a_2c_4d_3 + e_4a_3c_1d_2 - e_3a_4c_1d_2 + e_1a_4c_3d_2 - e_2a_3c_1d_4 + e_2a_3c_4d_1 - e_4a_2c_1d_3 \\ -e_2a_4c_3d_1 - e_1a_3c_4d_2 - e_4a_3c_2d_1 + e_3a_2c_1d_4 + e_4a_2c_3d_1 - e_3a_2c_4d_1 + e_3a_4c_2d_1 - e_1a_4c_2d_3 + e_1a_3c_2d_4 - e_2a_1c_4d_3 - e_1a_2c_3d_4 + e_2a_4c_1d_3) \\ (d_4a_1b_2c_3 - d_2a_1b_4c_3 - d_3a_1b_2c_4 - d_4a_1b_3c_2 + d_2a_1b_3c_4 + d_3a_1b_4c_2 - d_1a_4b_2c_3 + d_1a_3b_2c_4 + d_3a_4b_2c_1 - d_2a_3b_1c_4 - d_4a_3b_2c_1 - d_1a_2b_3c_4 + \\ d_3a_2b_1c_4 + d_2a_4b_1c_3 + d_4a_2b_3c_1 - d_2a_4b_3c_1 - d_4a_2b_1c_3 + d_1a_2b_4c_3 + d_4a_3b_1c_2 + d_1a_4b_3c_2 - d_3a_4b_1c_2 - d_3a_2b_4c_1 + d_2a_3b_4c_1 - d_1a_3b_4c_2)^{-1} (mod\ m) \end{gathered}$$

$$w \equiv \begin{gathered} (e_4b_1c_3d_2 - e_3b_1c_4d_2 + e_2b_1c_4d_3 + e_3b_1c_2d_4 - e_2b_3c_4d_1 - e_4b_1c_2d_3 - e_3b_2c_1d_4 + e_4b_2c_1d_3 + e_3b_4c_1d_2 - e_4b_3c_1d_2 + e_2b_3c_1d_4 - e_2b_4c_1d_3 \\ -e_4b_2c_3d_1 + e_2b_4c_3d_1 - e_1b_3c_2d_4 - e_3b_4c_2d_1 + e_3b_2c_4d_1 + e_4b_3c_2d_1 + e_1b_4c_2d_3 - e_1b_2c_4d_3 - e_1b_4c_3d_2 - e_2b_1c_3d_4 + e_1b_2c_3d_4 + e_1b_3c_4d_2) \\ (d_4a_1b_2c_3 - d_2a_1b_4c_3 - d_3a_1b_2c_4 - d_4a_1b_3c_2 + d_2a_1b_3c_4 + d_3a_1b_4c_2 - d_1a_4b_2c_3 + d_1a_3b_2c_4 + d_3a_4b_2c_1 - d_2a_3b_1c_4 - d_4a_3b_2c_1 - d_1a_2b_3c_4 + \\ d_3a_2b_1c_4 + d_2a_4b_1c_3 + d_4a_2b_3c_1 - d_2a_4b_3c_1 - d_4a_2b_1c_3 + d_1a_2b_4c_3 + d_4a_3b_1c_2 + d_1a_4b_3c_2 - d_3a_4b_1c_2 - d_3a_2b_4c_1 + d_2a_3b_4c_1 - d_1a_3b_4c_2)^{-1} (mod\ m) \end{gathered}$$

Daftar Pustaka

[1] Anton, Howard., dan Rorres, Chris., *Dasar-Dasar Aljabar Linier Versi Aplikasi*, Edisi Ketujuh, Erlangga, Jakarta, 2004.
[2] Irawan, Wahyu, Henky., dkk., *Pengantar Teori Bilangan*, Uin Maliki Press, Malang, 2014.
[3] Sukirman, *Pengantar Teori Bilangan*, Hanggar Kreator, Yogyakarta, 2006.
[4] Wati, Kurnia, Era., Menyelesaikan Sisten Kongruensi Linier, Skripsi Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim, Malang, 2009.
[5] Yuniati, Suci., Sari, Arnida., *Teori Bilangan*, Kreasi Edukasi, Pekanbaru, 2015.
[6] Zuhroh, madinatuz., Menyelesaikan Kongruensi Linier Satu Variabel, Skripsi Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim, Malang, 2011.