Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol.5, No. 2, Juli 2019
ISSN 2460-4542, e-ISSN 2615-8663

# Metode Radic dalam Menentukan Determinan Matriks Tidak Bujur Sangkar Berbentuk Khusus $3 \times n$

**FitriAryani[1], Marhulam[2], Corry Corazon Marzuki[3]**
[1,2,3] Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email:khodijah_fitri@uin-suska.ac.id, marhulam@gmail.com

## ABSTRAK

Perhitungan determinan matriks yang selama ini diketahui hanya dapat dilakukan apabila matriks tersebut berbentuk bujur sangkar. Tetapi ternyata matriks tidak bujur sangkar juga dapat dicari nilai determinannya. Penelitian ini bertujuan mendapatkan bentuk umum determinan matriks tidak bujur sangkar berbentuk khusus dengan ukuran $3 \times n$ menggunakan metode Radic. Terdapat beberapa langkah dalam menentukan determinan matriks tidak bujur sangkar berbentuk khusus $3 \times n$. Pertama, menentukan determinan $A_{3\times4}$ sampai dengan determinan $A_{3\times12}$, dan menduga bentuk umum determinan matriks tersebut. Selanjutnya akan dibuktikan dengan menggunakan pembuktian langsung. Hasil yang diperoleh terdiri dari dua bentuk umum determinan matriks tidak bujur sangkar berbentuk khusus $3 \times n$ yaitu untuk $n$ genap dan $n$ ganjil. Selain itu, dibahas pula tentang aplikasi bentuk umum determinan matriks yang diperoleh dalam bentuk contoh soal.

**Kata kunci:** *Determinan, matriks bujur sangkar, matriks tidak bujur sangkar, metode Radic, pembuktian langsung.*

## *ABSTRACT*

*The calculation of the determinant of the matrix we have known can only be done if the matrix is square.But the matrix is not square can also be searched the determinant value. This final project is aimed to get the general form determinant of non-square-shaped matrix with specific size 3 × n using Radic method.There are several steps in determining the determinant of a non-square matrix in the form of a special 3 × n.First, determine the determinant* $A_{3\times4}$ *to the determinant* $A_{3\times12}$ *, and speculate the general form of the determinant of the matrix.Furthermore, it will be proven by using direct proof. The results obtained consisted of two general forms of determinants of a non-square-shaped matrix of special shapes of 3 × n is for even and n odd n.In addition, it is also discussed about the application of the general form of determinant matrix obtainedin the form of sample questions.*

***Keywords****: Determinant, square matrix, non-square matrix, radical method, direct proof.*

## Pendahuluan

Teori matriks merupakan salah satu cabang ilmu aljabar linier yang menjadi pembahasan penting dalam ilmu matematika. Salah satu pokok bahasan yang termasuk dalam matriks adalah determinan matriks. Determinan matriks digunakan untuk menyelesaikan persamaan yang berhubungan dengan aljabar linier, antara lain untuk mencari invers matriks, menentukan persamaan karakteristik suatu permasalahan dalam menentukan nilai eigen dan menyelesaikan sistem persamaan linier. Terdapat beberapa metode yang dapat digunakan dalam menentukan determinan matriks, diantara metode tersebut adalah metode Sarrus, metode reduksi baris dan metode ekspansi kofaktor.

Perhitungan determinan matriks yang selama ini kita ketahui hanya berfokus pada matriks bujur sangkar. Bagaimana jika matriks tersebut berbentuk tidak bujur sangkar, apakah bisa dicari nilai determinannya? Apakah ada metode yang dapat digunakan untuk mencari nilai determinannya, dan apakah perhitungannya sama seperti perhitungan pada matriks bujur sangkar? Ternyata matriks tidak bujur sangkar juga dapat dicari nilai determinannya. Pembahasan mengenai determinan matriks tidak bujur sangkar tersebut dapat dilihat pada penelitian Radic [5] yang membahas tentang determinan untuk matriks tidak bujur sangkar. Penelitian tersebut menghasilkan sebuah definisi untuk menentukan nilai determinan suatu matriks tidak bujur sangkar. Definisi ini yang menjadi rujukan pada makalah ini.

Kemudian penelitian Amiri [1] dengan judul *"Generalization of Some Determinantal Identities for Non-Square Matrices Based on Radic's Definition",* yang membahas tentang determinan Radic untuk matriks tidak bujur sangkar dan beserta sifat-sifat dari matriks tidak bujur sangkar. Makarewicz [4] juga melakukan penelitian tentang determinan pada matriks tidak bujur sangkar yang membahas mengenai sifat-sifat dari determinan matriks tidak bujur sangkar. Selanjutnya penelitian Saputri [6] dalam makalahnya yang membahas mengenai determinan matriks khusus tidak bujur sangkar ukuran $2 \times n$ dengan bentuk matriksnya sebagai berikut:

$$A_{2\times n} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix}, \; n > 2$$

dan hasil yang diperoleh adalah:

$$|A_{2\times n}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} a_i$$

Penelitian Hanita [3] dalam makalahnya yang membahas mengenai determinan matriks khusus tidak bujur sangkar ukuran $3 \times n$ dengan bentuk matriksnya sebagai berikut:

$$A_{3\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_i \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, n > 3, a_i \in R, \forall i = 1,2,\cdots,n-1$$

dan memperoleh hasil sebagai berikut:

$$|A_{3\times n}| = \begin{cases} 0 & ,untuk\ n\ genap \\ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} a_i & ,untuk\ n\ ganjil \end{cases}$$

Berdasarkan hasil-hasil penelitian yang sudah dipaparkan di atas, maka penelitian ini ingin mendapatkan bentuk umum determinan matriks tidak bujur sangkar berbentuk khusus $3\times n$, yaitu:

$$A_{3\times n} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_i \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_i \end{bmatrix} n > 3 \forall a_i, b_i \in R, i = 1,2,\cdots,n \tag{1.1}$$

Dengan harapan tidak perlu lagi aturan yang panjang untuk memperoleh determinan matriks tersebut. Cukup dengan menstubsitusi entri-entri dari matriks dan diperoleh determinannya.

## Metode dan Bahan Penelitian

Metode pada makalah ini adalah studi literatur. Adapun langkah- langkah untuk memperoleh bentuk umum determinan matriks tidak bujur sangkar berbentuk khusus $3\times n$ ada dua tahapan. Pertama, menentukan determinan matriks dari ordo $3\times 4$ sampai $3\times 12$ dan menduga bentuk umum determinan matriks tersebut. Kemudian, membuktikan bentuk umum determinan matriks tidak bujur sangkar berbentuk khusus $3\times n$ dengan menggunakan pembuktian langsung dan mengaplikasikan bentuk umum determinan matriks tidak bujur sangkar berbentuk khusus $3\times n$ tersebut dalam bentuk contoh soal.

Ada beberapa bahan yang digunakan dalam penelitian ini yaitu sebagai berikut:

**Definisi 1 [2]** Misalkan$A$ adalah matriks bujur sangkar. *Fungsi determinan* **(***determinant function)* dinotasikan dengan *det* dan kita mendefinisikan$\det(A)$ sebagai jumlah dari semua hasil kali elementer bertanda dari $A$. Angka$\det(A)$ disebut *determinan dari A(determinant of* $A$).

**Definisi 2 [5]** Jika $A$ adalah matriks $m \times n$ dengan kolom $A_1, A_2, \cdots, A_n$ dan $m \le n$, maka determinan dari matriks $A$ sebagai berikut:

$$|A| = \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \cdots j_{m \le n}} (-1)^{r+s} \left| A_{j_1}, A_{j_2}, \cdots, A_{j_m} \right|$$

Dimana $r = 1 + 2 + 3 + \cdots + m$

$s = j_1 + j_2 + \cdots + j_m$

## Hasil dan Pembahasan

Langkah pertama yang dilakukan dalam makalah ini adalah menentukan determinan matriks tidak bujur sangkar berbentuk khusus dari ordo $3 \times 4$ sampai $3 \times 12$ pada Persamaan (1) dengan menggunakan metode Radic pada Definisi (2), sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} |A_{3\times4}| = {} & [(a_1b_3 + a_2b_1 + a_3b_2) - (a_3b_1 + a_1b_2 + a_2b_3)] - [(a_1b_4 + a_2b_1 + a_4b_2) - (a_4b_1 + a_1b_2 + a_2b_4)] + \\ & [(a_1b_4 + a_3b_1 + a_4b_3) - (a_4b_1 + a_1b_3 + a_3b_4)] - [(a_2b_4 + a_3b_2 + a_4b_3) - (a_4b_2 + a_2b_3 + a_3b_4)] \end{aligned}$$

Untuk setiap $i, j = 1, 2, \cdots, 4$ dengan $i \ne j$ terdapat 2 buah kombinasi $a_i b_j$ dengan tanda positif dan negatif yang saling bergantian, sehingga diperoleh:

$$|A_{3\times4}| = 0 \tag{2}$$

$$\begin{aligned} |A_{3\times5}| = {} & [(a_1b_3 + a_2b_1 + a_3b_2) - (a_3b_1 + a_1b_2 + a_2b_3)] - [(a_1b_4 + a_2b_1 + a_4b_2) - (a_4b_1 + a_1b_2 + a_2b_4)] + \\ & [(a_1b_5 + a_2b_1 + a_5b_2) - (a_5b_1 + a_1b_2 + a_2b_5)] + [(a_1b_4 + a_3b_1 + a_4b_3) - (a_4b_1 + a_1b_3 + a_3b_4)] - \\ & [(a_1b_5 + a_3b_1 + a_5b_3) - (a_5b_1 + a_1b_3 + a_3b_5)] + [(a_1b_5 + a_4b_1 + a_5b_4) - (a_5b_1 + a_1b_4 + a_5b_5)] - \\ & [(a_2b_4 + a_3b_2 + a_4b_3) - (a_4b_2 + a_2b_3 + a_3b_4)] + [(a_2b_5 + a_3b_2 + a_5b_3) - (a_5b_2 + a_2b_3 + a_3b_5)] - \\ & [(a_2b_5 + a_4b_2 + a_5b_4) - (a_5b_2 + a_2b_4 + a_4b_5)] + [(a_3b_5 + a_4b_3 + a_5b_4) - (a_5b_3 + a_3b_4 + a_4b_5)] \end{aligned}$$

Untuk setiap $i, j = 1, 2, \cdots, 5$ dengan $i \ne j$ terdapat 3 buah kombinasi $a_i b_j$ dengan tanda positif dan negatif yang saling bergantian, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} |A_{3\times5}| = {} & (a_2 - a_3 + a_4 - a_5)b_1 - (a_1 - a_3 + a_4 - a_5)b_2 + (a_1 - a_2 + a_4 - a_5)b_3 - \\ & (a_1 - a_2 + a_3 - a_5)b_4 + (a_1 - a_2 + a_3 - a_4)b_5 \end{aligned} \tag{3}$$

denganlangkah yang samadiperoleh:

$$|A_{3\times6}| = 0 \tag{4}$$

$$\begin{aligned} |A_{3\times7}| = {} & (a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7)b_1 - (a_1 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7)b_2 + \\ & (a_1 - a_2 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7)b_3 - (a_1 - a_2 + a_3 - a_5 + a_6 - a_7)b_4 + \\ & (a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_6 - a_7)b_5 - (a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_7)b_6 + \\ & (a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6)b_7 \end{aligned} \tag{5}$$

$$|A_{3\times8}| = 0 \tag{6}$$

$$\begin{aligned} |A_{3\times9}| = {} & (a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 + a_8 - a_9)b_1 - (a_1 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 + a_8 - a_9)b_2 + \\ & (a_1 - a_2 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 + a_8 - a_9)b_3 - (a_1 - a_2 + a_3 - a_5 + a_6 - a_7 + a_8 - a_9)b_4 + \\ & (a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_6 - a_7 + a_8 - a_9)b_5 - (a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_7 + a_8 - a_9)b_6 + \\ & (a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_8 - a_9)b_7 - (a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 - a_9)b_8 + \\ & (a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 - a_8)b_9 \end{aligned} \tag{7}$$

$$|A_{3\times 10}| = 0 \tag{8}$$

$$\begin{aligned}|A_{3\times 11}| = {} & (a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 + a_8 - a_9 + a_{10} - a_{11})b_1 - (a_1 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 + a_8 - a_9 + a_{10} - a_{11})b_2 + \\ & (a_1 - a_2 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 + a_8 - a_9 + a_{10} - a_{11})b_3 - (a_1 - a_2 + a_3 - a_5 + a_6 - a_7 + a_8 - a_9 + a_{10} - a_{11})b_4 + \\ & (a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_6 - a_7 + a_8 - a_9 + a_{10} - a_{11})b_5 - (a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_7 + a_8 - a_9 + a_{10} - a_{11})b_6 + \\ & (a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_8 - a_9 + a_{10} - a_{11})b_7 - (a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 - a_9 + a_{10} - a_{11})b_8 + \\ & (a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 - a_8 + a_{10} - a_{11})b_9 - (a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 - a_8 + a_9 - a_{11})b_{10} + \\ & (a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 - a_8 + a_9 - a_{10})b_{11}\end{aligned} \tag{9}$$

$$|A_{3\times 12}| = 0 \tag{10}$$

Dengan melihat kembali Persamaaan (2) sampai (10), maka bentuk umum determinan matriks tidak bujur sangkar berbentuk khusus $3 \times n$ mempunyai dua bentuk umum, yaitu untuk $n$ genap dan $n$ ganjil. Bentuk umum tersebut disajikan dalam Teotema 1 berikut.

**Teorema 1**. Diberikan matriks tidak bujur sangkar berbentuk khusus $3 \times n$ pada Persamaan (1) maka diperoleh:

$$|A_{3\times n}| = \begin{cases} 0 & , n \text{ genap} \\ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} b_i c_i & , n \text{ ganjil} \end{cases}$$

dengan $i = 1,2,3,\cdots,n$

$$\begin{aligned} c_1 &= (a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \cdots + a_{n-1} - a_n) \\ c_2 &= (a_1 - a_3 + a_4 - a_5 + \cdots + a_{n-1} - a_n) \\ c_3 &= (a_1 - a_2 + a_4 - a_5 + \cdots + a_{n-1} - a_n) \\ c_4 &= (a_1 - a_2 + a_3 - a_5 + \cdots + a_{n-1} - a_n) \\ c_5 &= (a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{n-1} - a_n) \\ &\vdots \\ c_{n-1} &= (a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{n-2} - a_n) \\ c_n &= (a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{n-2} - a_{n-1}) \end{aligned}$$

**Bukti:** Pembuktian teorema dengan menggunakan pembuktian langsung.

a. Untuk $n$ genap

$$|A_{3\times n}| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & \cdots & b_{n-3} & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n \end{vmatrix}$$

Menggunakan metode Radic maka diperoleh $|A_{3\times n}|$ sebagai berikut:

$$\left|A_{3\times n}\right| = (-1)^{(1+2+3)+(1+2+3)}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(1+2+4)}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_4 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{(1+2+3)+(1+2+5)}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_5 \\ 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_5 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(1+2+6)}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_6 \\ 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_6 \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$(-1)^{(1+2+3)+(1+2+(n-3))}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_{n-3} \\ 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_{n-3} \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(1+2+(n-2))}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_{n-2} \\ 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_{n-2} \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{(1+2+3)+(1+2+(n-1))}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_{n-1} \\ 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_{n-1} \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(1+2+(n))}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_n \\ 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_n \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{(1+2+3)+(1+3+4)}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_4 \\ 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(1+3+5)}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_3 & b_5 \end{vmatrix} +$$

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol.5, No. 2, Juli 2019
ISSN 2460-4542, e-ISSN 2615-8663

$$(-1)^{(1+2+3)+(1+3+6)}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_6 \\ 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_3 & b_6 \end{vmatrix}+\cdots+(-1)^{(1+2+3)+(1+3+(n-3))}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_{n-3} \\ 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_3 & b_{n-3} \end{vmatrix}+$$

$$(-1)^{(1+2+3)+(1+3+(n-2))}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_{n-2} \\ 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_3 & b_{n-2} \end{vmatrix}+(-1)^{(1+2+3)+(1+3+(n-1))}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_{n-1} \\ 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_3 & b_{n-1} \end{vmatrix}+$$

$$(-1)^{(1+2+3)+(1+3+(n))}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_n \\ 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_3 & b_n \end{vmatrix}+\cdots+(-1)^{(1+2+3)+(1+(n-2)+(n))}\begin{vmatrix} a_1 & a_{n-2} & a_n \\ 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_{n-2} & b_n \end{vmatrix}+$$

$$(-1)^{(1+2+3)+(1+(n-1)+(n))}\begin{vmatrix} a_1 & a_{n-1} & a_n \\ 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_{n-1} & b_n \end{vmatrix}+(-1)^{(1+2+3)+(2+3+4)}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ 1 & 1 & 1 \\ b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}+$$

$$(-1)^{(1+2+3)+(2+3+5)}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_5 \\ 1 & 1 & 1 \\ b_2 & b_3 & b_5 \end{vmatrix}+(-1)^{(1+2+3)+(2+3+6)}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_6 \\ 1 & 1 & 1 \\ b_2 & b_3 & b_6 \end{vmatrix}+\cdots+$$

$$(-1)^{(1+2+3)+(2+3+(n-3))}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_{n-3} \\ 1 & 1 & 1 \\ b_2 & b_3 & b_{n-3} \end{vmatrix}+(-1)^{(1+2+3)+(2+3+(n-2))}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_{n-2} \\ 1 & 1 & 1 \\ b_2 & b_3 & b_{n-2} \end{vmatrix}+$$

$$(-1)^{(1+2+3)+(2+3+(n-1))}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_{n-1} \\ 1 & 1 & 1 \\ b_2 & b_3 & b_{n-1} \end{vmatrix}+(-1)^{(1+2+3)+(2+3+(n))}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_n \\ 1 & 1 & 1 \\ b_2 & b_3 & b_n \end{vmatrix}+$$

$$(-1)^{(1+2+3)+(2+4+5)}\begin{vmatrix} a_2 & a_4 & a_5 \\ 1 & 1 & 1 \\ b_2 & b_4 & b_5 \end{vmatrix}+(-1)^{(1+2+3)+(2+4+6)}\begin{vmatrix} a_2 & a_4 & a_6 \\ 1 & 1 & 1 \\ b_2 & b_4 & b_6 \end{vmatrix}+\cdots+$$

$$(-1)^{(1+2+3)+(2+4+(n-3))}\begin{vmatrix} a_2 & a_4 & a_{n-3} \\ 1 & 1 & 1 \\ b_2 & b_4 & b_{n-3} \end{vmatrix}+(-1)^{(1+2+3)+(2+4+(n-2))}\begin{vmatrix} a_2 & a_4 & a_{n-2} \\ 1 & 1 & 1 \\ b_2 & b_4 & b_{n-2} \end{vmatrix}+$$

$$(-1)^{(1+2+3)+(2+4+(n-1))}\begin{vmatrix} a_2 & a_4 & a_{n-1} \\ 1 & 1 & 1 \\ b_2 & b_4 & b_{n-1} \end{vmatrix}+(-1)^{(1+2+3)+(2+4+(n))}\begin{vmatrix} a_2 & a_4 & a_n \\ 1 & 1 & 1 \\ b_2 & b_4 & b_n \end{vmatrix}+\cdots+$$

$$(-1)^{(1+2+3)+(2+(n-2)+(n))}\begin{vmatrix} a_2 & a_{n-2} & a_n \\ 1 & 1 & 1 \\ b_2 & b_{n-2} & b_n \end{vmatrix}+(-1)^{(1+2+3)+(2+(n-1)+(n))}\begin{vmatrix} a_2 & a_{n-1} & a_n \\ 1 & 1 & 1 \\ b_2 & b_{n-1} & b_n \end{vmatrix}+$$

$$(-1)^{(1+2+3)+(3+4+5)}\begin{vmatrix} a_3 & a_4 & a_5 \\ 1 & 1 & 1 \\ b_3 & b_4 & b_5 \end{vmatrix}+(-1)^{(1+2+3)+(3+4+6)}\begin{vmatrix} a_3 & a_4 & a_6 \\ 1 & 1 & 1 \\ b_3 & b_4 & b_6 \end{vmatrix}+\cdots+$$

$$(-1)^{(1+2+3)+(3+4+(n-3))}\begin{vmatrix} a_3 & a_4 & a_{n-3} \\ 1 & 1 & 1 \\ b_3 & b_4 & b_{n-3} \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(3+4+(n-2))}\begin{vmatrix} a_3 & a_4 & a_{n-2} \\ 1 & 1 & 1 \\ b_3 & b_4 & b_{n-2} \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{(1+2+3)+(3+4+(n-1))}\begin{vmatrix} a_3 & a_4 & a_{n-1} \\ 1 & 1 & 1 \\ b_3 & b_4 & b_{n-1} \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(3+4+(n))}\begin{vmatrix} a_3 & a_4 & a_n \\ 1 & 1 & 1 \\ b_3 & b_4 & b_n \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$(-1)^{(1+2+3)+(3+(n-2)+(n))}\begin{vmatrix} a_3 & a_{n-2} & a_n \\ 1 & 1 & 1 \\ b_3 & b_{n-2} & b_n \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(3+(n-1)+(n))}\begin{vmatrix} a_3 & a_{n-1} & a_n \\ 1 & 1 & 1 \\ b_3 & b_{n-1} & b_n \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{(1+2+3)+((n-3)+(n-2)+(n-1))}\begin{vmatrix} a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 1 & 1 & 1 \\ b_{n-3} & b_{n-2} & b_{n-1} \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+((n-3)+(n-2)+(n))}\begin{vmatrix} a_{n-3} & a_{n-2} & a_n \\ 1 & 1 & 1 \\ b_{n-3} & b_{n-2} & b_n \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{(1+2+3)+((n-3)+(n-1)+(n))}\begin{vmatrix} a_{n-3} & a_{n-1} & a_n \\ 1 & 1 & 1 \\ b_{n-3} & b_{n-1} & b_n \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+((n-2)+(n-1)+(n))}\begin{vmatrix} a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ 1 & 1 & 1 \\ b_{n-2} & b_{n-1} & b_n \end{vmatrix}$$

Menggunakan metode Sarrus maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
|A_{3\times n}| = {} & a_1b_3 + a_2b_1 + a_3b_2 - a_3b_1 - a_1b_2 - a_2b_3 - a_1b_4 - a_2b_1 - a_4b_2 + a_4b_1 + a_1b_2 + a_2b_4 \\
& + a_1b_5 + a_2b_1 + a_5b_2 - a_5b_1 - a_1b_2 - a_2b_5 - a_1b_6 - a_2b_1 - a_6b_2 + a_6b_1 + a_1b_2 + a_2b_6 \\
& + \cdots + a_1b_{n-3} + a_2b_1 + a_{n-3}b_2 - a_{n-3}b_1 - a_1b_2 - a_2b_{n-3} - a_1b_{n-2} - a_2b_1 - a_{n-2}b_2 - a_{n-2}b_1 \\
& + a_1b_2 + a_2b_{n-2} + a_1b_{n-1} + a_2b_1 + a_{n-1}b_2 - a_{n-1}b_1 - a_1b_2 - a_2b_{n-1} - a_1b_n - a_2b_1 - a_nb_2 \\
& + a_nb_1 + a_1b_2 + a_2b_n + a_1b_4 + a_3b_1 + a_4b_3 - a_4b_1 - a_1b_3 - a_3b_4 - a_1b_5 - a_3b_1 - a_5b_3 \\
& + a_5b_1 + a_1b_3 + a_3b_5 + a_1b_6 + a_3b_1 + a_6b_3 - a_6b_1 - a_1b_3 - a_3b_6 - \cdots - a_1b_{n-3} - a_3b_1 \\
& - a_{n-3}b_3 + a_{n-3}b_1 + a_1b_3 + a_3b_{n-3} + a_1b_{n-2} + a_3b_1 + a_{n-2}b_3 - a_{n-2}b_1 - a_1b_3 - a_3b_{n-2} \\
& - a_1b_{n-1} - a_3b_1 - a_{n-1}b_3 + a_{n-1}b_1 + a_1b_3 + a_3b_{n-1} + a_1b_n + a_3b_1 + a_nb_3 - a_nb_1 - a_1b_3 \\
& - a_3b_n - \cdots - a_1b_n - a_{n-2}b_1 - a_nb_{n-2} + a_nb_1 + a_1b_{n-2} + a_{n-2}b_n + a_1b_n + a_{n-1}b_1 \\
& + a_nb_{n-1} - a_nb_1 - a_1b_{n-1} - a_{n-1}b_n - a_2b_4 - a_3b_2 - a_4b_3 + a_4b_2 + a_2b_3 + a_3b_4 + a_2b_5 \\
& + a_3b_2 + a_5b_3 - a_5b_2 - a_2b_3 - a_3b_5 - a_2b_6 - a_3b_2 - a_6b_3 + a_6b_2 + a_2b_3 + a_3b_6 + \cdots + \\
& a_2b_{n-3} + a_3b_2 + a_{n-3}b_3 - a_{n-3}b_2 - a_2b_3 - a_3b_{n-3} - a_2b_{n-2} - a_3b_2 - a_{n-2}b_3 + a_{n-2}b_2 + a_2b_3 \\
& + a_3b_{n-2} + a_2b_{n-1} + a_3b_2 + a_{n-1}b_3 - a_{n-1}b_2 - a_2b_3 - a_3b_{n-1} - a_2b_n - a_3b_2 - a_nb_3 + a_nb_2 \\
& + a_2b_3 + a_3b_n - a_2b_5 - a_4b_2 - a_5b_4 + a_5b_2 + a_2b_4 + a_4b_5 + a_2b_6 + a_4b_2 + a_6b_4 - a_6b_2 \\
& - a_2b_4 - a_4b_6 - \cdots - a_2b_{n-3} - a_4b_2 - a_{n-3}b_4 + a_{n-3}b_2 + a_2b_4 + a_4b_{n-3} + a_2b_{n-2} + a_4b_2 \\
& + a_{n-2}b_4 - a_{n-2}b_2 - a_2b_4 - a_4b_{n-2} - a_2b_{n-1} - a_4b_2 - a_{n-1}b_4 + a_{n-1}b_2 + a_2b_4 + a_4b_{n-1} \\
& + a_2b_n + a_4b_2 + a_nb_4 - a_nb_2 - a_2b_4 - a_4b_n + \cdots + a_2b_n + a_{n-2}b_2 + a_nb_{n-2} - a_nb_2 - a_2b_{n-2} \\
& - a_{n-2}b_n - a_2b_n - a_{n-1}b_2 - a_nb_{n-1} + a_nb_2 + a_2b_{n-1} + a_{n-1}b_n + a_3b_5 + a_4b_3 + a_5b_4 - a_5b_3 - \\
& a_3b_4 - a_4b_5 - a_3b_6 - a_4b_3 - a_6b_4 + a_6b_3 + a_3b_4 + a_4b_6 + \cdots + a_3b_{n-3} + a_4b_3 + a_{n-3}b_4 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&-a_{n-3}b_3-a_3b_4-a_4b_{n-3}-a_3b_{n-2}-a_4b_3-a_{n-2}b_4+a_{n-2}b_3+a_3b_4+a_4b_{n-2}+a_3b_{n-1}\\&+a_4b_3+a_{n-1}b_4-a_{n-1}b_3-a_3b_4-a_4b_{n-1}-a_3b_n-a_4b_3-a_nb_4+a_nb_3+a_3b_4+a_4b_n\\&+\cdots+a_{n-3}b_{n-1}+a_{n-2}b_{n-3}+a_{n-1}b_{n-2}-a_{n-1}b_{n-3}-a_{n-3}b_{n-2}-a_{n-2}b_{n-1}-a_{n-3}b_n-a_{n-2}b_{n-3}\\&-a_nb_{n-2}+a_nb_{n-3}+a_{n-3}b_{n-2}+a_{n-2}b_n+a_{n-3}b_n+a_{n-1}b_{n-3}+a_nb_{n-1}-a_nb_{n-3}-a_{n-3}b_{n-1}\\&-a_{n-1}b_n-a_{n-2}b_n-a_{n-1}b_{n-2}-a_nb_{n-1}+a_nb_{n-2}+a_{n-2}b_{n-1}+a_{n-1}b_n \qquad (11)\end{aligned}$$

Untuk setiap $i, j=1,2,\cdots,n$ dengan $i \neq j$ terdapat $n-2$ buah kombinasi $a_ib_j$ dengan tanda positif dan negatif yang saling bergantian. Artinyapada kasus $n=genap$ terdapat kombinasi $a_ib_j$ ada sebanyak genap, sehingga diperoleh: $|A_{3\times n}|=0$

b. Untuk $n$ ganjil

$$|A_{3\times n}| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 & \cdots & b_{n-3} & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}|A_{3\times n}| = &(-1)^{(1+2+3)+(1+2+3)}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(1+2+4)}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_4 \end{vmatrix} +\\
&(-1)^{(1+2+3)+(1+2+5)}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_5 \\ 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_5 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(1+2+6)}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_6 \\ 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_6 \end{vmatrix} +\\
&(-1)^{(1+2+3)+(1+2+7)}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_7 \\ 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_7 \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{(1+2+3)+(1+2+(n-3))}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_{n-3} \\ 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_{n-3} \end{vmatrix} +\\
&(-1)^{(1+2+3)+(1+2+(n-2))}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_{n-2} \\ 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_{n-2} \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(1+2+(n-1))}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_{n-1} \\ 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_{n-1} \end{vmatrix} +\\
&(-1)^{(1+2+3)+(1+2+(n))}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_n \\ 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_n \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(1+3+4)}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_4 \\ 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} +\\
&(-1)^{(1+2+3)+(1+3+5)}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_3 & b_5 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(1+3+6)}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_6 \\ 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_3 & b_6 \end{vmatrix} +\\
&(-1)^{(1+2+3)+(1+3+7)}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_7 \\ 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_3 & b_7 \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{(1+2+3)+(1+3+(n-3))}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_{n-3} \\ 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_3 & b_{n-3} \end{vmatrix} +\end{aligned}$$

$$(-1)^{(1+2+3)+(1+3+(n-2))}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_{n-2} \\ 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_3 & b_{n-2} \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(1+3+(n-1))}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_{n-1} \\ 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_3 & b_{n-1} \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{(1+2+3)+(1+3+(n))}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_n \\ 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_3 & b_n \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{(1+2+3)+(1+(n-2)+(n))}\begin{vmatrix} a_1 & a_{n-2} & a_n \\ 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_{n-2} & b_n \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{(1+2+3)+(1+(n-1)+(n))}\begin{vmatrix} a_1 & a_{n-1} & a_n \\ 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_{n-1} & b_n \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(2+3+4)}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ 1 & 1 & 1 \\ b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{(1+2+3)+(2+3+5)}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_5 \\ 1 & 1 & 1 \\ b_2 & b_3 & b_5 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(2+3+6)}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_6 \\ 1 & 1 & 1 \\ b_2 & b_3 & b_6 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{(1+2+3)+(2+3+7)}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_7 \\ 1 & 1 & 1 \\ b_2 & b_3 & b_7 \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{(1+2+3)+(2+3+(n-3))}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_{n-3} \\ 1 & 1 & 1 \\ b_2 & b_3 & b_{n-3} \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{(1+2+3)+(2+3+(n-2))}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_{n-2} \\ 1 & 1 & 1 \\ b_2 & b_3 & b_{n-2} \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(2+3+(n-1))}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_{n-1} \\ 1 & 1 & 1 \\ b_2 & b_3 & b_{n-1} \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{(1+2+3)+(2+3+(n))}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_n \\ 1 & 1 & 1 \\ b_2 & b_3 & b_n \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{(1+2+3)+(2+(n-2)+(n))}\begin{vmatrix} a_2 & a_{n-2} & a_n \\ 1 & 1 & 1 \\ b_2 & b_{n-2} & b_n \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{(1+2+3)+(2+(n-1)+(n))}\begin{vmatrix} a_2 & a_{n-1} & a_n \\ 1 & 1 & 1 \\ b_2 & b_{n-1} & b_n \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(3+4+5)}\begin{vmatrix} a_3 & a_4 & a_5 \\ 1 & 1 & 1 \\ b_3 & b_4 & b_5 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{(1+2+3)+(3+4+6)}\begin{vmatrix} a_3 & a_4 & a_6 \\ 1 & 1 & 1 \\ b_3 & b_4 & b_6 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(3+4+7)}\begin{vmatrix} a_3 & a_4 & a_7 \\ 1 & 1 & 1 \\ b_3 & b_4 & b_7 \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$(-1)^{(1+2+3)+(3+4+(n-3))}\begin{vmatrix} a_3 & a_4 & a_{n-3} \\ 1 & 1 & 1 \\ b_3 & b_4 & b_{n-3} \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(3+4+(n-2))}\begin{vmatrix} a_3 & a_4 & a_{n-2} \\ 1 & 1 & 1 \\ b_3 & b_4 & b_{n-2} \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{(1+2+3)+(3+4+(n-1))}\begin{vmatrix} a_3 & a_4 & a_{n-1} \\ 1 & 1 & 1 \\ b_3 & b_4 & b_{n-1} \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(3+4+(n))}\begin{vmatrix} a_3 & a_4 & a_n \\ 1 & 1 & 1 \\ b_3 & b_4 & b_n \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$(-1)^{(1+2+3)+(3+(n-2)+(n))}\begin{vmatrix} a_3 & a_{n-2} & a_n \\ 1 & 1 & 1 \\ b_3 & b_{n-2} & b_n \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(3+(n-1)+(n))}\begin{vmatrix} a_3 & a_{n-1} & a_n \\ 1 & 1 & 1 \\ b_3 & b_{n-1} & b_n \end{vmatrix}$$

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol.5, No. 2, Juli 2019
ISSN 2460-4542, e-ISSN 2615-8663

$$(-1)^{(1+2+3)+((n-3)+(n-2)+(n-1))}\begin{vmatrix} a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 1 & 1 & 1 \\ b_{n-3} & b_{n-2} & b_{n-1} \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+((n-3)+(n-2)+(n))}\begin{vmatrix} a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n} \\ 1 & 1 & 1 \\ b_{n-3} & b_{n-2} & b_{n} \end{vmatrix} +$$
$$(-1)^{(1+2+3)+((n-3)+(n-1)+(n))}\begin{vmatrix} a_{n-3} & a_{n-1} & a_{n} \\ 1 & 1 & 1 \\ b_{n-3} & b_{n-1} & b_{n} \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+((n-2)+(n-1)+(n))}\begin{vmatrix} a_{n-2} & a_{n-1} & a_{n} \\ 1 & 1 & 1 \\ b_{n-2} & b_{n-1} & b_{n} \end{vmatrix}$$

Menggunakan metode Sarrus maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
\left|A_{3\times n}\right| = {} & a_1b_3 + a_2b_1 + a_3b_2 - a_3b_1 - a_1b_2 - a_2b_3 - a_1b_4 - a_2b_1 - a_4b_2 + a_4b_1 + a_1b_2 + a_2b_4 \\
& + a_1b_5 + a_2b_1 + a_5b_2 - a_5b_1 - a_1b_2 - a_2b_5 - a_1b_6 - a_2b_1 - a_6b_2 + a_6b_1 + a_1b_2 + a_2b_6 \\
& + a_1b_7 + a_2b_1 + a_7b_2 - a_7b_1 - a_1b_2 - a_2b_7 - \cdots - a_1b_{n-3} - a_2b_1 - a_{n-3}b_2 + a_{n-3}b_1 \\
& + a_1b_2 + a_2b_{n-3} + a_1b_{n-2} + a_2b_1 + a_{n-2}b_2 - a_{n-2}b_1 - a_1b_2 - a_2b_{n-2} - a_1b_{n-1} - a_2b_1 - a_{n-1}b_2 \\
& + a_{n-1}b_1 + a_1b_2 + a_2b_{n-1} + a_1b_n + a_2b_1 + a_nb_2 - a_nb_1 - a_1b_2 - a_2b_n + a_1b_4 + a_3b_1 + a_4b_3 \\
& - a_4b_1 - a_1b_3 - a_3b_4 - a_1b_5 - a_3b_1 - a_5b_3 + a_5b_1 + a_1b_3 + a_3b_5 + a_1b_6 + a_3b_1 + a_6b_3 \\
& - a_6b_1 - a_1b_3 - a_3b_6 - a_1b_7 - a_3b_1 - a_7b_3 + a_7b_1 + a_1b_3 + a_3b_7 + \cdots + a_1b_{n-3} + a_3b_1 \\
& + a_{n-3}b_3 - a_{n-3}b_1 - a_1b_3 - a_3b_{n-3} - a_1b_{n-2} - a_3b_1 - a_{n-2}b_3 + a_{n-2}b_1 + a_1b_3 + a_3b_{n-2} \\
& + a_1b_{n-1} + a_3b_1 + a_{n-1}b_3 - a_{n-1}b_1 - a_1b_3 - a_3b_{n-1} - a_1b_n - a_3b_1 - a_nb_3 + a_nb_1 + a_1b_3 \\
& + a_3b_n - \cdots - a_1b_n - a_{n-2}b_1 - a_nb_{n-2} + a_nb_1 \\
& + a_1b_{n-2} + a_{n-2}b_n + a_1b_n + a_{n-1}b_1 + a_nb_{n-1} - a_nb_1 - a_1b_{n-1} - a_{n-1}b_n - a_2b_4 - a_3b_2 - a_4b_3 \\
& + a_4b_2 + a_2b_3 + a_3b_4 + a_2b_5 + a_3b_2 + a_5b_3 - a_5b_2 - a_2b_3 - a_3b_5 - a_2b_6 - a_3b_2 - a_6b_3 \\
& + a_6b_2 + a_2b_3 + a_3b_6 + a_2b_7 + a_3b_2 + a_7b_3 - a_7b_2 - a_2b_3 - a_3b_7 - \cdots - a_2b_{n-3} - a_3b_2 \\
& - a_{n-3}b_3 + a_{n-3}b_2 + a_2b_3 + a_3b_{n-3} + a_2b_{n-2} + a_3b_2 + a_{n-2}b_3 - a_{n-2}b_2 - a_2b_3 - a_3b_{n-2} \\
& - a_2b_{n-1} - a_3b_2 - a_{n-1}b_3 + a_{n-1}b_2 + a_2b_3 + a_3b_{n-1} + a_2b_n + a_3b_2 + a_nb_3 - a_nb_2 - a_2b_3 \\
& - a_3b_n + \cdots + a_2b_n + a_{n-2}b_2 + a_nb_{n-2} - a_nb_2 - a_2b_{n-2} - a_{n-2}b_n - a_2b_n - a_{n-1}b_2 - a_nb_{n-1} \\
& + a_nb_2 + a_2b_{n-1} + a_{n-1}b_n + a_3b_5 + a_4b_3 + a_5b_4 - a_5b_3 - a_3b_4 - a_4b_5 - a_3b_6 - a_4b_3 - \\
& a_6b_4 + a_6b_3 + a_3b_4 + a_4b_6 + a_3b_7 + a_4b_3 + a_7b_4 - a_7b_3 - a_3b_4 - a_4b_7 - \cdots - a_3b_{n-3} \\
& - a_4b_3 - a_{n-3}b_4 + a_{n-3}b_3 + a_3b_4 + a_4b_{n-3} + a_3b_{n-2} + a_4b_3 + a_{n-2}b_4 - a_{n-2}b_3 - a_3b_4 - \\
& a_4b_{n-2} - a_3b_{n-1} - a_4b_3 - a_{n-1}b_4 + a_{n-1}b_3 + a_3b_4 + a_4b_{n-1} + a_3b_n + a_4b_3 + a_nb_4 - a_nb_3 \\
& - a_3b_4 - a_4b_n - \cdots - a_3b_n - a_{n-2}b_3 - a_nb_{n-2} + a_nb_3 + a_3b_{n-2} + a_{n-2}b_n + a_3b_n + a_{n-1}b_3 \\
& + a_nb_{n-1} - a_nb_3 - a_3b_{n-1} - a_{n-1}b_n + \cdots + a_{n-3}b_{n-1} + a_{n-2}b_{n-3} + a_{n-1}b_{n-2} - a_{n-1}b_{n-3} - \\
& a_{n-3}b_{n-2} - a_{n-2}b_{n-1} - a_{n-3}b_n - a_{n-2}b_{n-3} - a_nb_{n-2} + a_nb_{n-3} + a_{n-3}b_{n-2} + a_{n-2}b_n + a_{n-3}b_n \\
& + a_{n-1}b_{n-3} + a_nb_{n-1} - a_nb_{n-3} - a_{n-3}b_{n-1} - a_{n-1}b_n - a_{n-2}b_n - a_{n-1}b_{n-2} - a_nb_{n-1} + a_nb_{n-2} \\
& + a_{n-2}b_{n-1} + a_{n-1}b_n
\end{aligned} \tag{12}$$

Untuk setiap $i, j = 1, 2, \cdots, n$ dengan $i \neq j$ terdapat $n-2$ buah kombinassi $a_ib_j$ dengan tanda positif dan negatif yang saling bergantian. Artinya pada kasus $n = ganjil$ terdapat kombinasi $a_ib_j$ ada sebanyak ganjil, sehingga diperoleh:

$$
\begin{aligned}
|A_{3\times n}| &= (a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 + \cdots + a_{n-3} - a_{n-2} + a_{n-1} - a_n)b_1 \\
&\quad -(a_1 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 + \cdots + a_{n-3} - a_{n-2} + a_{n-1} - a_n)b_2 \\
&\quad +(a_1 - a_2 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 + \cdots + a_{n-3} - a_{n-2} + a_{n-1} - a_n)b_3 \\
&\quad -(a_1 - a_2 + a_3 - a_5 + a_6 - a_7 + \cdots + a_{n-3} - a_{n-2} + a_{n-1} - a_n)b_4 \\
&\quad +(a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_6 - a_7 + \cdots + a_{n-3} - a_{n-2} + a_{n-1} - a_n)b_5 \\
&\quad -(a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_7 + \cdots + a_{n-3} - a_{n-2} + a_{n-1} - a_n)b_6 \\
&\quad +(a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \cdots + a_{n-3} - a_{n-2} + a_{n-1} - a_n)b_7 \\
&\quad - \cdots + (a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \cdots - a_{n-2} + a_{n-1} - a_n)b_{n-3} \\
&\quad -(a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \cdots - a_{n-3} + a_{n-1} - a_n)b_{n-2} \\
&\quad +(a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \cdots - a_{n-3} + a_{n-2} - a_n)b_{n-1} \\
&\quad -(a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \cdots - a_{n-3} + a_{n-2} - a_{n-1})b_n
\end{aligned}
$$

$$|A_{3\times n}| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} b_i c_i$$

## Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, dapat ditarik kesimpulan, yaitu: Diberikan matriks tidak bujur sangkar berbentuk khusus dengan ukuran $3 \times n$ sebagai berikut:

$$A_{3\times n} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_i \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_i \end{bmatrix} n > 3 \, \forall \, a_i, b_i \in R, i = 1, 2, \cdots, n$$

maka diperoleh:

$$|A_{3\times n}| = \begin{cases} 0 & , n \ genap \\ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} b_i c_i & , n \ ganjil \end{cases}$$

dengan $i = 1, 2, 3, \cdots, n$

$$
\begin{aligned}
c_1 &= (a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \cdots + a_{n-1} - a_n) \\
c_2 &= (a_1 - a_3 + a_4 - a_5 + \cdots + a_{n-1} - a_n) \\
c_3 &= (a_1 - a_2 + a_4 - a_5 + \cdots + a_{n-1} - a_n) \\
c_4 &= (a_1 - a_2 + a_3 - a_5 + \cdots + a_{n-1} - a_n) \\
c_5 &= (a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{n-1} - a_n) \\
&\vdots \\
c_{n-1} &= (a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{n-2} - a_n) \\
c_n &= (a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{n-2} - a_{n-1})
\end{aligned}
$$

## Daftar Pustaka

[1] Amiri, A, M Fathy dan M. Bayat. “Generalization of Some Determinantal Identities For Non-Square Matrices Based on Radic’s Defenition”. *TWMS Journal Pure Application Mathematic.* Vol.1. No.2 Hal.163-175, 2010.

[2] Anton, Howard dan Chris Rorres. “*Aljabar Linear Elementer: Versi Aplikasi”.* Edisi 8.

Jakarta: Erlangga, 2004.

[3] Hanita, “Determinan Matriks Tidak Bujur Sangkar Berbentuk Khusus $3 \times n$ Menggunakan Metode Radic”. *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, Vol 4. No.1 Januari 2018.

[4] Makarewicz, Anna dkk. “Properties of the Determinant of a Rectangular Matrix”. *UMCS Mathematic.* Vol.68. No.1 Hal. 31-41, 2014.

[5] Radic, Mirko. “Beitrage Zur Algebra and Geometrie Contributions to Algebra and Geometry”. *Journal About A Determinant of Rectangular* $2 \times n$ *Matrix and its Geometric Interpretation*. Vol.46. No.1 Hal 321-349, 2005.

[6] Saputri, Erma. “Determinan Matriks Persegi Panjang Berbentuk Khusus $2 \times n$ Menggunakan Metode Radic”. *Tugas Akhir Mahasiswa Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim.* 2018.