Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol.5, No. 2, Juli 2019
ISSN 2460-4542, e-ISSN 2615-8663

Modifikasi Metode Sekelas Chebyshev Dua Parameter Real dengan Orde Konvergensi Empat

Wartono, Andre Setia Deswanta, Mohammad Soleh
Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: wartono@uin-suska.ac.id, andresetiadeswanta@gmail.com,

ABSTRAK

Metode Chebyshev-Halley dan Sekelas Chebyshev masing-masing merupakan metode iterasi dengan orde konvergensi tiga yang menggunakan tiga evaluasi fungsi untuk menyelesaikan persamaan nonlinier. Pada artikel ini, penulis mengkontruksi metode iterasi dua langkah dengan menjumlahkan metode Chebyshev-Halley dan Chebyshev-Like yang masing-masing terdapat sebuah parameter real. Berdasarkan hasil penelitian, penulis memperoleh metode iterasi baru dua langkah dengan orde konvergensi empat yang melibatkan tiga evaluasi fungsi dan indeks efisiensi sebesar 1,587401. Simulasi numerik diberikan dengan menggunakan beberapa fungsi untuk menunjukkan performa metode iterasi baru. Hasil simulasi numerik menujukkan bahwa performa metode iterasi baru lebih baik dari metode Newton, metode Chebysev-Halley, dan Metode sekelas Chebyshev.

Kata Kunci: Deret Taylor, Metode Chebyshev-Halley, Metode Chebyshev-Like, orde konvergensi, Simulasi numerik.

ABSTRACT

Chebyshev-Halley's and Chebyshev-Like methods are an iterative method with third order of convergence that using three evaluation of functions to solve a nonlinear equation. In this paper, the author construcs an two-point iterative method by using the sum of the Chebyshev-Halley's and Chebyshev-Like method methods with one real parameter. Based on the result of the research, the author obtained a new two-step iterative method with four order of convergence which involves three evaluation of fungtion and efficiency index equal to 1.587401. Numerical simulations are givern by using several functions to show the performance of the new iterative method. The result of numerical simulation show that thet performance of the new method better than Newton's method, Chebyshev-Halley's method, and Chebyshev-Like method.

Keywords: *Taylor Series, Chebyshev-Halley's Method, Chebyshev-Like Method, order of convergence, numerical simulation.*

Pendahuluan

Salah satu topik yang hangat diperbincangkan dalam ilmu matematika adalah teknik untuk mendapatkan solusi persamaan nonlinear dalam bentuk

$$f(x)=0. \tag{1}$$

Sebagian besar persamaan nonlinear yang diberikan pada Persamaan (1) disusun dalam bentuk yang kompleks dan rumit. Sebagai akibatnya, teknik analitik tidak dapat menemukan penyelesaian (1). Oleh karena itu, alternatif yang dapat dilakukan adalah menggunakan penyelesaian secara numerik yang melibatkan perhitungan secara berulang. Penyelesaian Persamaan (1) dengan menggunakan teknik seperti ini biasanya disebut metode iterasi.

Salah satu penerapan metode numerik dalam perhitungan aritmatika adalah mencari akar-akar persamaan nonlinear yang menghasilkan solusi hampiran yang bersifat iterasi. Salah satu metode iterasi yang sering digunakan untuk menentukan akar-akar hampiran dari suatu persamaan nonlinear adalah metode Newton [13] yang ditulis dengan bentuk sebagai berikut

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2}$$

dengan

$$f'(x_n) \neq 0.$$

Metode Newton, yang dikontruksi menggunakan ekspansi deret Taylor order satu, memiliki orde konvergensi dua dan melibatkan dua evaluasi fungsi pada setiap iterasinya dengan indeks efisiensi sebesar $2^{1/2} \approx 1,4142$.

Akselerasi sebuah metode iterasi pada proses menghampiri akar-akar persamaan nonlinear bergantung pada orde konvergensi. Oleh karena itu, pada saat ini banyak peneliti dan ilmuwan melakukan pengembangan motode iterasi dengan menggunakan deret Taylor order dua yang menghasilkan metode iterasi Chebyshev, Halley dan Halley irasiona (sering juga disebut metode iterasi Euler) dengan order konvergensi tiga.

Guieterrez dkk memperumum bentuk metode Chebysev dan Halley dengan menambahkan parameter real dalam bentuk

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{1}{2}\frac{L_f}{1-\beta L_f}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{3}$$

dengan

$$L_f = \frac{f''(x_n) f(x_n)}{f'(x_n)^2}. \tag{4}$$

Metode iterasi (3) lebih dikenal dengan nama metode Chebysev-Halley. Adanya parameter real β memungkinkan metode iterasi (3) memunculkan bentuk lain, yaitu metode Chebysev (β = 0), metode Halley (β = ½) dan metode Super Halley (β = 1).

Selain itu, metode numerik dengan konvergensi kubik lainnya yaitu yang dikenal dengan metode Chebyshev-Like [1] dengan bentuk :

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{1}{2}L_f + \lambda L_f^2\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ 0 \le \lambda \le 2, \tag{5}$$

dengan

Berbagai macam cara dilakukan untuk mendapatkan indeks yang lebih tinggi untuk meningkatkan orde konvergensi metode iterasi. Penulis tertarik untuk membahas Persamaan (3) dan Persamaan (4) dengan melakukan modifikasi terhadap metode Chebyshev-Halley dan Chebyshev-Like dengan menggunakan deret Taylor, kemudian menjumlahkan kedua metode yang masing-masing terdapat sebuah parameter, sehingga menjadi metode iterasi baru dua langkah, oleh karena itu diharapkan konvergensinya lebih baik dari metode sebelumnya.

Metode Penelitian

Pada bagian ini, penulis menggunakan beberapa definisi penting yang akan dilibatkan pada proses mengkontruksi metode iterasi, menentukan orde konvergensi, baik menggunakan ekspansi deret Taylor maupun komputasi (COC) dan simulasi numerik. Adapun definisi-definisi yang digunakan adalah sebagai berikut:

Definisi 1. [9] Misalkan α adalah akar persamaan dari fungsi $f(x)$, dan $\{x_n\}$ adalah sebuah barisan bilangan real yang konvergen ke α untuk n ≥ 0 Jika terdapat c ≠ 0 dan $p \geq 1$ sedemikian hingga,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = c \tag{6}$$

atau

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol.5, No. 2, Juli 2019
ISSN 2460-4542, e-ISSN 2615-8663

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = c \tag{7}$$

dengan p adalah orde konvergensi dari barisan $\{x_n\}$, dan c adalah konstanta galat asimtotik (*asymptotic error constant*). Untuk $p = 1,\ 2,\ 3$, maka barisan $\{x_n\}$ masing-masing konvergen secara linear, kuadratik, dan kubik.

Definisi 2. [9] Misalkan $e_n = x_n - \alpha$ adalah galat pada iterasi ke $-n$, maka dapat didefinisikan:

$$e_{n+1} = ce_n^p + \mathrm{O}(e_n^{p+1}) \tag{8}$$

sebagai persamaan kesalahan dari suatu metode iterasi, dengan p adalah orde konvergensi dan c adalah konstanta asimtotik.

Definisi 3. [10] Misalkan r adalah jumlah dari evaluasi pada fungsi atau salah satu dari derivatifnya, maka efisiensi dari suatu metode diukur dengan indeks efisiensi yang didefinisikan oleh:

$$IE = p^{1/r} \tag{9}$$

Definisi 4. [13] Misalkan α adalah akar persamaan fungsi $f(x)$ dan x_{n-1}, x_n dan x_{n+1} adalah akar-akar pendekatan pada iterasi ke $n-1$, n dan $n+1$ yang dekat dengan α, maka orde konvergensi komputasi dihitung menggunakan formulasi

$$\rho \approx \frac{\ln\left|(x_{n+1}-\alpha)/(x_n-\alpha)\right|}{\ln\left|(x_n-\alpha)/(x_{n-1}-\alpha)\right|}. \tag{10}$$

Hasil dan Pembahasan

1. Metode Iterasi

Untuk mengkontruksi metode iterasi dua langkah, penulis memulai dengan mempertibangkan kembali metode iterasi Chebysev-Halley [5] dan sekelas Chebyshev-Halley [1] yang masing-masing ditulis sebagai berikut,

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{1}{2}\frac{L_f}{1-\beta L_f}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{11}$$

dan

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{1}{2}L_f + \lambda L_f^{\,2}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{12}$$

Penjumlahan Persamaan (11) dan (12) diberikan oleh,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{2}\frac{L_f}{1-\beta L_f} + \frac{L_f}{2} + \lambda L_f^{\,2}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{13}$$

Kemudian definisikan kembali ekspansi deret Taylor disekitar x_n sampai orde tiga, diperoleh

$$f(x) \approx f(x_n) + f'(x_n)(x-x_n) + \frac{1}{2}f''(x_n)(x-x_n)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_n)(x-x_n)^3. \tag{14}$$

Misalkan x_{n+1} adalah akar pendekatan fungsi nonlinear f pada iterasi ke-(n+1) yang cukup dekat dengan α dan dengan mengambil $x = x_{n+1}$, maka Persamaan (14) menjadi

$$f(x_{n+1}) \approx f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1}-x_n) + \frac{1}{2}f''(x_n)(x_{n+1}-x_n)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_n)(x_{n+1}-x_n)^3. \tag{15}$$

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol.5, No. 2, Juli 2019
ISSN 2460-4542, e-ISSN 2615-8663

Oleh karena x_{n+1} cukup dekat dengan α, maka $f(x_{n+1}) \approx 0$, dan faktorisasi suku ketiga dan keempat pada Persamaan (15) memberikan

$$0 \approx f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \frac{1}{2}\left[f''(x_n) + \frac{1}{3} f'''(x_n)(x_{n+1} - x_n) \right](x_{n+1} - x_n)^2, \qquad (16)$$

sehingga Persamaan (16) dapat ditulis kembali menjadi

$$0 \approx f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \frac{1}{2} \tilde{f}''(x_n)(x_{n+1} - x_n)^2. \qquad (17)$$

dengan

$$\tilde{f}''(x_n) \approx f''(x_n) + \frac{1}{3} f'''(x_n)(x_{n+1} - x_n). \qquad (18)$$

Selanjutnya dengan menggunakan Persamaan (18), Persamaan (13) dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{2} \frac{\tilde{L}_f}{(1 - \beta \tilde{L}_f)} + \frac{\tilde{L}_f}{2} + \lambda \tilde{L}_f^{\,2} \right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad (19)$$

dengan

$$\tilde{L}_f = \frac{\tilde{f}''(x_n) f(x_n)}{f'(x_n)^2}. \qquad (20)$$

Substitusikan Persamaan (18) ke Persamaan (20), maka $\tilde{L}_f$ dapat ditulis kembali menjadi

$$\tilde{L}_f = \left(f''(x_n) + \frac{1}{3} f'''(x_n)(y_n - x_n) \right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)^2}, \qquad (21)$$

dengan y_n adalah metode Newton yang diberikan pada Persamaan (2).

Persamaan (21) masih memuat turunan ketiga. Oleh karena itu, penulis mengaproksimasinya menggunakan selisih terbagi pada titik x_n dan z_n yang diberikan oleh

$$f'''(x_n) = \frac{f''(z_n) - f''(x_n)}{z_n - x_n}, \qquad (22)$$

dengan

$$z_n = x_n + \theta(y_n - x_n). \qquad (23)$$

Berdasarkan Persamaan (22), maka $f''(x_n) + \frac{1}{3} f'''(x_n)(y_n - x_n)$ pada (21) dapat diaproksimasi dalam bentuk

$$f''(x_n) + \frac{1}{3} f'''(x_n)(y_n - x_n) \approx \frac{1}{3\theta} f''(z_n) + \left(1 - \frac{1}{3\theta} \right) f''(x_n). \qquad (24)$$

Untuk menghilangkan bentuk $f''(x_n)$ pada Persamaan (24) dilakukan dengan mengambil nilai $\theta = \frac{1}{3}$, sehingga Persamaan (24) dapat ditulis kembali

$$f''(x_n) + \frac{1}{3} f'''(x_n)(y_n - x_n) \approx f''(z_n), \qquad (25)$$

sehingga dengan menggunakan Persamaan (25), maka Persamaan (21) dapat ditulis kembali

$$\tilde{L}_f = \frac{f''(z_n) f(x_n)}{f'(x_n)^2}. \qquad (26)$$

Oleh karena itu diperoleh metode iterasi baru yang secara lengkap ditulis sebagai berikut :

$$z_n = x_n - \frac{1}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{27}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{2}\frac{\tilde{L}_f}{1-\beta\tilde{L}_f} + \frac{\tilde{L}_f}{2} + \lambda\tilde{L}_f^{\,2}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{28}$$

dengan $\tilde{L}_f$ diberikan pada (26).

Persamaan (28) merupakan metode iterasi dua langkah yang melibatkan tiga evaluasi fungsi, yaitu $f(x_n)$, $f'(x_n)$, dan $f''(z_n)$.

2. Orde Konvergensi

Pada sub-bagian berikut ini dibahas analisis konvergensi dari metode iterasi pada Persamaan (27) – (28) yang dijelaskan pada teorema berikut ini.

Teorema 1 *Misalkan $f : D \subset R \to R$ fungsi yang mempunyai turunan pada interval terbuka D. Selanjutnya asumsikan bahwa α adalah akar sederhana dari persamaan $f(x) = 0$. Misalkan diberikan tebakan awal x_0 cukup dekat ke α, dimana $\gamma = 2(1-\beta)$ maka metode iterasi pada Persamaan (27) – (28) memiliki orde konvergensi empat dan memenuhi persamaan error*

$$e_{n+1} = \left(\frac{1}{3}c_4 - c_2c_3 - \left(3 - 16\lambda + 8\lambda^2\right)c_2^3\right)e_n^4 + O(e_n^5). \tag{29}$$

Bukti : Misalkan α adalah akar sederhana dari fungsi $f(x) = 0$, maka $f(\alpha)$. Asumsikan bahwa $x_n = \alpha + e_n$ dan $c_j = \frac{1}{j!}\frac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$, $j = 2,3,\cdots$. Selanjutnya, ekspansi $f(x)$ dan $f'(x)$ disekitar α dengan menggunakan deret Taylor, maka $f(x_n)$ dan $f'(x_n)$ masing-masing diberikan oleh

$$f(x_n) = f'(\alpha)(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)), \tag{30}$$

dan

$$f'(x_n) = f'(\alpha)(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)). \tag{31}$$

Jika Persamaan (31) dibagi dengan Persamaan (30), maka diperoleh :

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - c_2e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4). \tag{32}$$

Selanjutnya, substitusikan Persamaan (32) ke dalam Persamaan (35), dan dengan menggunakan $x_n = e_n + \alpha$ maka :

$$z_n = \alpha + \frac{2}{3}e_n + \frac{1}{3}c_2e_n^2 + \left(\frac{2}{3}c_3 - \frac{2}{3}c_2^2\right)e_n^3 + \left(-\frac{7}{3}c_2c_3 + c_4 + \frac{4}{3}c_2^3\right)e_n^4 + O(e_n^5). \tag{33}$$

Selanjutnya, dengan menggunakan ekspansi deret Taylor terhadap $f''(x)$ disekitar α, maka $f''(z_n)$ diberikan oleh

$$f''(z_n) = f'(\alpha)(2c_2 + 4c_3e_n + \left(\frac{16}{3}c_4 + 2c_2c_3\right)e_n^2 + \ldots + O(e_n^5)). \tag{34}$$

Selanjutnya, dengan menggunakan (30), (31) dan (34), kita peroleh

$$\tilde{L}_f = 2c_2e_n + (4c_3 - 6c_2^2)e_n^2 + \ldots + O(e_n^5), \tag{35}$$

sehingga

$$\frac{\tilde{L}_f}{1-\beta\tilde{L}_f} = 2c_2e_n + (4c_3 - 6c_2^2 + 4c_2^2\beta)e_n^2 + \ldots + O(e_n^5). \tag{36}$$

Sekali lagi, jika Persamaan (35) dikuadratkan maka diperoleh :

$$\tilde{L}_f^{\,2} = 4c_2^2e_n^2 + (-24c_2^3 + 24c_2c_3)e_n^3 + \ldots + (e_n^5). \tag{37}$$

Selanjutnya, subtitusikan Persamaan (35), (36), dan (37) ke Persamaan (28), dan dengam menggunakan $x_{n+1} = e_{n+1} + \alpha$ dan $x_n = e_n + \alpha$, maka diiperoleh :

$$e_{n+1} = (2-2\lambda-\beta)c_2^2e_n^3 + \left(\frac{1}{3}c_4 + (-9+7\beta-2\beta^2+14\lambda)c_2^3 + (7-4\beta-8\lambda)c_2c_3\right)e_n^4 + O(e_n^5)$$

(38)

Persamaan (38) memerikan informasi bahwa orde konvergensi pada Persamaan (28) meningkat dengan mengambil hubungan,

$$\beta = 2(1-\lambda). \tag{39}$$

Selanjutnya, substitusikan (39) ke (38), maka diperoleh

$$e_{n+1} = \left(\frac{1}{3}c_4 - c_2c_3 - \left(3-16\lambda+8\lambda^2\right)c_2^3\right)e_n^4 + O(e_n^5). \tag{40}$$

Persamaan (40) merupakan galat dari metode iterasi (27) – (28) dengan orde konvergensi empat dan melibatkan tiga evaluasi fungsi f yaitu $f(x_n)$, $f'(x_n)$ dan $f''(z_n)$ sehingga menghasilkan indeks effisiensi $4^{1/3} \approx 1,58740$.

3. Simulasi Numerik

Berikut ini akan diberikan simulasi numerik dari metode baru hasil modifikasi yang diberikan pada Persamaan (35) – (36), dengan menggunakan *Software* Maple 13 dengan 850 digit desimal. Pada simulasi numerik ini akan ditentukan jumlah iterasi, orde konvergensi yang dihitung secara komputasi (COC), nilai mutlak fungsi, galat relatif, dan galat mutlak dengan menggunakan beberapa fungsi real.

Misalkan α adalah akar dari suatu persamaan fungsi nonlinear dan x_{n-1}, x_n, x_{n+1} adalah tiga iterasi berturut-turut yang dekat dengan α. Sedangkan x_0 adalah nilai tebakan awal yang cukup dekat α. Adapun fungsi-fungsi yang digunakan dan nilai α yang ditulis sebanyak 20 digit desimal adalah sebagai berikut :

$f_1(x) = xe^{-x} - 0,1$, $\alpha \approx$ 0,11183255915896296483,

$f_2(x) = e^x - 4x^2$, $\alpha \approx$ 4,30658472822069929833,

$f_3(x) = \cos(x) - x$, $\alpha \approx$ 0,73908513321516064165,

$f_4(x) = (x-1)^3 - 1$, $\alpha =$ 2,00000000000000000000,

$f_5(x) = x^3 + 4x^2 - 10$, $\alpha \approx$ 1,36523003414096845760,

$f_6(x) = e^{-x^2+x+2} - \cos(x+1) + x^3 + 1$, $\alpha =$ - 1,00000000000000000000,

$f_7(x) = \sin^2(x) - x^2 + 1$, $\alpha \approx$ 1,40449164821534122603,

$f_8(x) = \sqrt{x} - x$, $\alpha =$ 1,00000000000000000000.

Selanjutnya simulasi numerik dari Persamaan (35) – Persamaan (36) akan dibandingkan jumlah iterasinya dengan beberapa metode iterasi dalam menghampiri akar persamaan nonlinear. Adapun metode perbandingannya yaitu metode Newton yang dinotasikan dengan (NM) (Traub, 1964), metode Chebyshev-halley yang dinotasikan dengan (MCH) [5], metode keluarga

Chebyshev-Like yang dinotasikan dengan (MCL) [1], dan metode hasil modifikasi jika nilai $\lambda = 0$ maka $\beta = 2$ yang dinotasikan dengan (MCHCL 4), dengan kriteria penghentian diberikan oleh

$$\left|x_{n+1} - x_n\right| < \varepsilon \,, \tag{41}$$

sedangkan *COC* (*Computational Order of Convergence*) dihitung dengan menggunakan rumus yang diberikan pada Persamaan (10)

Pada Tabel 1 ditunjukkan jumlah iterasi dan orde konvergensi yang dihitung secara komputasi dengan $\varepsilon = 10^{-95}$ sebagai berikut

Tabel 1. Jumlah Iterasi dan *COC* dengan $\varepsilon = 10^{-95}$

$f(x)$	x_0	MN	MCH	MCL	MCHCL 4
$f_1(x)$	– 0,2 0,3	8 (2,0000) 8 (2,0000)	5 (3,0000) 5 (3,0000)	5 (3,0000) 6 (3,0000)	5 (4,0000) 4 (4,0000)
$f_2(x)$	4,0 4,5	8 (2,0000) 7 (2,0000)	5 (3,0000) 5 (3,0000)	6 (3,0000) 5 (3,0000)	5 (4,0000) 4 (4,0000)
$f_3(x)$	0,1 1,5	8 (2,0000) 7 (2,0000)	5 (3,0000) 5 (3,0000)	6 (3,0000) 5 (3,0000)	4 (4,0000) 4 (4,0000)
$f_4(x)$	1,7 2,5	8 (2,0000) 8 (2,0000)	5 (3,0000) 5 (3,0000)	6 (3,0000) 5 (3,0000)	5 (4,0000) 5 (4,0000)
$f_5(x)$	1,0 2,0	8 (2,0000) 8 (2,0000)	5 (3,0000) 5 (3,0000)	6 (3,0000) 5 (3,0000)	4 (4,0000) 4 (4,0000)
$f_6(x)$	– 1,5 0,0	7 (2,0000) 7 (2,0000)	5 (3,0000) 6 (3,0000)	5 (3,0000) 6 (3,0000)	4 (4,0000) 5 (4,0000)
$f_7(x)$	1,2 2,0	8 (2,0000) 8 (2,0000)	5 (3,0000) 5 (3,0000)	5 (3,0000) 5 (3,0000)	4 (4,0000) 5 (4,0000)
$f_8(x)$	0,5 1,5	8 (2,0000) 7 (2,0000)	5 (3,0000) 5 (3,0000)	6 (4,0000) 4 (4,0000)	4 (4,0000) 4 (4,0000)

Berdasarkan Tabel 1 terlihat perbandingan nilai orde konvergensi secara komputasi dan terbukti bahwa *COC* lebih menegaskan orde konvergensi dari masing-masing metode. Metode yang orde konvergensinya tinggi memiliki jumlah iterasi yang sedikit dibandingkan dengan metode yang orde konvergensinya rendah. Seperti hasil modifikasi metode Chebyshev-Halley dan Chebyshev-Like menggunakan deret Taylor yang dinotasikan dengan (MCHCL 4) memiliki orde konvergensi empat. Kemudian, metode Newton yang dinotasikan dengan (MN) memiliki orde konvergensi dua, metode Chebyshev-Halley yang dinotasikan dengan (MCH) memiliki orde konvergensi tiga, keluarga metode Chebyshev-Like yang dinotasikan (MCL) memiliki orde konvergensi tiga.

Selanjutnya akan ditunjukkan perbandingan nilai $|f(x_n)|$ dari metode yang diteliti menggunakan total evaluasi fungsi (TNFE) sebesar 12 sebagai berikut.

Tabel 2. Nilai $|f(x_n)|$ dari beberapa Fungsi dengan TNFE = 12

$f(x)$	x_0	MN	MCH	MCL	MCHCL 4
$f_1(x)$	– 0,2 0,3	3,0850e-36 1,0735e-42	3,3997e-56 2,8447e-67	5,4874e-020 9,8701e-030	4,2063e-075 8,4064e-125
$f_2(x)$	4,0 4,5	5,0253e-33 3,1919e-52	2,4344e-56 1,7828e-79	7,1941e-017 2,8089e-057	3,9823e-090 1,1072e-159
$f_3(x)$	0,1 1,5	2,0345e-46 3,7607e-64	8,8009e-88 1,4084e-54	1,5892e-031 7,7439e-062	4,3895e-137 1,7120e-228
$f_4(x)$	1,7 2,5	3,0635e-28 3,8845e-28	1,1412e-51 5,0597e-64	9,6661e-018 3,3362e-047	7,9685e-063 2,9835e-035
$f_5(x)$	1,0 2,0	3,9823e-43 1,2361e-37	2,4700e-75 1,0384e-79	2,5707e-030 1,2087e-049	5,8741e-131 1,1119e-097

$f_6(x)$	– 1,5 0,0	5,7389e-66 1,9261e-65	7,3641e-37 1,2645e-22	1,1683e-033 1,5372e-024	3,7166e-139 4,8655e-083
$f_7(x)$	1,2 2,0	2,0864e-47 2,2623e-32	6,6768e-84 9,4783e-56	1,6696e-036 3,5687e-045	2,1164e-144 2,0445e-083
$f_8(x)$	0,5 1,5	1,5492e-43 1,0649e-66	2,9109e-61 5,1180e-71	2,9666e-022 2,2128e-158	7,4055e-152 1,9991e-248

Berdasarkan Tabel 2 terlihat perbandingan nilai desimal $|f(x_n)|$ pada (MCHCL 4) lebih kecil dari metode lainnya. Selanjutnya, Tabel 3 berikut menunjukkan nilai galat relatif $|x_{n+1}\text{-}x_n|$ berdasarkan jumlah total evaluasi fungsi dari setiap metode iterasi (TNFE) sebanyak 12 evaluasi fungsi.

Tabel 3. Nilai $|x_{n+1}\text{-}x_n|$ dari beberapa Fungsi dengan TNFE = 12

$f(x)$	x_0	MN	MCH	MCL	MCHCL 4
$f_1(x)$	– 0,2 0,3	1,9116 e-18 1,1277 e-21	4,2905 e-19 8,7106 e-23	2,9107 e-07 1,6430 e-10	1,9827 e-19 7,1201 e-32
$f_2(x)$	4,0 4,5	1,2322 e-17 3,1056 e-27	1,2533 e-19 2,4339 e-27	1,0215 e-06 3,4655 e-20	1,5025 e-23 6,1355 e-41
$f_3(x)$	0,1 1,5	2,3464 e-23 3,1900 e-32	1,9865 e-29 2,3235 e-18	1,4613 e-10 1,1499 e-20	1,8254 e-34 2,5654 e-57
$f_4(x)$	1,7 2,5	1,0105 e-14 1,1379 e-14	1,0450 e-17 7,9685 e-22	1,1135 e-06 1,6828 e-16	1,6801 e-16 1,3142 e-09
$f_5(x)$	1,0 2,0	2,2179 e-22 1,2356 e-19	1,3517 e-25 4,7003 e-27	6,6010 e-11 2,3825 e-17	1,7455 e-33 3,6409 e-25
$f_6(x)$	– 1,5 0,0	2,3956 e-33 4,3887 e-33	6,6536 e-13 3,6983 e-08	7,4432 e-12 8,1561 e-09	2,6783 e-35 2,8649 e-21
$f_7(x)$	1,2 2,0	3,2750 e-24 1,0784 e-16	3,1303 e-28 7,5795 e-19	7,9958 e-13 1,0299 e-15	8,6059 e-37 1,5171 e-21
$f_8(x)$	0,5 1,5	1,1132 e-21 2,9188 e-33	1,6700 e-20 9,3556 e-24	4,9434 e-06 6,9188 e-40	6,1406 e-38 4,6242 e-62

Berdasarkan Tabel 3 terlihat perbandingan metode dari hasil modifikasi lebih baik dari metode lainnya, karena memiliki nilai galat relatif yang lebih kecil dari metode pembanding lainnya. Selanjutnya, Tabel 4 menunjukkan nilai galat mutlak berdasarkan jumlah total evaluasi fungsi dari setiap metode iterasi (TNFE) sebanyak 12 evaluasi fungsi.

Tabel 4. Nilai $|x_n - \alpha|$ dari beberapa Fungsi dengan TNFE = 12

$f(x)$	x_0	MN	MCH	MCL	MCHCL 4
$f_1(x)$	– 0,2 0,3	3,8845 e-36 7,4592 e-30	4,2807 e-56 3,5819 e-67	6,9094 e-020 1,2427 e-029	5,2963 e-075 1,0584 e-124
$f_2(x)$	4,0 4,5	1,2647 e-34 8,0332 e-54	6,1268 e-58 4,4870 e-81	1,8105 e-018 7,0693 e-059	1,0022 e-091 2,7867 e-161
$f_3(x)$	0,1 1,5	1,2156 e-46 2,2470 e-64	5,2586 e-88 8,4156 e-55	9,4960 e-032 4,6270 e-062	2,6227 e-137 1,0229 e-228
$f_4(x)$	1,7 2,5	1,0211 e-28 1,2948 e-28	3,8041 e-52 1,6865 e-64	3,2220 e-018 1,1120 e-047	2,6561 e-063 9,9452 e-036
$f_5(x)$	1,0 2,0	2,4115 e-44 7,4858 e-39	1,4958 e-76 6,2885 e-81	1,5567 e-031 7,3197 e-051	5,5571 e-132 6,7336 e-099
$f_6(x)$	– 1,5 0,0	9,5649 e-67 3,2101 e-66	1,2273 e-37 2,1076 e-23	1,9472 e-034 2,5621 e-025	6,1944 e-140 8,1091 e-084
$f_7(x)$	1,2 2,0	8,4046 e-48 9,1131 e-33	2,6896 e-84 3,8181 e-56	6,7256 e-073 1,4375 e-045	8,5256 e-145 8,2357 e-084
$f_8(x)$	0,5 1,5	3,0985 e-43 2,1299 e-66	5,8219 e-61 1,0236 e-70	2,6127 e-022 1,0025 e-157	1,4811 e-151 3,9983 e-248

Berdasarkan Tabel 4 terlihat perbandingan nilai galat mutlak secara komputasi, yang dapat disimpulkan bahwa metode dari hasil modifikasi metode Chebyshev-Halley daan Chebyshev-Like menggunakan deret Taylor, dengan $\beta = 0$ maka $\gamma = 2$ berorde konvergensi empat atau dilambangkan dengan (MCHCL 4), memiliki galat yang lebih kecil dibandingkan metode pembanding lainnya.

Kesimpulan

Persamaan (35) – (36) merupkan metode iterasi baru hasil modifikasi yang memiliki orde konvergensi tingkat empat dengan tiga evaluasi fungsi yaitu $f(x_n)$, $f'(x_n)$, dan $f''(z_n)$. Oleh karena itu metode baru hasil modifikasi tersebut menghasilkan indeks effisiensi $4^{1/3} \approx 1{,}587401$.

Berdasarkan hasil simulasi numerik pada Tabel 1, MCHCL 4 secara umum memiliki iterasi yang lebih sedikit dan nilai COC yang lebih tinggi dibandingkan dengan metode iterasi lainnya. Selanjutnya berdasarkan Tabel 2, nilai fungsi (MCHCL 4) lebih baik dari metode lainnya karena memiliki nilai yang relatif lebih kecil, begitu juga dengan Tabel 3 dan Tabel 4 nilai galat relatif dan galat mutlak dari (MCHCL 4) lebih kecil dari metode iterasi pembanding lainnya. Sehingga metode (MCHCL 4) lebih efesien di bandingkan metode iterasi lainnya dalam menyelesaikan persamaan nonlinear.

DaftarPustaka

[1] Amat, S., dan Busquier, S.,Third-Order Iterative Method Under Kantorovich Condition, *Applied Mathematics and Computation*, 336, 2007. 243–261.

[2] Behl, R., Cordero, A., Motsa, S.S., Torregrosa, J. R., dan Kanwar, V., An Optimal Fourth-order Family of Method for Multiple Roots and Ist Dynamic, *Numerical Algorithms*. 71(4), 2015. 775 – 796.

[3] Chun, C., Some Second-Derivative-Free Variants of Chebyshev-Halley Methods, *Applied Mathematics and Computation*, 191, 2007. 410–414.

[4] Ezquerro, J. A., Gutierrez, J. M., Hernandez, M. A., dan Salanova, M. A., Chebyshev-Like methods and quadratic equations, *Revista de analizã Numericã şi Theoria Approximatiei*, 28(1), 2000. 23 – 35.

[5] Gutierrez, J. M., dan Hernandes, M. A., Family of Chebyshev-Halley Type Methods in Banach Spaces, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 55, 1997. 113 – 130.

[6] Jisheng, K., Yitian, L., dan Xiuhua, W., Fourth-Order Iterative Methods Free Second derivative, *Applied Mathematics and Computation*, 184, 2007. 880-885.

[7] Jisheng, K., Yitian, L., dan Xiuhua, W., A Uniparametric Chebyshev-type Method Free from Second Derivatives, *Applied Mathematics and Computation*, 179, 2006. 296 – 300.

[8] Jou, J., Some Varian of Cauchy's Method with Accelerated Fourth-order Convergence, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 213, 2008. 71 – 78.

[9] Mathews, J. H., *Numericsl Methods for Mathematicsm Science, and Engineering*, Prentince-Hall Inc, New Jersey, 1992.

[10] Traub, J. F., Iterative Methods for the Solution of Equations, Prentince-Hall Inc, New Jersey, 1964.

[11] Rostami, M., dan Esmaeili, H., A Modification of Chebyshev-Halley Method Free from Second Derivatives for Nonlinear Equations, *Caspian Journal of Mathematical Sciences*. 3(1), 2014. 133 – 140.

[12] Singh, M. K., A Six-order Variant of Newton's Method for Solving Nonlinear Equations, *Computational Methods in Science and Technology*, 15(2), 2009. 185 – 193.

[13] Weerakoon, S., dan Fernando, T. G. I., A Variant of Newton's Method with Accelerated Third-Order Convergence, *Applied Mathematics Letters*, 13, 2000. 87 – 93.
[14] Xiaojian, Z., Modified Chebyshev-Halley Methods Free from Second Derivative, *Applied Mathematics and Computation*, 203, 2008. 824-827.
[15] Li, Y., Zhang, P., dan Li, Y., Some Variants of Chebyshev-Halley Methods Free from Secon Derivative, *International Journal of Nonlinear Science*, 9(2), 2010. 201 – 206.