Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol.5, No. 2, Juli 2019
ISSN 2460-4542, e-ISSN 2615-8663

PENGARUH *TREATMENT* PADA PENYEBARAN PENYAKIT MALARIA DENGAN MODEL SIS

Mohammad Soleh[1], Wartono[2], Syukron Dhuha[3]
[1,2,3]Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR Soebrantas No.155Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: msholeh@uin-suska.ac.id, syukrondhuhaa.sd@gmail.com

ABSTRAK

Malaria merupakan salah satu penyakit yang tersebar di beberapa wilayah di dunia, disebabkan oleh parasit dari *genus plasmodium.* Dalam penelitian ini, metode yang digunakan adalah metode literatur yang berhubungan denganmalaria, khususnya model matematika dengan pengaruh treatment.Dilakukan simulasi yang menghasilkan titik ekuilibrium dan kestabilan ekuilibriumnya. Sehingga didapatkan hasil bahwa penyebaran penyakit sangat ditentukan oleh besarnya treatment. Semakin sedikit treatment diberikan semakin besar penyebaran penyakit, semakin besar treatment diberikan maka penyebaran penyakit semakin sedikit.

Kata kunci: *Pemodelan Matematika, SIS-SI, Titik Ekuilibrium, Treatment.*

ABSTRACT

Malaria is a disease spread in several regions of the world. Malaria is caused by parasites from the genus plasmodium. In this study, the method used is a literature method that deals with Malaria, specifically a mathematical model with the effect of treatment on the development of malaria. Simulation is carried out which results in its equilibrium point and equilibrium stability. So that the results obtained that the spread of the disease is largely determined by the amount of treatment. The less treatment is given the greater the spread of the disease, the greater the treatment is given, the less spread the disease.

Keywords: *Mathematical Modeling, SIS-SI,Eequilibrium Point,Ttreatment.*

Pendahuluan

Malaria merupakan salah satu penyakit yang telah tersebar di beberapa wilayah di dunia. Malaria adalah penyakit yang mengancam keselamatan jiwa yang disebabkan oleh parasit yang ditularkan ke individu melalui gigitan nyamuk yang terinfeksi.Umumnya tempat-tempat yang rawan malaria terdapat pada negara-negara berkembang karena tidak memiliki tempat penampungan atau pembuangan air yang cukup, sehingga menyebabkan air tergenang dan dapat dijadikan tempat ideal nyamuk untuk bertelur.

Beberapausahasudahdilakukanuntukmengurangipenyebaran malaria.Salah satunya denganmodel matematika yang dapat membantu mempermudah penyelesaian masalah tersebut. Model matematika yang digunakan adalah model epidemik. Terdapat beberapa model baik yang bersifat deterministik maupun model yang bersifat stokastik. Beberapa contoh dari model-model tersebut yaitu SI, SIS,SIS-SI, SIR, dan SEIR.

Model penyebaran penyakit malaria telah banyak dibahas di dalam jurnal, salah satunya pada jurnal model yang dikemukakan oleh Ross-Mac Donald (Ross,1991)[10] yang hanya mempertimbangkan populasi nyamuk dan manusia. Jurnal lain yang berjudul Model Matematika SIS-SI dalam “Penyebaran Penyakit Malaria Dengan Vaksinasi Taksempurna” (N. Fajri, dkk, 2016)[6], jurnal ini memberikan hasil dengan meningkatkan efektivitas vaksin, maka jumlah manusia yang terinfeksi semakin sedikit. Jurnal lain yang membahas penyakit malaria adalah Jurnal yang berjudul "Kestabilan Model Matematika pada Penyebaran Penyakit Malaria dengan Kejadian Kambuh", jurnal ini menunjukkan hasil semakin besar tingkat kambuh maka kasus infeksi dalam populasi manusia dan populasi nyamuk akan semakin tinggi. Kemudian jurnal lain "Model Matematika Penyakit Malaria dengan Tindakan Pencegahan" yang mempengaruhi besarnya angka infeksi pada manusia dan nyamuk.

Metode dan Bahan Penelitian

Metodologi penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur atau mempelajari literatur yang berhubungan dengan penyakit malaria, khususnya model matematika dengan pengaruh treatment dalam perkembangan penyakit malaria.

1. Penyakit Malaria

Malaria adalah penyakit yang mengancam keselamatan jiwa yang disebabkan oleh parasit yang ditularkan ke individu melalui gigitan nyamuk yang terinfeksi. Malaria dapat dicegah dan disembuhkan. Malaria disebabkan parasit jenis *plasmodium.*Malaria disebabkan oleh parasit dari *genus plasmodium*. Ada empat jenis plasmodium yang dapat menyebabkan malaria, yaitu *plasmodium* falciparum dengan masa inkubasi 7-14 hari, *plasmodium vivax* dengan masa inkubasi 8-14 hari, dan *plasmodium* malaria dengan masa inkubasi 7-30 hari. Parasit-parasit tersebut ditularkan pada manusia melalui gigitan nyamuk dari *genus anopheles.* Gejala yang ditimbulkan antara lain adalah demam, anemia, panas dingin dan keringat dingin. Untuk mendiagnosa seseorang menderita malaria adalah dengan memeriksa ada tidaknya plasmodium pada sampel darah. Malaria menyebabkan kematian di banyak negara berkembang terutama pada anak dan wanita hamil.

2. Sistem Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas, sedangkan sistem persamaan diferensial terdiri dari beberapa persamaan diferensial. Dibawah ini diberikan sistem persamaan diferensial linear dan nonlinear.

Diberikan sistem persamaan diferensial

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dot{\boldsymbol{x}}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \dot{\boldsymbol{x}}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned} \tag{1.1}$$

dengan $E \subset R^n$, dan $\boldsymbol{f}: E \to R^n$ fungsi kontinu pada E.

Sistem (1.1) dapat ditulis sebagai

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\ . \tag{1.2}$$

Jika $f_1, f_2, \dots, f_n$ masing-masing linear dalam $x_1, x_2, \dots, x_n$ maka Sistem (1.2) disebut sistem persamaan differensial linear yang dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathrm{a}_{21}\mathrm{x}_1 + \mathrm{a}_{22}\mathrm{x}_2 + \mathrm{a}_{23}\mathrm{x}_3 + \cdots + \mathrm{a}_{2n}\mathrm{x}_n, \\ &\vdots \\ \dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{n}} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n, \end{aligned} \tag{1.3}$$

Sistem (1.3) dapat dinyatakan dalam bentuk $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$, dengan $\boldsymbol{x} \in E$ dan A matriks $n \times n$. Sistem (1.2) disebut juga sistem nonlinear jika tidak dapat dinyatakan dalam bentuk Sistem (1.3).

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol.5, No. 2, Juli 2019
ISSN 2460-4542, e-ISSN 2615-8663

3. Titik Ekuilibrium

Titik ekuilibrium dari sistem merupakan titik yang mana sistem tersebut tidak mengalami perubahan sepanjang waktu (**Panvilov, 2004**). Secara matematis definisi titik ekuilibrium dapat dituliskan sebagai berikut.

Definisi 1.1 (Olsder, 2003) Titik $\boldsymbol{x}^* \in R^n$ disebut titik ekuilibrium (titik kesetimbangan) dari Sistem (1.2) jika $f(\boldsymbol{x}^*) = 0$.

4. Matriks Jacobian

Definisi 1.2 (Allen, 2007) diberikan $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ pada Sistem (1.1) dengan $f_i \in C^1(E), i = 1, 2, \dots, n$. Matriks

$$J(f(\boldsymbol{x}^*)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^*) & \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^*) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}^*) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^*) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}^*) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}^*) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^*) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}^*) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}^*) \end{bmatrix}$$

$J(f(\boldsymbol{x}^*))$ dinamakan matriks Jacobian dari f di titik $\boldsymbol{x}^*$.

Hasil dan Pembahasan

1. Pembentukan Model SIS dengan *Treatment*

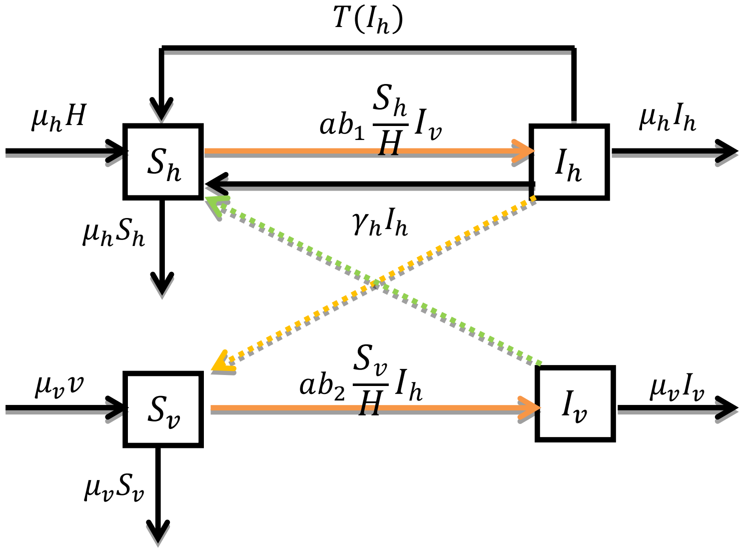
Pembentukan model SIS dengan *treatment* ini menggunakan model yang dikemukakan oleh Ross-MacDonald **(*Ross, 1991*)[10]**yang telah ditambahkan asumsi-asumsi berikut:

a. Manusia dapat terinfeksi malaria hanya disebabkan oleh nyamuk yang terinfeksi.
b. Nyamuk dapat terinfeksi malaria hanya disebabkan oleh gigitan nyamuk pada manusia yang terinfeksi malaria dan nyamuk yang terinfeksi diasumsikan tidak bisa sembuh dikarenakan umur nyamuk yang relatif singkat.
c. Populasi bersifat tertutup.
d. Laju kematian alami manusia untuk tiap kelas μ_h dan laju kematian alami nyamuk untuk tiap kelas μ_v.
e. Manusia yang baru lahir masuk ke kelas manusia rentan sebesar $\mu_h H$, yang diinterpretasikan sebagai laju kelahiran dari populasi manusia (μ_h) dan total populasi manusia (H).
f. Penularan penyakit pada manusia yang disebabkan oleh gigitan nyamuk yang terinfeksi kepada manusia yang sehat/rentan. Besarnya penularan adalah $ab_1 \frac{S_h}{H} I_v$, yang diinterpretasikan sebagai jumlah rata-rata gigitan nyamuk yang terinfeksi perunit waktu (a), peluang dari sebuah gigitan nyamuk yang terinfeksi akan menghasilkan manusia yang terinfeksi (b_1), peluang nyamuk mengigit pada manusia sehat ($\frac{S_h}{H}$), dan jumlah nyamuk yang terinfeksi (I_v).
g. Laju pemulihan manusia secara alami dari infeksi malaria yang disebabkan oleh kekebalan tubuh manusia sebesar $\gamma_h I_h$ yang diinterpretasikan sebagai laju pemulihan manusia secara alami (γ_h) dan jumlah manusia yang terinfeksi malaria (I_h).
h. Nyamuk yang baru lahir masuk ke kelas nyamuk rentan sebesar $\mu_v V$, yang diinterpretasikan sebagai laju kelahiran dari populasi nyamuk (μ_v) dan total populasi nyamuk (V).
i. Munculnya malaria dalam populasi nyamuk yang disebabkan oleh nyamuk yang menggigit manusia terinfeksi malaria sebesar $ab_2 \frac{S_v}{H} I_h$, yang diinterpretasikan sebagai

jumlah rata-rata gigitan infeksi perunit waktu (a), peluang dari sebuah gigitan infeksi akan menghasilkan nyamuk yang terinfeksi (b_2), peluang mengigit pada manusia terinfeksi $\frac{I_h}{H}$, dan jumlah nyamuk yang sehat (S_v).

j. Pengaruh pemberian pengobatan pada manusia yang terinfeksi malaria sebesar $T(I_h)$ dari kelas I_h ke S_h.

Berdasarkan asumsi tersebut, diperoleh diagram transfer dari model SIS sebagai berikut:



Gambar 1. Diagram Transfer Pengaruh Treatment Pada Penyebaran Penyakit Malaria dengan Model SIS

Berdasarkan diagram transfer di atas maka diperoleh persamaan differensial sebagai berikut:

$$\frac{dS_h}{dt} = \mu_h H + \gamma_h I_h - ab_1 \frac{S_h I_v}{H} - \mu_h S_h + T(I_h), \qquad (1.4.a)$$
$$\frac{dI_h}{dt} = ab_1 \frac{S_h I_v}{H} - \gamma_h I_h - \mu_h I_h - +T(I_h), \qquad (1.4.b)$$
$$\frac{dS_v}{dt} = \mu_v V - ab_2 \frac{S_v I_h}{H} - \mu_v S_v, \quad (1.\ 4.c)$$
$$\frac{dI_v}{dt} = ab_2 \frac{S_v I_h}{H} - \mu_v I_v, \qquad (1.4.d)$$

dengan $S_h + I_h = H$ dan $S_v + I_v = V$, di mana H adalah total populasi manusia dan V adalah total populasi nyamuk.Untuk analisis dari sistem persamaan (1.4.a) sampai (1.4.d), maka populasi nyamuk dan populasi manusia dinormalisasikan dengan menggunakan variabel pecahan berikut:

$$S_H = \frac{S_h}{H}, I_H = \frac{I_h}{H}, S_V = \frac{S_v}{V}, I_V = \frac{I_v}{V}, m = \frac{V}{H},$$
$$\frac{S_h}{H} + \frac{I_h}{H} = \frac{S_h + I_h}{H} = \frac{H}{H} = 1$$
$$\frac{S_v}{V} + \frac{I_v}{V} = \frac{S_v + I_v}{V} = \frac{V}{V} = 1$$

Maka model (4.1.a) sampai (4.1.d) dapat ditulis kembali sebagai model:

$$\frac{dS_H}{dt} = \mu_h + \gamma_h . I_H - ab_1 m S_H I_V - \mu_h S_H + T(I_H), \qquad (1.5.a)$$
$$\frac{dI_H}{dt} = ab_1 m S_H I_V - \gamma_h I_H - \mu_h I_H - T(I_H), \qquad (1.5.b)$$

$$\frac{dS_V}{dt} = \mu_v - ab_2 S_V I_H - \mu_v S_V, \tag{1.5.c}$$
$$\frac{dI_V}{dt} = ab_2 S_V I_H - \mu_v I_V, \tag{1.5.d}$$

Misal $p = \gamma_h + \mu_h$, $x = I_H$ dan $y = I_v$, maka $S_H = 1 - x$ dan $S_V = 1 - y$ dapat disederhanakan menjadi dua persamaan sebagai berikut:

$$\dot{x} = ab_1 my(1-x) - px - T(x)$$
$$\dot{y} = ab_2 x(1-y) - \mu_v y$$

Diberikan fungsi Wang:

$$T(x) = \begin{cases} kx, & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \tag{1.6}$$

Berdasarkan fungsi Wang tersebut, maka Model yang didapat ditulis kembali menjadi

(1) Untuk $x > 0$

$$\dot{x} = ab_1 my(1-x) - px - kx,$$
$$\dot{y} = ab_2 x(1-y) - \mu_v. \tag{1.7}$$

(2) Untuk $x = 0$

$$\dot{x} = ab_1 my(1-x) - px,$$
$$\dot{y} = ab_2 x(1-y) - \mu_v y. \tag{1.8}$$

2. Titik Ekuilibrium Endemik Penyakit

Titik ekuilibrium endemik penyakit yaitu keadaan di dalam populasi selalu ada yang terkena penyakit, pada model ini, model yang digunakan adalah model (1.7) dengan $x^* > 0$. Maka dapat diperoleh titik ekuilibrium endemik penyakit $L^* = (x^*, y^*)$sebagai berikut:

$$x^* = \frac{a^2 mb_1 b_2 - \mu_v p - \mu_v k}{a^2 mb_1 b_2 + ab_2 p + ab_2 k},$$

dan

$$y^* = \frac{a^2 mb_1 b_2 - p\mu_v - k\mu_v}{a^2 mb_1 b_2 + ab_1 m\mu_v}.$$

3. Kestabilan Titik Ekuilibrium

Setelah didapat titik ekuilibrium endemik penyakit pada Persamaan (1.7), selanjutnya akan ditentukan kestabilan titik ekuilibrium.Kestabilan titik ekuilibrium dapat dilihat dengan menggunakan matriks Jacobian. Matriks Jacobian dari Persamaan (1.7) yaitu:

$$J = \begin{bmatrix} -ab_1 my^* - p - k & ab_1 m - ab_1 mx^* \\ ab_2 - ab_2 y^* & -ab_2 x^* - \mu_v \end{bmatrix},$$

Misal:

$$q = -ab_1 my^* - p - k,$$
$$r = ab_1 m - ab_1 mx^*,$$
$$s = ab_2 - ab_2 y^*,$$
$$t = -ab_2 x^* - \mu_v,$$

maka

$$\det(\lambda I - J) = 0,$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda - q & r \\ s & \lambda - t \end{bmatrix}\right) = 0.$$

Selanjutnya dengan menggunakan metode Sarrus, diperoleh:

$$\lambda^2 + \lambda(-q-t) + qt - sr = 0$$

BerdasarkanTeoremakriteria kestabilan Routh-Hurwitz, dinyatakan titik ekuilibrium stabil untuk $n = 2$ jika $z_1 > 0$ dan $z_2 > 0$.

(1) Akan ditunjukkan $z_1 > 0$:

$$z_1 = \left(ab_1my^* + p + k\right) + \left(ab_2x^* + \mu_v\right)$$

Diketahui:

$$ab_1m > 0 \quad ab_2 > 0 \quad y^* > 0 \quad p > 0, \quad k > 0, \quad x^* > 0$$

Karena semua bagian merupakan bilangan positif, maka terbukti $z_1 > 0$

(2) Akan ditunjukkan $z_2 > 0$

$$z_2 = -ab_2ab_1m - ab_2y^*ab_1mx^* + ab_2ab_1mx^* + ab_2y^*ab_1m$$

3.1 Simulasi

Simulasi dilakukan untuk memberi gambaran yang jelas mengenai model pengaruh *treatment* pada penyebaran penyakit malaria. Simulasi dilakukan dengan memberikan nilai untuk masing-masing parameter dan nilai awal setiap kelompok populasi. Pada bagian ini dilakukan simulasi pada titik ekulibrium endemik penyakit dengan menggunakan *Software Microsoft Excel 2010*.

Simulasi titik ekulibrium endemik penyakit, yaitu:

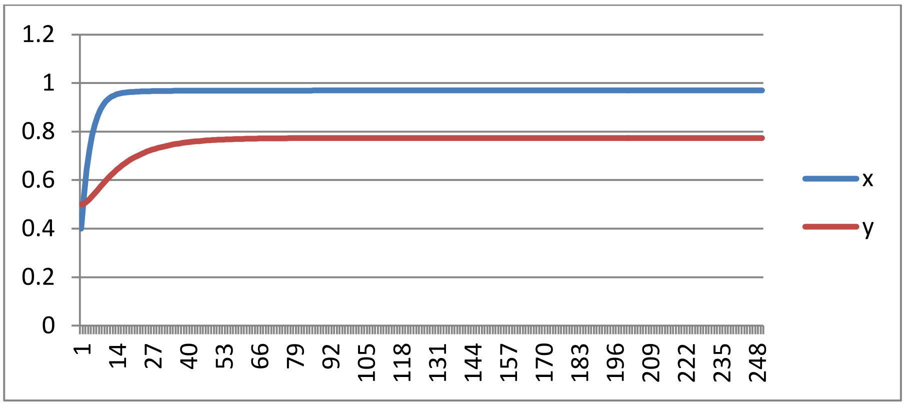
Tabel 1. Nilai Parameter untukEndemikPenyakit

Parameter	**Nilai**
a	0.2
b_1	0.2
b_2	0.3
m	12
μ_h	0.0015875/hari
μ_v	0.071/hari
γ_h	0.00019/hari

Berdasarkan nilai parameter pada Tabel 1.1 maka persamaan (1.7) menjadi:

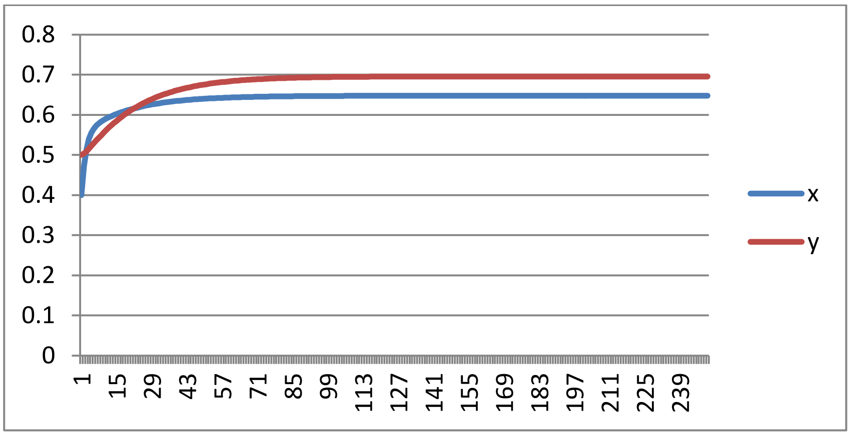
$$\dot{x} = 1{,}8y(1-x) - 0{,}00017775x - kx,$$
$$\dot{y} = 0{,}18x(1-y) - 0{,}000071y.$$

1. Untuk $k = 0.01$, perubahan jumlah populasi endemik penyakit dapat dilihat pada Gambar 1.2 berikut ini:



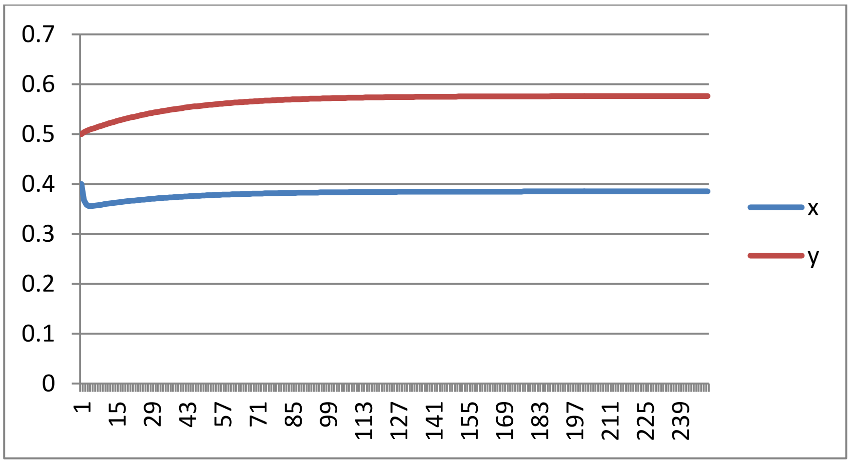
Gambar 2. Simulasi Titik Ekuilibruim Endemik Penyakit untuk $k = 0.01$

2. Untuk $k = 0.18$, perubahan jumlah populasi endemik penyakit dapat dilihat pada Gambar 1.3 berikut ini:



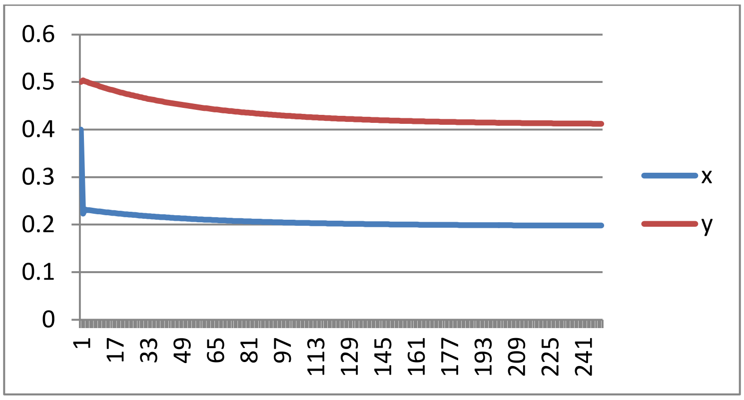
Gambar 3. Simulasi Titik Ekuilibruim Endemik Penyakit untuk $k = 0.18$

3. Untuk $k = 0.44$, perubahan jumlah populasi endemik penyakit dapat dilihat pada Gambar 1.4 berikut ini:



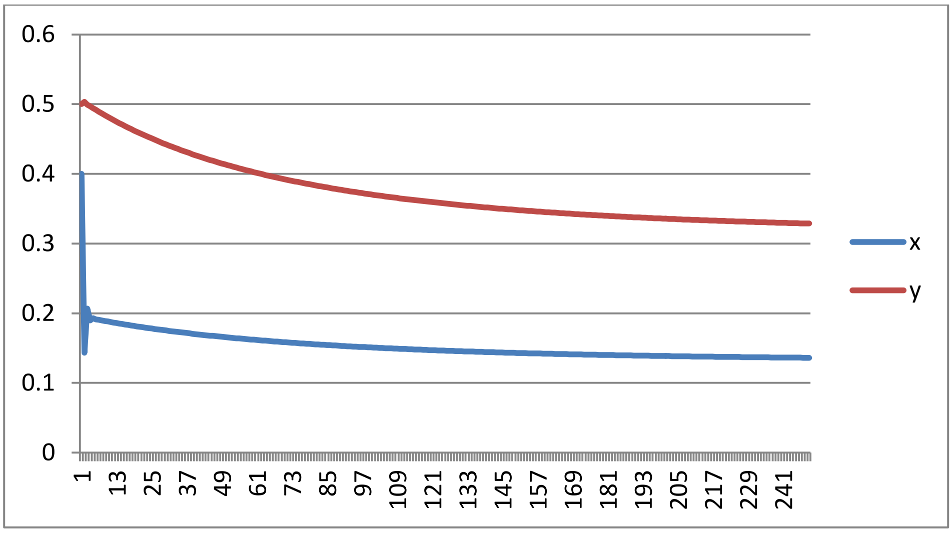
Gambar 4. Simulasi Titik Ekuilibruim Endemik Penyakit untuk $k = 0.44$

4. Untuk $k = 0.8$, perubahan jumlah populasi endemik penyakit dapat dilihat pada Gambar 1.5 berikut ini:



Gambar 5. Simulasi Titik Ekuilibruim Endemik Penyakit untuk $k = 0.8$

5. Untuk $k = 1$, perubahan jumlah populasi endemik penyakit dapat dilihat pada Gambar 1.6 berikut ini:



Gambar 6. Simulasi Titik Ekuilibruim Endemik Penyakit untuk $k = 1$

Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan, maka dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

1. Model SIS Pengaruh *Treatment* Pada Penyebaran Penyakit Malaria, yaitu:

$$\frac{dS_H}{dt} = \mu_h + \gamma_h . I_H - ab_1 m S_H I_V - \mu_h S_H + T(I_H)$$
$$\frac{dI_H}{dt} = ab_1 m S_H I_V - \gamma_h I_H - \mu_h I_H - T(I_H)$$
$$\frac{dS_V}{dt} = \mu_v - ab_2 S_V I_H - \mu_v S_V$$
$$\frac{dI_V}{dt} = ab_2 S_V I_H - \mu_v I_V$$

Dengan $S_H + I_H = H$ dan $S_V + I_V = V$ di mana H adalah total populasi manusia dan V adalah total populasi nyamuk. Model SIS pengaruh *treatment* pada penyebaran penyakit malaria yang telah disederhanakan menjadi 2 persamaan diperoleh satu titik ekuilibrium $L^* = (x^*, y^*)$, yaitu:

$$x^* = \frac{a^2 m b_1 b_2 - \mu_v p - \mu_v k}{a^2 m b_1 b_2 + ab_2 p + ab_2 k}$$

dan

$$y^* = \frac{a^2 m b_1 b_2 - p\mu_v - k\mu_v}{a^2 m b_1 b_2 + a b_1 m \mu_v}$$

2. Semakin besar pengaruh *treatment* maka tingkat penyebaran jumlah kelompok *infectious* (x)dan*infectious* (y) semakin sedikit.

Daftar Pustaka

[1] Allan, E. *Random Matrix Theory And Its Innovative Options*. Vol. 66, Springer, New York. 2013.
[2] Anton, H. *Aljabar Linier Elementer* Edisi *ke-5.* Terjemahan Pantur Silaban dan I Nyoman Susila. Erlangga.Jakarta. 1992.
[3] Basuki, W. *Balaba*. Vol.5,No. 02, Hal: 28-29. Balitbangkes kemenkes: Banjarnegara.2009.
[4] Diekmann, O. dan Heesterbeek, J.A.P. *Mathematical Epidemiologu of Infectious Diseases: Model Building, Analysis and Interpretaion*. Wiley.New York. 2000.
[6] Edy Pramoro, P. *Model Matematika Penyakit Malaria Dengan Tindakan Pencegahan*. Universitas Gadjah Mada. Yogyakarta. 2017.
[6] Fajri, N. dkk. *Penyebaran Penyakit Malaria Dengan Vaksinasi Tak Sempurna*. Institut Pertanian Bogor. Jawa Barat. 2016.
[7] Giesecke. *Modern Infectius Disease Eoidemiology*. Edisi kedua, CRC Press. Florida. 2002.
[8] Hale, J. K. *Dynamic Biffurcation.* Springer-Verlag.New York.1991.
[9] Ismi, W. *Kestabilan Model Matematika Pada Penyebaran Penyakit Malaria Dengan Kejadian Kambuh*. Universitas Gadjah Mada. Yogyakarta. 2017.
[10] Ross, R. *The prevention of malaria*. Second edition Murray. London. 1991.