Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol.5, No. 2, Juli 2019
ISSN 2460-4542, e-ISSN 2615-8663

Trace Matriks Toeplitz Simetris Bentuk Khusus Ordo 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Rahmawati[1], Novia Arda Putri[2], Fitri Aryani[3], Ade Novia Rahma[4]
Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Simpang Baru, Panam, 28293
Email: rahmawati@uin-suska.ac.id, noviaarda297@gmail.com, khodijah_fitri@uin-suska.ac.id, ade.novia.rahma@uin-suska.ac.id

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan menentukan trace matriks Toeplitz simetris real bentuk khusus ordo 3 x 3 berpangkat bilangan bulat positif *n*. Langkah penelitian dimulai menentukan bentuk umum matriks Toeplitz simetris ordo 3 x 3 yang dinotasikan dengan A_3^n dengan membuktikannya dengan induksi matematika. Selanjutnya ditentukan *trace* A_3^n yang dinotasikan dengan $tr\left(A_3^n\right)$ dan membuktikannya dengan pembuktian langsung. Hasil akhir dari penelitian ini diperoleh bentuk umum matriks A_3^n dan $tr\left(A_3^n\right)$ untuk *n* ganjil dan *n* genap.

Kata kunci: matriks toeplitz, matriks toeplitz simetris, perpangkatan matriks, *trace*

ABSTRACT

In this paper, we aims to determine the general form trace of positive integer power of real 3 × 3 symmetrical Toeplitz special matrix. The research begins to determine the general form of real 3 x 3 symmetrical Toeplitz matrix which is denoted by A_3^n *and prove it by mathematical induction. Furthemore, we determine trace of matrix* A_3^n *which is denoted by* $tr\left(A_3^n\right)$ *and prove it by direct proof. The final results of this study obtained the general form of the matrix* A_3^n *and* $tr\left(A_3^n\right)$ *for n odd and even numbers.*

Keyword: *symmetrical Toeplitz matrix, Toeplitz matrice, the power of matrix, trace*

Pendahuluan

Menurut Anton [2], matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan, bilangan – bilangan tersebut disebut entri dari matriks. Matriks dibagi menjadi beberapa jenis antara lain matriks bujur sangkar, matriks nol, matriks identitas, matriks diagonal, matriks segitiga, matriks simetris, matriks Toeplitz dan sebagainya. Menurut Gray [5], matriks Toeplitz adalah matriks berukuran $n \times n$ yang dinotasikan sebagai $T_n = \left[t_{kj}; k, j = 0,1,\cdots,n-1\right]$ dengan $t_{kj} = t_{k-j}$ sebuah matriks dengan formula :

$$T_n = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \cdots & t_{-(n-1)} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{-(n-2)} \\ t_2 & t_1 & t_0 & \cdots & t_{-(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ t_{(n-1)} & t_{(n-2)} & \cdots & t_1 & t_0 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Dalam teori matriks terdapat berbagai macam operasi matriks diantaranya yaitu perkalian matriks, determinan matriks, invers matriks, dan *trace* matriks. Dalam penelitian ini hanya dibahas mengenai *trace* matriks. *Trace* matriks adalah jumlah dari elemen-elemen diagonal utama dari matriks bujur sangkar yang ordonya $n \times n$ dan dinotasikan dengan $tr(A)$.

Pembahasan mengenai *trace* matriks telah banyak diteliti oleh beberapa peneliti sebelumnya. Pada tahun 2015, Pahade dan Manoj [8] membahas bentuk umum *trace* matriks orde 2×2 berpangkat bilangan bulat positif. Dalam makalah tersebut terdapat dua bentuk umum *trace* matriks berpangkat bilangan bulat positif. Pertama, bentuk umum *trace* matriks berpangkat bilangan bulat untuk n genap, yaitu

$$tr\left(A^n\right)=\sum_{r=0}^{n/2} \frac{(-1)^r}{r!} n\left[n-(r+1)\right]\left[n-(r+2)\right]\cdots\left[n-(r+(r-1))\right]\left(\det(A)\right)^r \left(tr(A)\right)^{n-2r}$$

Kedua, bentuk umum *trace* matriks berpangkat bilangan bulat untuk n ganjil, yaitu

$$tr\left(A^n\right)=\sum_{r=0}^{n-1/2} \frac{(-1)^r}{r!} n\left[n-(r+1)\right]\left[n-(r+2)\right]\cdots\left[n-(r+(r-1))\right]\left(\det(A)\right)^r \left(tr(A)\right)^{n-2r}$$

Kemudian, di tahun 2017, Pahade dan Manoj [9] juga telah membahas mengenai *trace* matriks berpangkat bilangan bulat positif dari suatu matriks ketetanggaan. Di tahun yang sama, Fatonah dan Fitri [4] dalam penelitiannya membahas mengenai bentuk umum dari *trace* matriks yang dibentuk secara khusus dengan entri bilangan real dan bilangan kompleks berpangkat bilangan bulat positif untuk n ganjil dan n genap. Pada tahun 2018 pembahasan tentang *trace* matriks juga dibahas oleh Andesta dan Fitri [1] yaitu trace matriks berbentuk khusus 3×3 berpangkat bilangan bulat positif. Pada Tahun 2019, Aryani dan Nurul Husna [3] membahas *trace* matriks Toeplitz tridiagonal ordo 3 x 3 berpangkat bilangan bulat positif. Selanjutnya, dalam penelitian ini akan dibahas *trace* dari matriks Toeplitz pada Persamaan (1) yang berordo 3 x 3 berbentuk simetris dengan pangkat bilangan bulat positif dengan bentuk matriks

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix}, \text{ dengan } a \in R. \tag{2}$$

Metode dan Bahan Penelitian

Penelitian ini dilakukan untuk mendapatkan bentuk umum *trace* matriks pada Persamaan (2) berpangkat bilangan bulat positif. Penelitian ini dimulai dengan menentukan bentuk umum matriks Toeplitz simetris A_3^n dan membuktikan bentuk umum A_3^n menggunakan induksi matematika. Selanjutnya, ditentukan bentuk umum $tr\left(A^n\right)$ dan membuktikannya dengan pembuktian langsung. Materi mengenai matriks Simetris dirujuk pada Makhoul [6], definisi mengenai perpangkatan matriks, teorema perpangkatan matriks, dan definisi *trace* matriks dirujuk pada Anton [2], serta materi induksi matematika dirujuk pada Munir [7].

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol.5, No. 2, Juli 2019
ISSN 2460-4542, e-ISSN 2615-8663

Definisi 1. Matriks Toeplitz Simetris merupakan matriks toeplitz yang setiap entri diagonalnya sama, yang mana entri $[r_{ij}] = [r_{ji}]$ untuk setiap $i, j = 1,2,.....,n$.

$$R_n = \begin{bmatrix} r_0 & r_1 & r_2 & \cdots & r_{n-1} & r_n \\ r_1 & r_0 & r_1 & \cdots & r_{n-2} & r_{n-1} \\ r_2 & r_1 & r_0 & \cdots & r_{n-3} & r_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r_{n-1} & r_{n-2} & r_{n-3} & \cdots & r_0 & r_1 \\ r_n & r_{n-1} & r_{n-2} & \cdots & r_1 & r_0 \end{bmatrix}$$

Definisi 2. Jika A adalah matriks bujursangkar, maka definisi dari pangkat bilangan bulat tak negatif dari A adalah

$$A^0 = I \text{ , } A^n = \underbrace{A A \ldots A}_{n \text{ faktor}} \left(n > 0 \right)$$

selanjutnya, jika A dapat dibalik, maka definisi dari pangkat bilangan bulat negatif dari A adalah:

$$A^{-n} = \left(A^{-1} \right)^n = \underbrace{A^{-1} A^{-1} \ldots A^{-1}}_{n \text{ faktor}}.$$

Teorema 1. Jika A adalah matriks bujursangkar dan r dan s adalah bilangan bulat -bilangan bulat, maka:

$$A^r A^s = A^{r+s}, \left(A^r \right)^s = A^{rs}.$$

Definisi 3. Jika A adalah matriks bujursangkar maka *trace* dari A yang dinyatakan sebagai $tr\left(A\right)$, didefinisikan sebagai jumlah entri–entri pada diagonal utama A. *Trace* dari A tidak dapat didefinisikan jika A bukan matriks bujursangkar.
Diberikan matriks *A* sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

maka *tr(A)* adalah:

$$\begin{aligned} tr(A) &= a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}. \end{aligned}$$

Definisi 4. Prinsip induksi sederhana sebagai berikut : Misalkan $p\left(n\right)$ suatu pernyataan yang menyatakan bilangan bulat positif dan akan dibuktikan bahwa pernyataan $p\left(n\right)$ tersebut benar untuk semua bilangan positif n, maka untuk membuktikan pernyataan ini digunakan aturan sebagai berikut :

1. Akan ditunjukkan $p\left(1\right)$ benar, dan
2. Jika $p\left(n\right)$ benar, maka $p\left(n+1\right)$ juga benar untuk $n \geq 1$.

   Sehingga $p\left(n\right)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.

ISSN 2460-4542, e-ISSN 2615-8663

Langkah 1 dinamakan *basis induksi*, sedangkan langkah 2 dinamakan *langkah induksi.* Langkah induksi berisi asumsi (andaian) yang menyatakan bahwa $p(n)$ benar. Asumsi tersebut dinamakan hipotesis induksi. Bila sudah ditunjukkan kedua langkah tersebut benar maka sudah dibuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan n.

Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini akan ditentukan bentuk umum *trace* dari matriks Toeplitz simetris bentuk khusus pada Persamaan (2) berpangkat bilangan bulat positif. Langkah pertama yaitu menentukan nilai perpangkatan matriks A_3^2 sampai A_3^{12} sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
A_3{}^2 &= A_3 \cdot A_3 \\
&= \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a^2 & 0 & a^2 \\ 0 & 2a^2 & 0 \\ a^2 & 0 & a^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

dengan cara yang sama, maka didapatkan:

$$
A_3{}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 2a^3 & 0 \\ 2a^3 & 0 & 2a^3 \\ 0 & 2a^3 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
A_3{}^4 = \begin{bmatrix} 2a^4 & 0 & 2a^4 \\ 0 & 4a^4 & 0 \\ 2a^4 & 0 & 2a^4 \end{bmatrix}
$$

$$
A_3{}^5 = \begin{bmatrix} 0 & 4a^5 & 0 \\ 4a^5 & 0 & 4a^5 \\ 0 & 4a^5 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
A_3{}^6 = \begin{bmatrix} 4a^6 & 0 & 4a^6 \\ 0 & 8a^6 & 0 \\ 4a^6 & 0 & 4a^6 \end{bmatrix}
$$

$$
A_3{}^7 = \begin{bmatrix} 0 & 8a^7 & 0 \\ 8a^7 & 0 & 8a^7 \\ 0 & 8a^7 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$A_3^{8} = \begin{bmatrix} 8a^8 & 0 & 8a^8 \\ 0 & 16a^8 & 0 \\ 8a^8 & 0 & 8a^8 \end{bmatrix}$$

$$A_3^{9} = \begin{bmatrix} 0 & 16a^9 & 0 \\ 16a^9 & 0 & 16a^9 \\ 0 & 16a^9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_3^{11} = \begin{bmatrix} 0 & 32a^{11} & 0 \\ 32a^{11} & 0 & 32a^{11} \\ 0 & 32a^{11} & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_3^{12} = \begin{bmatrix} 32a^{12} & 0 & 32a^{12} \\ 0 & 64a^{12} & 0 \\ 32a^{12} & 0 & 32a^{12} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya bentuk umum matriks berpangkat $A_3^{\,n}$ untuk *n* ganjil dan *n* genap dinyatakan dalam teorema berikut:

Teorema 2. Diberikan matriks $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix}, \forall a \in R$, maka

$$A_3^{\,n} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 2^{\frac{n-1}{2}} a^n & 0 \\ 2^{\frac{n-1}{2}} a^n & 0 & 2^{\frac{n-1}{2}} a^n \\ 0 & 2^{\frac{n-1}{2}} a^n & 0 \end{bmatrix} & ,\text{untuk} n \text{ganjil} \\ \begin{bmatrix} 2^{\frac{n-2}{2}} a^n & 0 & 2^{\frac{n-2}{2}} a^n \\ 0 & 2^{\frac{n}{2}} a^n & 0 \\ 2^{\frac{n-2}{2}} a^n & 0 & 2^{\frac{n-2}{2}} a^n \end{bmatrix} & ,\text{untuk} n \text{genap} \end{cases}$$

Bukti: Pembuktian menggunakan induksi matematika sebagai berikut:

$$p(n): A_3^n = \begin{bmatrix} 0 & 2^{\frac{n-1}{2}} a^n & 0 \\ 2^{\frac{n-1}{2}} a^n & 0 & 2^{\frac{n-1}{2}} a^n \\ 0 & 2^{\frac{n-1}{2}} a^n & 0 \end{bmatrix}, \text{untuk} n \text{ ganjil} \text{ dibuktikan sebagai berikut:}$$

1) Basis Induksi: Untuk $n = 1$ maka

$$p(1): A_3^1 = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix}$$

dengan melihat Persamaan (2), maka $p(1)$ benar.

2) Langkah Induksi:
asumsikan untuk $n = k,\ p(k)$ benar, yaitu:

$$p(k): A_3^k = \begin{bmatrix} 0 & 2^{\frac{k-1}{2}} a^k & 0 \\ 2^{\frac{k-1}{2}} a^k & 0 & 2^{\frac{k-1}{2}} a^k \\ 0 & 2^{\frac{k-1}{2}} a^k & 0 \end{bmatrix}$$

maka akan ditunjukkan $n = k+2,\ p(k+2)$ juga benar yaitu:

$$p(k+2): A_3^{k+2} = \begin{bmatrix} 0 & 2^{\frac{k+1}{2}} a^{k+2} & 0 \\ 2^{\frac{k+1}{2}} a^{k+2} & 0 & 2^{\frac{k+1}{2}} a^{k+2} \\ 0 & 2^{\frac{k+1}{2}} a^{k+2} & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Pembuktiannya:

$$A_3^{k+2} = A_3^k \cdot A_3^2$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2^{\frac{k-1}{2}} a^k & 0 \\ 2^{\frac{k-1}{2}} a^k & 0 & 2^{\frac{k-1}{2}} a^k \\ 0 & 2^{\frac{k-1}{2}} a^k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^2 & 0 & a^2 \\ 0 & 2a^2 & 0 \\ a^2 & 0 & a^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2^{\frac{k+1}{2}} a^{k+2} & 0 \\ 2^{\frac{k+1}{2}} a^{k+2} & 0 & 2^{\frac{k+1}{2}} a^{k+2} \\ 0 & 2^{\frac{k+1}{2}} a^{k+2} & 0 \end{bmatrix}$$

dengan melihat Persamaan (3), maka $p(k+2)$ benar.

Dari Langkah (1) dan (2) sudah diperlihatkan benar, maka terbukti

$$A_3^n = \begin{bmatrix} 0 & 2^{\frac{n-1}{2}} a^n & 0 \\ 2^{\frac{n-1}{2}} a^n & 0 & 2^{\frac{n-1}{2}} a^n \\ 0 & 2^{\frac{n-1}{2}} a^n & 0 \end{bmatrix}, \text{untuk } n \text{ ganjil.}$$

Selanjutnya akan dibuktikan untuk n genap.

$$p(n): A_3^n = \begin{bmatrix} 2^{\frac{n-2}{2}} a^n & 0 & 2^{\frac{n-2}{2}} a^n \\ 0 & 2^{\frac{n}{2}} a^n & 0 \\ 2^{\frac{n-2}{2}} a^n & 0 & 2^{\frac{n-2}{2}} a^n \end{bmatrix}, \text{untuk } n \text{ genap}$$ dibuktikan sebagai berikut:

1) Basis Induksi: Untuk $n = 2$ maka

$$p(2): A_3^2 = A_3 \cdot A_3$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a^2 & 0 & a^2 \\ 0 & 2a^2 & 0 \\ a^2 & 0 & a^2 \end{bmatrix}, \text{benar}$$

2) Langkah Induksi:

Asumsikan untuk $n = k,\, p(k)$ benar, yaitu:

$$p(k): A_3^k = \begin{bmatrix} 2^{\frac{k-2}{2}} a^k & 0 & 2^{\frac{k-2}{2}} a^k \\ 0 & 2^{\frac{k}{2}} a^k & 0 \\ 2^{\frac{k-2}{2}} a^k & 0 & 2^{\frac{k-2}{2}} a^k \end{bmatrix}$$

maka akan dibuktikan $p(k+2)$ juga benar, yaitu:

$$p(k+2): A_3^{k+2} = \begin{bmatrix} 2^{\frac{k}{2}} a^{k+2} & 0 & 2^{\frac{k}{2}} a^{k+2} \\ 0 & 2^{\frac{k+2}{2}} a^{k+2} & 0 \\ 2^{\frac{k}{2}} a^{k+2} & 0 & 2^{\frac{k}{2}} a^{k+2} \end{bmatrix} \tag{4}$$

Pembuktiannya:

$$A_3^{k+2} = A_3^k \cdot A_3^2$$
$$= \begin{bmatrix} 2^{\frac{k-2}{2}} a^k & 0 & 2^{\frac{k-2}{2}} a^k \\ 0 & 2^{\frac{k}{2}} a^k & 0 \\ 2^{\frac{k-2}{2}} a^k & 0 & 2^{\frac{k-2}{2}} a^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^2 & 0 & a^2 \\ 0 & 2a^2 & 0 \\ a^2 & 0 & a^2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2^{\frac{k}{2}} a^{k+2} & 0 & 2^{\frac{k}{2}} a^{k+2} \\ 0 & 2^{\frac{k+2}{2}} a^{k+2} & 0 \\ 2^{\frac{k}{2}} a^{k+2} & 0 & 2^{\frac{k}{2}} a^{k+2} \end{bmatrix}$$

dengan melihat Persamaan (4), maka $p(k+2)$ benar.

Dari Langkah (1) dan (2) sudah diperlihatkan benar, maka terbukti

$$A_3^n = \begin{bmatrix} 2^{\frac{n-2}{2}} a^n & 0 & 2^{\frac{n-2}{2}} a^n \\ 0 & 2^{\frac{n}{2}} a^n & 0 \\ 2^{\frac{n-2}{2}} a^n & 0 & 2^{\frac{n-2}{2}} a^n \end{bmatrix}, \text{untuk} n \text{ genap}$$

Berdasarkan pembuktian di atas, maka Teorema 2 terbukti. ■

Berdasarkan Teorema 2, maka didapat bentuk umum *trace* matriks Toeplitz simetris bentuk khusus Persamaan (2) yang diberikan dalam Teorema berikut.

Teorema 3. Diberikan matriks $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix}$, $\forall a \in R$ maka

$$tr\left(A_3^n\right) = \begin{cases} 0 & , n \text{ ganjil} \\ 2^{\frac{n}{2}+1} a^n & , n \text{ genap} \end{cases}$$

Bukti:

Akan dibuktikan $tr\left(A_3^n\right) = 0,$ untuk n ganjil sebagai berikut:

Berdasarkan Teorema 2, diperoleh bentuk umum $A_3^{\ n}$ untuk n bilangan ganjil. Berdasarkan Definisi 2 maka didapat bentuk umum $tr\left(A_3^n\right)$ untuk n bilangan ganjil yaitu:

$$tr\left(A_3^n\right) = tr\begin{bmatrix} 0 & 2^{\frac{n-1}{2}} a^n & 0 \\ 2^{\frac{n-1}{2}} a^n & 0 & 2^{\frac{n-1}{2}} a^n \\ 0 & 2^{\frac{n-1}{2}} a^n & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} tr\left(A_3^n\right) &= 0 + 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

sehingga terbukti $tr\left(A_3^n\right) = 0,$ untuk n ganjil.

Selanjutnya akan dibuktikan $tr\left(A_3^n\right) = 2^{\frac{n}{2}+1} a^n$, untuk n genap sebagai berikut:

Berdasarkan Teorema 2, maka diperoleh bentuk umum $A_3^{\ n}$ untuk n bilangan genap. Berdasarkan Definisi 2, maka didapat bentuk umum $tr\left(A_3^n\right)$ untuk n bilangan genap yaitu:

$$tr\left(A_3^n\right) = tr\begin{bmatrix} 2^{\frac{n-2}{2}} a^n & 0 & 2^{\frac{n-2}{2}} a^n \\ 0 & 2^{\frac{n}{2}} a^n & 0 \\ 2^{\frac{n-2}{2}} a^n & 0 & 2^{\frac{n-2}{2}} a^n \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
tr\left(A_3^n\right) &= 2^{\frac{n-2}{2}}a^n + 2^{\frac{n}{2}}a^n + 2^{\frac{n-2}{2}}a^n \\
&= 2\cdot\left(2^{\frac{n-2}{2}}a^n\right) + 2^{\frac{n}{2}}a^n \\
&= 2^{\frac{n}{2}+1}a^n
\end{aligned}
$$

sehingga terbukti $tr\left(A_3^n\right) = 2^{\frac{n}{2}+1}a^n$, untuk n genap. Berdasarkan pembuktian di atas, maka Teorema 3 terbukti. ■

Kesimpulan

Dalam penelitian ini dapat disimpulkan bahwa :

1. Bentuk umum dari matriks Toeplitz simetris bentuk khusus Persamaan (2) dengan entri bilangan real berpangkat bilangan bulat positif dengan *n* ganjil dan *n* genap yaitu:

$$
A_3^{\,n} = \begin{cases}
\begin{bmatrix} 0 & 2^{\frac{n-1}{2}}a^n & 0 \\ 2^{\frac{n-1}{2}}a^n & 0 & 2^{\frac{n-1}{2}}a^n \\ 0 & 2^{\frac{n-1}{2}}a^n & 0 \end{bmatrix} & ,\text{untuk } n \text{ ganjil} \\
\begin{bmatrix} 2^{\frac{n-2}{2}}a^n & 0 & 2^{\frac{n-2}{2}}a^n \\ 0 & 2^{\frac{n}{2}}a^n & 0 \\ 2^{\frac{n-2}{2}}a^n & 0 & 2^{\frac{n-2}{2}}a^n \end{bmatrix} & ,\text{untuk } n \text{ genap}
\end{cases}
$$

2. Bentuk umum dari *trace* matriks Toeplitz simetris bentuk khusus Persamaan (2) dengan entri bilangan real berpangkat bilangan bulat positif dengan *n* ganjil dan *n* genap yaitu:

$$
tr\left(A_3^{\,n}\right) = \begin{cases} 0 & ,n \text{ ganjil} \\ 2^{\frac{n}{2}+1}a^n & ,n \text{ genap} \end{cases}
$$

Untuk penelitian lebih lanjut, dapat dikembangkan *trace* dari matriks topelitz simetris secara umum.

Daftar Pustaka

[1] Andesta, R., dan Fitri, A. *Trace* Matriks Berbentuk Khusus 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif. *Skripsi*. UIN Sultan Syarif Kasim Riau, 2018.

[2] Anton, H dan C, Rorres. *Aljabar Linear Elementer:Versi Aplikasi*. Edisi 8. Jakarta: Erlangga, 2004.

[3] Aryani, F., dan Nurul, H. *Trace* matriks Toeplitz Tridiagonal 3 x 3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif. *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, 5(1), 2019, 40-49.

[4] Fatonah, T., dan Fitri, A. *Trace* Matriks yang Berbentuk Khusus 2 x 2 Berpangkat Bilangan Bulat Positif". *Skripsi*. UIN Sultan Syarif Kasim Riau, 2017.

[5] Gray, Robert M. *Toeplitz and Circulan Matrices*, Stanford 94305. Department of Electrical Engineering Stanford, USA. 2005.
[6] Makhoul, J. On the Eigenvectors of Symmetric Toeplitz Matrices. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, dan Signal Processing*. 29(4),1981, 868-872.
[7] Munir, R. *Matematika Diskrit*. Edisi 5: Informatika, 2005
[8] Pahade, J dan Manoj J. Trace of Positive Integer Power of real 2 x 2 Matrices. *Advance in Linear Algebra & Matrix Theory*, 5 , 2015, 150-155.
[9] Pahade, J dan Manoj J. Trace of Positive Integer Power of Adjacency Matrices. Global Journal of Pure and Applied Mathematics,13 (6), 2017, 2079-2087.