Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol.5, No. 2, Juli 2019
ISSN 2460-4542, e-ISSN 2615-8663

Determinan Matriks Blok 2×2 Dalam Aplikasi Matriks FLD$circ_r$ Bentuk Khusus

Ade Novia Rahma[1], Fitry Aryani[2], Maura Anggelina[3] dan Rahmawati[4]
Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: ade.novia.rahma@uin-suska.ac.id, raramaura253@gmail.com

ABSTRAK

Matriks dan determinan mempunyai kegunaan dan fungsi yang sangat luar biasa dalam ilmu matematika maupun ilmu terapannya. Banyak cara yang bisa dilakukan untuk menentukan determinan dari suatu matriks salah satunya dengan cara komplemen *schur* yang dimulai dengan memblok matriks tersebut. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan determinan dari suatu matriks $FLDcirc_r$ bentuk khusus dengan memblok matriks tersebut menjadi matriks blok 2×2, terdapat beberapa langkah yang dikerjakan. Pertama, memblok matriks $FLDcirc_r$ menjadi submatriks. Kedua, menentukan determinan submatriks yang berbentuk matriks persegi. Hasil yang diperoleh adalah didapatkannya bentuk umum dari matriks $FLDcirc_r$ bentuk khusus.

Kata Kunci: blok $\mathbf{2 \times 2}$; $\boldsymbol{FLDcirc_r}$; determinan; komplemen *schur*; matriks

ABSTRACT

Matrix and determinant have extraordinary uses and functions in both mathematics and applied sciences. Many ways can be done to determining the determinant of a matrix, one simple way which is by completing the schur that starts with blocking the matrix. This study aims to determine the determinant of a specially $\boldsymbol{FLDcirc_r}$ by blocking the matrix into a $\mathbf{2 \times 2}$ block matrix, there are steps. First, blocking of matrix $\boldsymbol{FLDcirc_r}$ into submatrix. Second, determine the determinant of submatrix shaped matrix square. The result obtained is the determinant of general determinant form of a specially $\boldsymbol{FLDcirc_r}$ matrix.

Keywords: 2×2 *block; determinant;$FLDcirc_r$; schur complements; matrix*

Pendahuluan

Menurut [6] matriks $FLDcirc_r$ adalah sebuah tipe baru dari matriks *circulant*. Bentuk umum dari matriks $FLDcirc_r$ adalah sebagai berikut:

$$A_n = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ ra_{n-1} & a_0 - ra_{n-1} & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ ra_{n-2} & ra_{n-1} - ra_{n-2} & a_0 - ra_{n-1} & \cdots & a_{n-4} & a_{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ra_2 & ra_3 - ra_2 & ra_4 - ra_3 & \cdots & a_0 - ra_{n-1} & a_1 \\ ra_1 & ra_2 - ra_1 & ra_3 - ra_2 & \cdots & ra_{n-1} - a_{n-2} & a_0 - ra_{n-1} \end{bmatrix} \tag{1}$$

dapat ditulis dengan $A = FLDcirc_r(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$.

Matriks blok digunakan untuk menyederhanakan matriks yang ukurannya besar menjadi kecil sehingga lebih mudah dioperasikan untuk tujuan tertentu, salah satunya yaitu untuk menentukan determinan. Menurut [5] matriks blok adalah matriks persegi yang dipartisi atas dua baris dan dua kolom sub-sub matriks yang disebut matriks blok 2×2. Gambaran secara umum matriks blok 2×2 adalah sebagai berikut:

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol.5, No. 2, Juli 2019
ISSN 2460-4542, e-ISSN 2615-8663

$$P=\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1(n-k)} & a_{1(n-(k-1))} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m(k-1)1} & \cdots & a_{(m-k)(n-k)} & a_{m(k-1)(n-(k-1))} & \cdots & a_{(m-k)n} \\ \hline a_{(m-(k-1))1} & \cdots & a_{(m-(k-1))(k-1)} & a_{(m-(k-1))(n-(k-1))} & \cdots & a_{(m-(k-1))n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m(n-k)} & a_{m(n-(k-1))} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right] \tag{2}$$

Pada tahun 2018 [2] telah melakukan penelitian mengenai determinan matriks $FLDcirc_r$ bentuk khusus menggunakan metode adjoin dengan bentuk khusus seperti berikut ini:

$$A_n=\begin{bmatrix} 0 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & x \\ rx & -rx & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{dengan } x, r \in \mathbb{R} \tag{3}$$

Persamaan (3) dapat ditulis dengan $A_n = FLDcirc_r(0, x, 0, \dots, 0)$.

Adapun hasil determinan matriks $FLDcirc_r$ bentuk khusus pada Persamaan di atas yang diperoleh pada artikel tersebut adalah sebagai berikut.

$$(A_n)^{-1}=\begin{bmatrix} x^{-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & (rx)^{-1} \\ x^{-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

Pada artikel ini penulis akan menentukan rumus umum untuk determinan matriks blok 2×2 dalam aplikasi matriks $FLDcirc_r$ bentuk khusus sebagai berikut:

$$P_n=\left[\begin{array}{cc|ccccccccc} 0 & 0 & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ \hline ra & -ra & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ra & -ra & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{dengan } a, r \in \mathbb{R} \tag{4}$$

Persamaan (4) dapat ditulis dengan $A_n = FLDcirc_r(0,0,a,0,\dots,0)$.

Metode dan Bahan Penelitian

Definisi 1 [6] Matriks persegi yang dipartisi atas dua baris dan dua kolom sub-sub matriks yang disebut matriks blok 2×2. Gambaran secara umum matriks blok 2×2 adalah sebagai berikut:
Misalkan P merupakan suatu matriks $m \times n$

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-k)} & a_{1(n-(k-1))} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m(k-1)1} & \cdots & a_{(m-k)(n-k)} & a_{m(k-1)(n-(k-1))} & \cdots & a_{(m-k)n} \\ a_{(m-(k-1))1} & \cdots & a_{(m-(k-1))(k-1)} & a_{(m-(k-1))(n-(k-1))} & \cdots & a_{(m-(k-1))n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m(n-k)} & a_{m(n-(k-1))} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{5}$$

Kemudian diberi garis horizontal dan vertikal sehingga menjadi matriks seperti Persamaan (2) :
Sehingga diperoleh matriks sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m(k-1)1} & \cdots & a_{(m-k)(n-k)} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} a_{1(n-(k-1))} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m(k-1)(n-(k-1))} & \cdots & a_{(m-k)n} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{(m-(k-1))1} & \cdots & a_{(m-(k-1))(k-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m(n-k)} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} a_{(m-(k-1))(n-(k-1))} & \cdots & a_{(m-(k-1))n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m(n-(k-1))} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$P = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Definisi 2 [10] Komplemen *schur* merupakan salah satu metode atau cara dalam analisis matriks yang banyak menggunakan pertidaksamaan matriks. Dalam teori tentang matriks, komplemen *schur* biasanya di gunakan pada matriks kuadrat yang berukuran besar dimana matriks tersebut telah di blok.

Diberikan matriks :

$$\underset{(k+l)\times(m+n)}{P} = \begin{pmatrix} \underset{k\times m}{A} & \underset{k\times n}{B} \\ \underset{l\times m}{C} & \underset{l\times n}{D} \end{pmatrix}$$

1. Jika A adalah *invertible* maka komplemen *schur* dari A adalah $D - CA^{-1}B$.
2. Jika D adalah *invertible* maka komplemen *schur* dari D adalah $A - BD^{-1}C$.
3. Jika B adalah *invertible* maka komplemen *schur* dari B adalah $C - DB^{-1}A$.
4. Jika C adalah *invertible* maka komplemen *schur* dari C adalah $B - AC^{-1}D$.

Definisi 3 [1] Misalkan A adalah matriks bujur sangkar. Fungsi determinan dinotasikan dengan $det(A)$ atau $|A|$ sebagai jumlah dari semua hasil kali elementer bertanda dari A. Angka $det(A)$ disebut determinan dari A.

Teorema 1 [1] Jika A adalah suatu matriks segitiga $n \times n$ (segitiga atas, segitiga bawah, atau diagonal) maka determinan A adalah hasil kali dari entri-entri pada diagonal utama matriks tersebut, yaitu $|A| = a_{11}a_{22}a_{33} \ldots a_{nn}$

Definisi 4 [7] Sebuah matriks persegi tak singular P dan mempunyai P^{-1} dapat dipartisi menjadi blok 2×2 seperti persamaan (2).

Untuk membuat perkalian R dengan R^{-1} dan R^{-1} dengan R, ukuran semua blok tidak dapat sembarang. Misalkan$A, B, C,$ dan D mempunyaiukuran $k \times m,\ k \times n,\ l \times m$ dan $l \times m$, berturut-turut dengan $k + l = m + n$. Lalu ukuran E, F, G dan H mempunyai ukuran $m \times k,\ m \times l,\ n \times k,$ dan $n \times l$. Dengan kata lain, R^{-1} ada di dalam partis transpos dari R.

Di bagian ini, untuk E, F, G dan H istilah dari $A, B, C,$ dan D. Misalkan salah satu blok dari $A, B, C,$ dan D adalah matriks persegi tak singular untuk menghindari invers umum. Sehingga, mempunyai tiga kemungkinan partisi:

1. Partisi diagonal persegi: $k = m$ dan $l = n$
2. Kuadrat partisi diagonal: $k = n$ dan $l = m$
3. Semua partisi persegi: $k = l = m = n$

Teorema 2 [7] Jika A dan B merupakan matriks $n \times n$ maka
(i) $det(AB) = det(A) \cdot det(B)$
(ii) $det\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} = det(A) \cdot det(D)$ jika A dan D merupakan matriks persegi

Teorema 3 [7] Jika P merupakan matriks $n \times n$ dan $P = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ maka determinan dari P adalah

$$det(P) = det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{cases} det(A) \cdot det(D - CA^{-1}B)\ jika\ A\ memiliki\ invers \\ det(D) \cdot det(A - BD^{-1}C)\ jika\ D\ memiliki\ invers \end{cases}$$

Lemma 1 [7] Misalkan J merupakan matriks blok $n \times n$ dengan entri 1 pada diagonal keduanya dan 0 untuk yang lainnya, yaitu

$J = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$, maka $det(J) = (-1)^{\frac{1}{2}(n)(n-1)}$

Matriks J pada Lemma 1 disebut juga dengan matriks diagonal kedua, matriks J memiliki sifat $JJ = I$ dan $JJ^T = I$ sehingga$P = J(PJ^T)$.

Jika submatriks A dan D pada matriks P tidak memiliki invers maka dengan memanfaatkan Lemma 4 dapat digunakan teorema berikut dalam mencari determinan dari matriks P.

Teorema 4 [7] Jika P merupakan matriks $n \times n$ serta B dan C merupakan matriks $p \times p$ atau $q \times q$ maka:

(i) $det\begin{bmatrix} 0 & B \\ C & D \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = (-1)^{\frac{1}{2}(n^2-2n+p^2+q^2)} det(A) \cdot det(B)$

(ii) $det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{cases} (-1)^{\frac{1}{2}(n^2-2n+p^2+q^2)} \cdot det(B) \cdot det(C - DB^{-1}A)\ jika\ B\ memiliki\ invers \\ (-1)^{\frac{1}{2}(n^2-2n+p^2+q^2)} \cdot det(C) \cdot det(B - AC^{-1}D)\ jika\ C\ memiliki\ invers \end{cases}$

Pembuktian pernyataan matematika yang digunakan pada makalah ini adalah induksi matematika. Berikut diberikan definisi mengenai induksi matematika. Materi yang berhubungan dengan induksi matematika berdasarkan. Misalkan $P(n)$adalah pernyataan perihal bilangan bulat dan akan dibuktikan bahwa$P(n)$ tersebut benar untuk semuabilangan bulat $n \geq 1$, maka untuk membuktikan pernyataan ini, cukup dengan menunjukkan bahwa:
1. $P(1)$benar, dan
2. Jika $P(k)$benar, maka $P(k+1)$ juga benar, untuk setiap $n \geq 1$.

Hasil dan Pembahasan

Bagian ini berisi tentang proses untuk menentukan persamaan umum determinan matriks blok 2×2 dalam aplikasi matriks $FLDcirc_r$bentuk khusus. Proses pertama adalah memblok matriks dan menentukan submatriks $FLDcirc_r$ bentuk khusus. Proses kedua adalah membuktikan persamaan umum dalam menentukan determinan submatriks persegi dari matriks $FLDcirc_r$ bentuk khusus dan proses terakhir adalah membuktikan persamaan umum menentukan determinan matriks blok 2×2 dalam aplikasi matriks $FLDcirc_r$ bentuk khusus menggunakan komplemen *schur*.

Berikut proses dalam menentukan matriks blok 2×2 pada Persamaan (4) dengan menggunakan komplemen *schur* berorde 3×3 sampai $n \times n$ yang disajikan sebagai berikut.

1. Memblok matriks $FLDcirc_r P$ menjadi matriks blok 2×2 pada Persamaan (4) berorde 3×3 sebagai berikut.

$$P_3 = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & a \\ \hline ra & -ra & 0 \\ 0 & ra & -ra \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \tag{6}$$

2. Memblok matriks $FLDcirc_r P$ menjadi matriks blok 2×2 pada Persamaan (4) berorde 4×4 sebagai berikut.

$$P_4 = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ \hline ra & -ra & 0 & 0 \\ 0 & ra & -ra & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \tag{7}$$

3. Memblok matriks $FLDcirc_r P$ menjadi matriks blok 2×2 sesuai Persamaan (4) berorde 5×5 sebagai berikut.

$$P_5 = \left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ \hline ra & -ra & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ra & -ra & 0 & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \tag{8}$$

4. Memblok matriks $FLDcirc_r P$ menjadi matriks blok 2×2 sesuai Persamaan (4) berorde $n \times n$ sebagai berikut.

$$P_n = \left[\begin{array}{cc|cccccccccc} 0 & 0 & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ \hline ra & -ra & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ra & -ra & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \tag{9}$$

Dalam menentukan bentuk umum determinan submatriks persegi pada Persamaan (6) sampai Persamaan (9) dengan menggunakan komplemen *schur* terdapat dua proses. Pertama, menghitung determinan dari submatriks B karena berbentuk persegi dengan orde $(n-2) \times (n-2)$. Terakhir, menghitung determinan dari submatriks C karena berbentuk persegi dengan orde 2×2. Sedangkan untuk submatriks A dan D bukan merupakan submatriks persegi karena ukuran orde yang berbeda.

Berikut proses menentukan determinan dari submatriks B dari matriks $FLDcirc_r$ bentuk khusus berorde 3×3 sampai $n \times n$ sebagai berikut.

1. Diberikan submatriks B dari matriks $FLDcirc_r$ bentuk khusus berorde 3×3 pada persamaan (6) yaitu
$B = [a]$
$det\ (B)\ = a$

2. Diberikan submatriks B dari matriks $FLDcirc_r$ bentuk khusus berorde 4×4 pada persamaan (7) yaitu
$B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$
$det\ (B)\ = a^2$

3. Diberikan submatriks B dari matriks $FLDcirc_r$ bentuk khusus berorde 5×5 pada persamaan (8) yaitu
$B = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$
$det\ (B)\ = a^3$

4. Diberikan submatriks B dari matriks $FLDcirc_r$ bentuk khusus berorde $n \times n$ pada persamaan (9) yaitu
$B = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$
$det\ (B)\ = a^n$

Teorema 5 Diberikan suatu submatriks B dari matriks $FLDcirc_r$ bentuk khusus pada Persamaan (4), maka nilai determinan matriks adalah

$$det\ (B)\ = a^n$$

Terbukti dengan menggunakan Teorema 1.

Kedua, menentukan determinan dari submatriks C dari matriks $FLDcirc_r$ bentuk khusus berorde 2×2 sebagai berikut.

$C = \begin{bmatrix} ra & -ra \\ 0 & ra \end{bmatrix}$
$det\ (C)\ =\ r^2a^2$

Berikut proses dalam menentukan bentuk umum determinan matriks blok 2×2 dalam aplikasi matriks $FLDcirc_r$ bentuk khusus pada Persamaan (4) dengan menggunakan komplemen *schur*. Setelah mendapatkan determinan submatriks persegi dari matriks $FLDcirc_r$ bentuk khusus berorde 3×3 sampai $n \times n$ menggunakan Teorema 4 yang disajikan sebagai berikut.

1. Menentukan invers matriks blok 2×2 dalam aplikasi matriks invers $FLDcirc_r$ bentuk khusus untuk matriks berorde 3×3 yaitu

Berdasarkan Teorema 4 maka diperoleh determinan tersebut adalah

$$\begin{aligned} det\begin{bmatrix} 0 & B \\ C & D \end{bmatrix} &= (-1)^{\frac{1}{2}(n^2-2n+p^2+q^2)} det\,(B) \cdot\, det\,(C) \\ &= (-1)^{\frac{1}{2}(3^2-2(3)+1^2+2^2)} a \cdot\, r^2a^2 \\ &= (-1)^4 a \cdot\, r^2a^2 \\ &= r^2a^3 \end{aligned} \tag{10}$$

2. Menentukan invers matriks blok 2×2 dalam matriks invers $FLDcirc_r$ bentuk khusus untuk matriks berorde 4×4, yaitu

Berdasarkan Teorema 4 maka diperoleh determinan tersebut adalah

$$\begin{aligned} det\begin{bmatrix} 0 & B \\ C & D \end{bmatrix} &= (-1)^{\frac{1}{2}(n^2-2n+p^2+q^2)} det\,(B) \cdot\, det\,(C) \\ &= (-1)^{\frac{1}{2}(4^2-2(4)+2^2+2^2)} a^2 \cdot\, r^2a^2 \\ &= (-1)^8 a^2 \cdot\, r^2a^2 \\ &= r^2a^4 \end{aligned} \tag{11}$$

3. Menentukan invers matriks blok 2×2 dalam matriks invers $FLDcirc_r$ bentuk khusus untuk matriks berorde 5×5, yaitu

Berdasarkan Teorema 4 maka diperoleh determinan tersebut adalah

$$\begin{aligned} det\begin{bmatrix} 0 & B \\ C & D \end{bmatrix} &= (-1)^{\frac{1}{2}(n^2-2n+p^2+q^2)} det\,(B) \cdot\, det\,(C) \\ &= (-1)^{\frac{1}{2}(5^2-2(5)+3^2+2^2)} a^3 \cdot\, r^2a^2 \\ &= (-1)^{14} a^3 \cdot\, r^2a^2 \\ &= r^2a^5 \end{aligned} \tag{12}$$

4. Menentukan invers matriks blok 2×2 dalam matriks invers $FLDcirc_r$ bentuk khusus untuk matriks berorde $n \times n$, yaitu

Berdasarkan Teorema 4 maka diperoleh determinan tersebut adalah

$$\begin{aligned} det\begin{bmatrix} 0 & B \\ C & D \end{bmatrix} &= (-1)^{\frac{1}{2}(n^2-2n+p^2+q^2)} det\,(B) \cdot\, det\,(C) \\ &= (-1)^{\frac{1}{2}(n^2-2(n)+(n-2)^2+2^2)} a^{n-2} \cdot\, r^2a^2 \\ &= (-1)^{\frac{1}{2}(n^2-2(n)+n^2-4n+8)} a^{n-2} \cdot r^2a^2 \\ &= (-1)^{\frac{1}{2}(2n^2-6n+8)} a^{n-2} \cdot r^2a^2 \\ &= (-1)^{(n^2-3n+4)} r^2a^n \end{aligned} \tag{13}$$

Setelah mendapatkan nilai-nilai determinan dari matriks $FLDcirc_r$ bentuk khusus orde 3×3 sampai $n \times n$ yaitu pada Persamaan (10) sampai Persamaan (13), maka dapat diduga bentuk umum dari determinan matriks $FLDcirc_r$ berbentuk khusus tersebut berdasarkan pola rekursifnya, yaitu $|p|$. Berdasarkan dugaan tersebut, maka bentuk umum determinan matriks orde disajikan pada Teorema 6 berikut.

Teorema 6 Diberikan $P_n$suatu matriks $FLDcirc_r$ bentuk khusus pada Persamaan (4) maka nilai dari determinan dari matriks P_n adalah

$$|P_n| = (-1)^{(n^2-3n+4)} r^2a^n, \qquad n \geq 3$$

Bukti.

Pembuktian teorema tersebut menggunakan induksi matematika

1. Basis induksi. Akan ditunjukkan $p(3)$ benar.

Perhatikan bahwa:
$p(3): |P_3| = (-1)^{(3^2-9+4)} r^2 a^3 = ra^3$
Dengan memperhatikan Persamaan (10), maka $p(3)$ benar.

2. Langkah induksi. Asumsikan $p(k)$ benar, yaitu
$p(k): |P_k| = (-1)^{(k^2-3k+4)} r^2 a^k,\ k \geq 3$. Selanjutnya akan dibuktikan $p(k+1)$ juga benar, yaitu
$$p(k+1): |P_{k+1}| = (-1)^{((k+1)^2-3(k+1)+4)} r^2 a^{k+1} \tag{14}$$

Pembuktian dimulai dari

$$P_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ ra & -ra & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ra & -ra & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{k+1}$$

Dengan menggunakan Teorema 4 matriks blok diperoleh

$$\begin{aligned} det(P_{k+1}) &= (-1)^{\frac{1}{2}(n^2-2n+p^2+q^2)} det\,(B) \cdot det\,(C) \\ &= (-1)^{\frac{1}{2}(k^2-2k+(k-2)^2+2^2)} r^2 a^k \cdot (-1)^{\frac{1}{2}(1^2-2+1+2^2)} r^2 a \\ &= (-1)^{\frac{1}{2}(k^2-2k+(k^2-4k+4)+4)} r^2 a^k \cdot (-1)^{\frac{1}{2}(4)} r^2 a \\ &= (-1)^{\frac{1}{2}(2k^2-6k+8)} r^2 a^k \cdot (-1)^{\frac{1}{2}(4)} r^2 a \\ &= (-1)^{\frac{1}{2}(2k^2-6k+8)} r^2 a^k \cdot (-1)^{\frac{1}{2}(4)} r^2 a \\ &= (-1)^{(k^2-3k+4)} r^2 a^k \cdot (-1)^2\, r^2 a \\ &= (-1)^{((k+1)^2-3(k+1)+4)} r^2 a^{k+1} \end{aligned}$$

dengan memperhatikan Persamaan (14) maka $p(k+1)$ benar. Berdasarkan langkah 1 dan langkah 2 maka Teorema 6 terbukti.

Berikut diberikan aplikasi Teorema 6 pada matriks $FLDcirc_r$ bentuk khusus pada Persamaan (7). Sebab telah didapatkannya formula secara umum untuk menentukan nilai determinannya.

Contoh 1 Tentukan determinan dari matriks $FLDcirc_r$ berikut.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 6 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan soal pada Contoh 1 dapat ditulis $P_4 = FLDcirc_r(0,0,3,0)$, dengan $n = 4$, $r = 2$, dan $a = 3$. Berdasarkan Teorema 6 maka determinannya adalah

$$\begin{aligned} |P_n| &= (-1)^{(n^2-3n+4)} r^2 a^n \\ |P_4| &= (-1)^{(4^2-12+4)} 2^2 3^4 \\ |P_4| &= (-1)^8 4 \cdot 81 \\ |P_4| &= 243 \end{aligned}$$

Contoh 2 Tentukan determinan dari matriks $FLDcirc_r$ berikut.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 8 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan soal pada Contoh 2 dapat ditulis $P_8 = FLDcirc_r(0,0,2,0,0,0,0,0)$, dengan $n = 8$, $r = 4$, dan $a = 2$. Berdasarkan Teorema 6 maka determinannya adalah

$$|P_n| = (-1)^{(n^2-3n+4)} r^2 a^n$$
$$|P_8| = (-1)^{(8^2-24+4)} 4^2 2^8$$
$$|P_8| = (-1)^{44} 16 \cdot 256$$
$$|P_8| = 4096$$

Kesimpulan

Bentuk umum determinan suatu matriks $FLDcirc_r$ bentuk khusus pada Persamaan (4) adalah sebagai berikut.

$$|P_n| = (-1)^{(n^2-3n+4)} r^2 a^n$$

Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terimakasih kepada reviewer, mahasiswa dan teman sejawat yang telah memberikan masukan dalam peningkatan kualitas makalah ini.

Daftar Pustaka

[1] Anton H. Rorres, Chris. Aljabar Linier Elementer, Edisi Kedelapan. Jakarta: Erlangga. 2004.
[2] Aryani F, Rysfan. *Determinan Matriks FLDcircr Bentuk Khusus Menggunkan Ekspansi Kofaktor.* Pekanbaru. 2018
[3] Davis PJ. Circulant Matrices, Division of Applied Mathematics Brown University. New York. 1979.
[4] Munir R. Matematika Diskrit, Edisi Ketiga. Bandung Informatika: Bandung. 2007.
[5] Ilhamsyah, Helmi, dan F.Fran. 2017. *Determinan dan Invers Matriks Blok* 2×2. Vol 06, No.3, hal.193-202.
[6] Pan X, Qin M. *The Discriminance for FLDcircr Matricesand the Fast Algorithm of Their Inverseand Generalized Inverse*. Shanghai. 2015.
[7] Tzon TL, Sheng H.S. “Inverses of 2×2 Block Matrices”. *Computer and Mathematic with Application*, Vol 43, hal.119-129. 2002.
[8] Thomas LM, Ronald L.S. “A Schur Complement Inequality for CertainP-matrices”. Hal.33-41. 1998.
[9] Tian Y, Takane Y. “Complemen Schur and Banachiewicz Schur Form”. Vol. 13, hal 408-418. 2005.
[10] Zaglia, M. R. “Pseudo-Schur Complements and their Properties”. *Apll.Numer Math*. Vol 50, hal 511-519. 2004.