Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol.5, No. 2, Juli 2019
ISSN 2460-4542, e-ISSN 2615-8663

Nilai Total Ketakteraturan Titik dan Sisi dari p-*Copy* Graf Theta Tak Seragam

Corry Corazon Marzuki[1], Oriza Sandriani[2], Fitri Aryani[3]
[1,2,3] Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: corry@uin-suska.ac.id; oriza.sandriani@students.uin-suska.ac.id; khodijah_fitri@uin-suska.ac.id

ABSTRAK

Pelabelan-k total pada graf G adalah suatu pemetaan $\lambda : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2,\ldots,k\}$. Pelabelan-$k$ total tak teratur diantaranya terdiri dari: pelabelan-k total tak teratur titik, dan pelabelan-k total tak teratur sisi. Suatu pelabelan-k total tak teratur pada G dikatakan tak teratur titik jika bobot setiap titiknya berbeda. Nilai total ketakteraturan titik dari graf G yaitu label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan-k total tak teratur titik, yang dinotasikan dengan $tvs(G)$. Suatu pelabelan-k total tak teratur pada G dikatakan tak teratur sisi jika bobot setiap sisinya berbeda. Nilai total ketakteraturan sisi dari graf G yaitu label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan-k total tak teratur sisi yang dinotasikan dengan $tes(G)$. Pada makalah ini diperoleh nilai total ketakteraturan titik dari graf $p\theta(8,3,(3,0,3))$adalah $2p+1$ untuk p merupakan bilangan bulat positif. Sedangkan untuk nilai total ketakteraturan sisi dari graf $p\theta(8,3,(3,0,3))$adalah $3p+1$ untuk p merupakan bilangan bulat positif.

Katakunci : *graf copy, graf theta, nilai total ketakteraturan titik, nilai total ketakteraturan sisi, pelabelan-k total tak teratur.*

ABSTRACT

A total k-labeling on a graph G is a mapping $\lambda : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1,2,\ldots,k\}$. Irregular total k-labeling consists of: vertex irregular total k-labeling, edge irregular total k-labeling and total irregular total k-labeling. An irregular total k-labeling of G is called vertex irregular, if the weight of every vertices are different. The total vertex irregularity strength of the graph G is the minimum the largest label used to label a graph G with vertex irregular total k-labeling, denoted by $tvs(G)$. An irregular total k-labeling of G is called edge irregular, if the weight is every edges are different. The total edge irregularity strength of the graph G is the minimum the largest label used to label a graph G with edge irregular total k-labeling, denoted by $tes(G)$. In this paper we determine the total vertex irregularity strength of the graph $p\theta(8,3,(3,0,3))$ is $2p+1$ for p positive integer. Whereas, for total edge irregularity strength of the graph $p\theta(8,3,(3,0,3))$ is $3p+1$ for p positive integer.

Keywords : *copy graph, theta graph, total vertex irregularity strength, total edge irregularity strength, irregular total k-labeling.*

Pendahuluan

Graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang berperan penting dalam kehidupan. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V,E) ditulis dengan notasi $G=(V,E)$ yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak kosong dari titik-titik (*vertices* atau *node*) dan E adalah himpunan sisi (*edges* atau *arcs*) yang menghubungkan sepasang titik[1]. Pelabelan graf adalah suatu pemetaan yang memetakan elemen suatu graf $G=(V,E)$ ke bilangan bulat positif. Jika domain dari pemetaan adalah titik, maka pelabelan disebut pelabelan titik (*vertex labeling*), jika domainnya adalah sisi maka pelabelan disebut pelabelan sisi (*edge labeling*), dan jika domainnya adalah titik dan sisi maka pelabelan disebut pelabelan total (*total labeling*). Jenis pelabelan graf yang telah dikaji diantaranya adalah pelabelan *graceful*, pelabelan tak teratur, pelabelan harmoni, pelabelan ajaib, dan pelabelan anti ajaib.

Salah satu jenis pelabelan yang belakangan ini sering menjadi perbincanganya itu pelabelan total tak teratur. Pelabelan total tak teratur pertama kali diperkenalkan oleh Baca, dkk. pada Tahun 2001, yaitu pelabelan total tak teratur sisi dan pelabelan total tak teratur titik [2].

Pada tahun 2015, Rajasingh dan Arockiamary meneliti tentang nilai ketakteraturan sisi dari graf seri paralel [3]. Graf seri paralel adalah graf dengan dua titik yang disebut terminal yang dibentuk secara rekursif oleh dua operasi komposisi sederhana yang dapat digunakan untuk model rangkaian dan rangkaian listrik paralel. Pada umumnya suatu graf seri paralel memuat suatu graf theta didalamnya. Graf theta merupakan graf dengan n titik, diantaranya dua titik yaitu N dan S berderajat m sedemikian sehingga setiap titik lainnya berderajat dua dan terletak pada salah satu dari m lintasan disebut juga *longitude* yang menghubungkan titik N dan S. Dua titik N dan S secara berturut-turut disebut kutub utara dan kutub selatan. *Longitude* dilambangkan dengan L. Adapun notasi untuk suatu graf theta adalah $\theta(n,m,r)$ dimana n adalah jumlah titik pada graf theta, m adalah banyak *longitude*, dan r adalah banyak titik pada setiap *longitude*-nya. Sebuah graf theta dikatakan seragam jika $|L_1| = |L_2| = \cdots = |L_m|$, dimana L_i adalah *longitude* ke-i dari $\theta(n,m,r)$ dengan $i = 1,2,\ldots,m$. Pada makalah ini akan ditentukan nilai total ketakteraturan titik dan sisi dari graf theta tak seragam khususnya $p\theta\big(8,3,(3,0,3)\big)$ yaitu *p-copy* graf theta tak seragam dengan 8 titik, dan 3 *longitude*, dengan $(3,0,3)$ adalah banyaknya titik di setiap *longitude* secara berurutan.

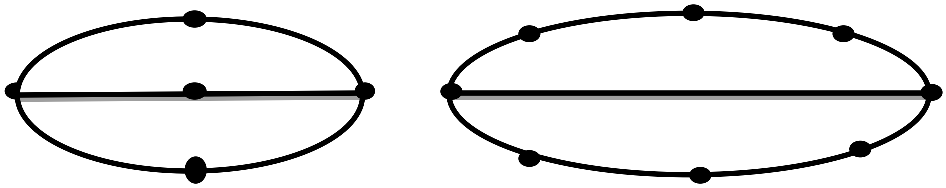
Kajian tentang $tvs(G)$ dan $tes\,(G)$ telah banyak dilakukan diantaranya, Marzuki dkk. membahas tentang nilai total ketakteraturan titik dari m-*Copy* graf lingkaran [4], hasil dari penelitian ini diperoleh $tvs\,(mC_n) = \left\lceil \frac{nm+2}{3} \right\rceil$ untuk $m \geq 1$ dan $n \equiv 2(mod 3)$. Ali Ahmad, dkk. membahas tentang nilai total ketakteraturan sisi [5], hasil dari penelitian ini diperoleh untuk $n \geq 2$ maka nilai total ketakteraturan sisi dari graf rantai $C[C_4^n]$ adalah $2n+1$.

Metode dan Bahan Penelitian

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V,E) ditulis dengan notasi $G = (V,E)$ yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak kosong dari titik-titik (*vertices* atau *node*) dan E adalah himpunan sisi (*edges* atau *arcs*) yang menghubungkan sepasang titik.

Definisi diatas menyatakan bahwa V tidak boleh kosong, sedangkan E boleh kosong. Jadi, sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buah pun, tetapi titiknya harus ada minimal satu. Graf yang hanya mempunyai satu buah titik tanpa sebuah sisipun dinamakan graf trivial.

Terdapat beberapa jenis graf, salah satunya adalah graf theta. Graf theta merupakan graf dengan n titik, diantaranya dua titik yaitu N dan S berderajat m sedemikian sehingga setiap titik lainnya berderajat dua dan terletak pada salah satu dari m lintasan yang bergabung dengan titik N dan S. Dua titik N dan S secara berturut-turut disebut kutub utara dan kutub selatan. Lintasan m disebut *longitude*. *Longitude* dilambangkan dengan L. Adapun notasi untuk suatu graf theta adalah $\theta(n,m,r)$ dimana n adalah jumlah titik pada graf theta, m adalah banyak *longitude*, dan r adalah banyak titik pada setiap *longitude*-nya. Sebuah graf theta dikatakan seragam jika $|L_1| = |L_2| = \cdots = |L_m|$, dimana L_i adalah *longitude* ke-i dari $\theta(n,m,r)$ dengan $i = 1,2,\ldots,m$.



(a) **(b)**

Gambar1. (a) Graf Theta Seragam, $\boldsymbol{\theta(5,3,1)}$; (b) Graf Theta Tak Seragam, $\boldsymbol{\theta(8,3,(3,0,3))}$

Selanjutnya, bagian ini juga memuat beberapa definisi dan teorema dasar yang dapat digunakan sebagai landasan matematis untuk uraian-uraian pada bagian selanjutnya yang disajikan berikut ini.

Definisi 1 [2]

Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf. Pelabelan $\lambda: V \cup E \to \{1,2,\dots k\}$ dikatakan pelabelan-k total tak teratur titik di G, jika setiap dua titik berbeda x dan y di G memenuhi $wt(x) \neq \mathrm{wt}(\mathrm{y})$.

$wt(x)$ merupakan bobot titik x yang dinyatakan sebagai:

$$wt(x) = \lambda(x) + \sum_{ux \in E} \lambda(ux)$$

Nilai total ketakteraturan titik (*total vertex irregularity strength*) dari graf G yang dinotasikan dengan $tvs(G)$ adalah label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan total tak teratur titik.

Hasil penelitian tentang nilai total ketakteraturan titik diberikan pada teorema-teorema berikut:

Teorema 2 [2]

Misalkan G adalah graf (p, q) dengan derajat minimum δ dan derajat maksimum Δ, maka :

$$\left\lceil \frac{p+\delta}{\Delta+1} \right\rceil \leq tvs(G) \leq p + \Delta - 2\delta + 1$$

Teorema 3 [6]

Diberikan graf tP_n sebagai t-*copy* graf lintasan dengan n titik, dimana $t \geq 2$ maka,

$$tvs(tP_n) = \begin{cases} t & \text{untuk } n = 1 \\ t+1 & \text{untuk } 2 \leq n \leq 3 \\ \left\lceil \frac{nt+1}{3} \right\rceil & \text{untuk } n \geq 4 \end{cases}$$

Teorema 4 [7]

Untuk$m \geq 3$ dan m bilangan ganjil berlaku,

$$tvs(P_m \rhd C_5) = \left\lceil \frac{4m+2}{3} \right\rceil$$

Definisi 5 [2]

Misalkan $G = (V, E)$ sebuah graf. Pelabelan $\lambda : V \cup E \to \{1,2,\dots k\}$ disebut pelabelan-k total tak teratur sisi jika untuk sebarang dua sisi $e = u_1v_1$ dan $f = u_2v_2$ yang berbeda di G berlaku $wt(e) \neq wt(f)$, dengan $wt(e) = \lambda(u_1) + \lambda(e) + \lambda(v_1)$ dan $wt(f) = \lambda(u_2) + \lambda(f) + \lambda(v_2)$. Nilai total ketakteraturan sisi (*total edge irregularity strength*) dari graf G, yang dinotasikan dengan $tes(G)$ adalah label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan total tak teratur sisi.

Hasil penelitian tentang nilai total ketakteraturan sisi diberikan pada teorema-teorema berikut :

Teorema 6 [2]

Jika $G(V, E)$ adalah suatu graf dengan himpunan titik tak kosong V dan himpunan sisi E, maka:

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol.5, No. 2, Juli 2019
ISSN 2460-4542, e-ISSN 2615-8663

$$\left\lceil\frac{|E|+2}{3}\right\rceil \leq tes\ (G) \leq |E|$$

Teorema 7 [8]

Untuk setiap graf G dengan sisi sebanyak m dan derajat maksimum Δ yang berbeda dengan K_5 maka,

$$tes(G) = max\left\{\left\lceil\frac{m+2}{3}\right\rceil, \left\lceil\frac{\Delta+1}{2}\right\rceil\right\}$$

Teorema 8 [9]

Nilai ketakteraturan total sisi pada gabungan saling lepas graf siput isomorfis dengan $n \geq 1$ dan $m \geq 2$, adalah:

$$tes(mS_n) = \left\lceil\frac{m(3n+7)+2}{3}\right\rceil$$

Berdasarkan rumusan masalah, permasalahan yang akan diteliti yaitu tentang menentukan nilai total ketakteraturan titik dan sisi dari p-*copy* graf theta tak seragam.

Adapun langkah-langkah yang digunakan dalam menentukan nilai total ketakteraturan titik dari p-*copy* graf theta tak seragam sebagai berikut:

1. Menentukan batas bawah dari $tvs\big((p\theta(8,3,(3,0,3))\big)$ dengan menggunakan Teorema 2, yaitu :
$$\left\lceil\frac{p+\delta}{\Delta+1}\right\rceil \leq tvs\ (G) \leq p+\Delta-2\delta+1$$
2. Menentukan pelabelan-k total tak teratur titik dari graf $p\theta(8,3,(3,0,3))$untuk $p = 1,2,\dots,10$, dengan menggunakan label terbesar sebesar batas bawah yang diperoleh pada Langkah 1.
3. Menentukan rumus pelabelan sisi dari graf $p\theta(8,3,(3,0,3))$ untuk p bilangan bulat positif, dengan mengacu pada pelabelan yang terdapat pada Langkah 2.
4. Menentukan rumus pelabelan titik dari graf $p\theta(8,3,(3,0,3))$untuk p bilangan bulat positif, dengan mengacu pada pelabelan yang terdapat pada Langkah 2.
5. Menentukan rumus bobot sisi dari graf $p\theta(8,3,(3,0,3))$ untuk p bilangan bulat positif, menggunakan rumus yang diperoleh pada Langkah 3 dan Langkah 4.
6. Membuktikan bahwa λ merupakan pelabelan total tak teratur titik dari graf $p\theta(8,3,(3,0,3))$ untuk $p \geq 2$.

Adapun langkah-langkah yang digunakan dalam menentukan nilai total ketakteraturan sisi dari p-*copy* graf theta tak seragam sebagai berikut:

1. Menentukan batas bawah dari $tes\left(p\theta\big(8,3,(3,0,3)\big)\right)$ untuk $m \geq 2$ dengan menggunakan Teorema 6, yaitu :
$$\left\lceil\frac{|E|+2}{3}\right\rceil \leq tes\ (G) \leq |E|$$
2. Menentukan pelabelan-k total tak teratur sisi dari graf $p\theta\big(8,3,(3,0,3)\big)$ untuk $p = 1,2,\dots,10$, dengan menggunakan label terbesar sebesar batas bawah yang diperoleh pada Langkah 1.

3. Menentukan rumus pelabelan sisi dari graf $p\theta\big(8,3,(3,0,3)\big)$ untuk p bilangan bulat positif, dengan mengacu pada pelabelan yang terdapat pada Langkah 2.
4. Menentukan rumus pelabelan titik dari graf $p\theta\big(8,3,(3,0,3)\big)$ untuk p bilangan bulat positif,dengan mengacu pada pelabelan yang terdapat pada Langkah 2.
5. Menentukan rumus bobot sisi dari graf $p\theta\big(8,3,(3,0,3)\big)$ untuk p bilangan bulat positif, menggunakan rumus yang diperoleh pada Langkah 3 dan Langkah 4.
6. Membuktikan bahwa λ merupakan pelabelan total tak teratur sisi dari graf $p\theta\big(8,3,(3,0,3)\big)$ untuk $p \geq 2$.

Hasil dan Pembahasan

Graf $p\theta\big(8,3,(3,0,3)\big)$ merupakan graf yang diperoleh dengan menggandakan graf $\theta\big(8,3,(3,0,3)\big)$ sebanyak p kali, dimana himpunan titik dari setiap hasil penggandaan tidak ada yang beririsan. Misalkan graf $\theta\big(8,3,(3,0,3)\big)$ hasil penggandaan ke-i memiliki himpunan titik $V = \{v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}, \dots, v_{i,8}\}$ dan himpunan sisi $E = \{e_{i,1}, e_{i,2}, e_{i,3}, \dots, e_{i,9}\}$ dengan $e_{i,1} = v_{i,1}v_{i,2}$, $e_{i,2} = v_{i,2}v_{i,3}$, $e_{i,3} = v_{i,1}v_{i,4}$, $e_{i,4} = v_{i,4}v_{i,5}$, $e_{i,5} = v_{i,3}v_{i,5}$, $e_{i,6} = v_{i,4}v_{i,6}$, $e_{i,7} = v_{i,6}v_{i,7}$, $e_{i,8} = v_{i,7}v_{i,8}$, $e_{i,9} = v_{i,5}v_{i,8}$, dimana $1 \leq i \leq p$.

Nilai total ketakteraturan titik pada graf $p\theta\big(8,3,(3,0,3)\big)$, dinotasikan dengan $tvs\Big(p\theta\big(8,3,(3,0,3)\big)\Big)$, untuk p bilangan bulat positif disajikan dalam teorema berikut:

Teorema9

Misalkan $p\theta\big(8,3,(3,0,3)\big)$ adalah p-*copy* graf theta tak seragam dengan 8 titik, dan 3 *longitude*, dengan$(3,0,3)$ adalah banyaknya titik disetiap *longitude* secara berurutan, maka berlaku $tvs\Big(p\theta\big(8,3,(3,0,3)\big)\Big) = 2p+1$, untuk p bilangan bulat positif.

Bukti :

Perhatikan bahwa banyaknya titik pada graf $p\theta\big(8,3,(3,0,3)\big)$ adalah n, dengan derajat maksimum $\Delta = 3$ dan derajat minimum $\delta = 2$. Berdasarkan Teorema 2 diperoleh $\left\lceil\frac{8p+2}{4}\right\rceil \leq tvs\Big(p\theta\big(8,3,(3,0,3)\big)\Big) \leq 8p$ atau dapat dituliskan juga dengan $tvs\Big(p\theta\big(8,3,(3,0,3)\big)\Big) \geq \left\lceil\frac{8p+2}{4}\right\rceil = 2p+1$.

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $tvs\Big(p\theta\big(8,3,(3,0,3)\big)\Big) \leq 2p+1$. Hal ini akan dibuktikan dengan menunjukkan adanya pelabelan-$(2p+1)$ total tak teratur titik pada graf $p\theta\big(8,3,(3,0,3)\big)$, dimana p bilangan bulat positif.

Definisikan pelabelan-$(2p+1)$ total tak teratur titik pada graf $p\theta\big(8,3,(3,0,3)\big)$ sebagai berikut :

a) Label sisi (*edge*) pada graf $p\theta\big(8,3,(3,0,3)\big)$, dengan p bilangan bulat positif dan $1 \leq i \leq p$;

$$\lambda(e_{i,j}) = \begin{cases} i & \text{untuk } j = 1 \text{ dan } 2 \\ 2i & \text{untuk } j = 3 \\ 2p+1 & \text{untuk } j = 4, 6 \text{ dan } 9 \\ 2i+1 & \text{untuk } j = 5 \\ p+i & \text{untuk } j = 7 \text{ dan } 8 \end{cases} \qquad (1)$$

b) Label titik (*vertex*) pada graf $p\theta(8,3,(3,0,3))$, dengan p bilangan bulat positif dan $1 \le i \le p$;

$$\lambda(v_{i,j}) = \begin{cases} 1 & \text{untuk } j = 1 \text{ dan } 3 \\ i & \text{untuk } j = 2 \\ 2p+1 & \text{untuk } j = 4 \text{ dan } 5 \\ 2i+1 & \text{untuk } j = 6 \\ p+i & \text{untuk } j = 7 \\ 2i & \text{untuk } j = 8 \end{cases} \tag{2}$$

Berdasarkan rumus label sisi dan label titik di atas, diperoleh rumus bobot titik pada graf $p\theta(8,3,(3,0,3))$, dengan p bilangan bulat positif dan $1 \le i \le p$ sebagai berikut :

$$wt(v_{i,j}) = \begin{cases} 3i+1 & \text{untuk } j = 1 \\ 3i & \text{untuk } j = 2 \\ 3i+2 & \text{untuk } j = 3 \\ 2i+6p+3 & \text{untuk } j = 4 \\ 2i+6p+4 & \text{untuk } j = 5 \\ 3i+3p+2 & \text{untuk } j = 6 \\ 3i+3p & \text{untuk } j = 7 \\ 3i+3p+1 & \text{untuk } j = 8 \end{cases} \tag{3}$$

Perhatikan bahwa pelabelan $\lambda: V \cup E \to \{1,2,3,\dots,2p+1\}$. Bobot titik dari graf $p\theta(8,3,(3,0,3))$ pada Persamaan (3) untuk $j = 2,1,3$ adalah bilangan bulat positif berurutan mulai dari 3 sampai $3p+2$, untuk $j = 7,8,6$ adalah bilangan bulat positif berurutan mulai dari $3p+3$ sampai $6p+2$, sedangkah untuk $j = 4,5$ adalah bilangan bulat positif berurutan mulai dari $6p+5$ sampai $8p+4$. Hal tersebut mengakibatkan bobot setiap titik dari graf $p\theta(8,3,(3,0,3))$ berbeda. Oleh karena itu, λ adalah pelabelan-$(2p+1)$ total tak teratur titik dari graf $p\theta(8,3,(3,0,3))$ dimana p bilangan bulat positif. Jadi, dapat disimpulkan bahwa $tvs\left(p\theta(8,3,(3,0,3))\right) \le 2p+1$.

Oleh karena $tvs\left(p\theta(8,3,(3,0,3))\right) \ge 2p+1$ dan $tvs\left(p\theta(8,3,(3,0,3))\right) \le 2p+1$, maka terbukti bahwa nilai total ketakteraturan titik dari graf $p\theta(8,3,(3,0,3))$ dimana p bilangan bulat positif adalah $tvs\left(p\theta(8,3,(3,0,3))\right) = 2p+1$ ■

Nilai total ketakteraturan sisi pada graf $p\theta(8,3,(3,0,3))$, dinotasikan dengan $tes\left(p\theta(8,3,(3,0,3))\right)$, untuk p bilangan bulat positif disajikan dalam teorema berikut:

Teorema 10

Misalkan $p\theta(8,3,(3,0,3))$ adalah p-*copy* graf theta tak seragam dengan 8 titik, dan 3 *longitude*, dengan $(3,0,3)$ adalah banyaknya titik disetiap *longitude* secara berurutan, maka berlaku

$tes\left(p\theta(8,3,(3,0,3))\right) = 3p+1$, dengan p bilangan bulat positif

Bukti :

Perhatikan bahwa banyaknya sisi pada graf $p\theta(8,3,(3,0,3))$ adalah$|E(p\theta(8,3,(3,0,3)))| = 9p$. Berdasarkan Teorema 6 diperoleh $\left\lceil\frac{9p+2}{3}\right\rceil \le tes\left(p\theta(8,3,(3,0,3))\right) \le 9p$ atau dapat dituliskan juga dengan $tes\left(p\theta(8,3,(3,0,3))\right) \ge \left\lceil\frac{9p+2}{3}\right\rceil = 3p+1$.

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $tes\left(p\theta(8,3,(3,0,3))\right) \le \left\lceil\frac{9p+2}{3}\right\rceil = 3p+1$. Hal ini akan dibuktikan dengan menunjukkan adanya pelabelan-$(3p+1)$ total tak teratur sisi pada graf

$p\theta\big(8,3,(3,0,3)\big)$, dimana p bilangan bulat positif. Definisi pelabelan-$(3p+1)$ total tak teratur sisi pada graf $p\theta\big(8,3,(3,0,3)\big)$ sebagai berikut :

a) Label sisi (*edge*) pada graf $p\theta\big(8,3,(3,0,3)\big)$, dengan p bilangan bulat positif dan $1 \le i \le p$;

$$\lambda(e_{i,j}) = \begin{cases} 3i-2 & \text{untuk } j = 1 \text{ dan } 2 \\ 3i-1 & \text{untuk } j = 3 \text{ dan } 4 \\ 3i & \text{untuk } 5 \le j \le 7 \\ 3i+1 & \text{untuk } j = 8 \text{ dan } 9 \end{cases} \qquad (4)$$

b) Labeltitik (*vertex*) padagraf$p\theta\big(8,3,(3,0,3)\big)$ untuk p bilangan bulat positifdan $1 \le i \le p$;

$$\lambda(v_{i,j}) = \begin{cases} 3i-2 & \text{untuk } j = 1 \text{ dan } 2 \\ 3i-1 & \text{untuk } 3 \le j \le 5 \\ 3i & \text{untuk } j = 6 \text{ dan } 7 \\ 3i+1 & \text{untuk } j = 8 \end{cases} \qquad (5)$$

Berdasarkan rumus label sisi dan label titik di atas, diperoleh rumus bobot sisi pada graf $p\theta\big(8,3,(3,0,3)\big)$, dengan p bilangan bulat positif dan $1 \le i \le p$ sebagai berikut :

$$wt(v_{i,j}) = \begin{cases} 9i-6 & \text{untuk } j = 1 \\ 9i-5 & \text{untuk } j = 2 \\ 9i-4 & \text{untuk } j = 3 \\ 9i-3 & \text{untuk } j = 4 \\ 9i-2 & \text{untuk } j = 5 \\ 9i-1 & \text{untuk } j = 6 \\ 9i & \text{untuk } j = 7 \\ 9i+2 & \text{untuk } j = 8 \\ 9i+1 & \text{untuk } j = 9 \end{cases} \qquad (6)$$

Perhatikan bahwa pelabelan $\lambda: V \cup E \to \{1,2,3,\dots,3p+1\}$. Bobot sisi dari graf $p\theta\big(8,3,(3,0,3)\big)$ pada Persamaan (4.8) adalah bilangan bulat positif berurut dimulai dari 3 sampai $9p+2$, hal tersebut mengakibatkan bobot setiap sisi dari graf $p\theta\big(8,3,(3,0,3)\big)$ dimana p bilangan bulat positif berbeda. Oleh karena itu, λ adalah pelabelan-$3p+1$ total tak teratur sisi dari graf $p\theta\big(8,3,(3,0,3)\big)$ dimana p bilangan bulat positif. Jadi, dapat disimpulkan bahwa $tes\left(p\theta\big(8,3,(3,0,3)\big)\right) \le 3p+1$.

Oleh karena $tes\left(p\theta\big(8,3,(3,0,3)\big)\right) \ge 3p+1$ dan $tes\left(p\theta\big(8,3,(3,0,3)\big)\right) \le 3p+1$, maka terbukti bahwa nilai total ketakteraturan sisi dari graf $p\theta\big(8,3,(3,0,3)\big)$ dimana p bilangan bulat positif adalah $tes\left(p\theta\big(8,3,(3,0,3)\big)\right) = 3p+1$ ■

KESIMPULAN

1. Nilai total ketakteraturan titik dari *p*-*copy* graf theta tak seragam adalah $tvs\left(p\theta\big(8,3,(3,0,3)\big)\right) = 2p+1$ untuk p merupakan bilangan bulat positif.
2. Nilai total ketakteraturan sisi dari *p*-*copy* graf theta tak seragam adalah $tes\left(p\theta\big(8,3,(3,0,3)\big)\right) = 3p+1$ untuk p merupakan bilangan bulat positif.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Munir, R. "*MatematikaDiskrit*". RevisiKelima, halaman 356-358, 379-380, 386-387. Informatika Bandung, Bandung. 2012.

[2] Bača, M., Jendrol J., Miller, M., dan Ryan, J. "On Irregular Total Labellings*," DiscreteMath*.Vol. 307, halaman 1378-1388. 2007.Munir, R. "*MatematikaDiskrit*". RevisiKelima, halaman 356-358, 379-380, 386-387. Informatika Bandung, Bandung. 2012.

[3] Rajasingh, I., S. Teresa Arockiamary. "Total Edge Irregularity Strength Of Series Parallel Graphs". *International Journal of Pure and Applied Mathematics.*Volume 99 No. 1.Halaman 11-21. 2015.

[4] Marzuki, Corry Corazon, dan Milla Lestari. "Nilai Total Ketakteraturan Titik dari m-Copy Graf Lingkaran". *JurnalSainsMatematikadanStatistika*.Vol. 4 No. 1. Halaman 73-79. 2018.

[5] Ahmad, Ali, Ashok Gupta, dan Rinovia Simanjuntak. "Computing The Edge Irregularity Strengths Of Chain Graphs And The Join Of Two Graphs". *Electronic Journal of Graph Theory and Applications.* Vol. 6 No. 1. Halaman 201-207. 2018.

[6] Nurdin, Salman, A. N. M., Gaos, N. N., danBaskoro, E. T. "On The Total Vertex Irregular Strength of a Disjoint Union of t Copies of a Path," *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing.* Vol. 71, halaman 227-233. 2009.

[7] C. M. Corazon, Riyanti. R. "Nilai Total KetakteraturanTitikPada Graf Hasil Kali Comb P_m Dan C_5 Dengan m Bilangan Ganjil".*JurnalSainsMatematikadanStatistika.*Vol. 2 No. 2.Halaman 39-47. 2016.

[8] J. Ivanco, S. Jendrol. "Total Edge Irregularity Strength of Trees".*Discussions Mathematicae Graph Theory.*Halaman 449-456. 2006.

[9] Slamin, dkk. "NilaiKetakteraturan Total Sisi Dari Graf Siput".*Kadikma*.Vol. 6 No. 1.Halaman 105-114. 2015.