Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol 5, No 1, Januari 2019
ISSN 2460-4542, e-ISSN 2615-8663

Modifikasi Metode Weerakoon-Fernando dengan Orde Konvergensi Empat

Badrun Sholeh[1], Wartono[2]
[1,2]Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl.HR. Soebrantas No. 155 KM 15 Simpang Baru, Pekanbaru, 28293
[2]e-mail : wartono@uin-suska.ac.id

Abstrak

Metode Weerakoon-Fernando merupakan metode iterasi berorde tiga yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan nonlinier. Pada makalah ini, penulis memodifikasi metode Weerakoon-Fernando dengan menggunakanselisih terbagi, danmenambahkan bentuk iterasi Newton pada langkah ketiga. Selanjutnya, $f(z_n)$pada langkah ketiga direduksi dengan menggunakan deret Taylor orde dua. Berdasarkan hasil kajian diperoleh metode iterasi baru beroder konvergensi empat yang melibatkan tiga evaluasi fungsi dengan indeks efisiensinya sebesar 1,5874. Simulasi numerik dilakukan untuk membandingkan performametode iterasi baru dengan metode Newton, Weerakoon-Fernando, varian Chebyshev-Halley, dan varian Potra-Ptak. Performa yang diuji dari metode iterasi yang dibandingkan meliputi jumlah iterasi, orde konvergensi yang dihitung secara komputasi (COC), dan nilai fungsi. Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa performa metode iterasi baru lebih baik dari metode iterasi lainnya.

Katakunci : deret Taylor, metode Weerakoon-Fernando,order konvergensi, persamaan nonlinier, selisih terbagi.

Abstract

Weerakoon-Fernando's method is a third-order iterative method used to solve nonlinear equation. In this paper, the author modified Weerakoon-Fernando's method by using the divideddifference, and added Newton's iterative method in third step. Furthermore, $f(z_n)$ in the third step is reduced using second orderTaylor series. Based on the research result, we obtained a new fourth-order iterative method requiring three evaluation of functions with efficiency index equal to 1.5874. Numerical simulation is carried out againts to compare the performance of the new iterative method with Newton's method, Weeerakoon-Fernando's method, variant of Chebyshev-Halley's method, and varint of Potra-Ptak's method. Examined performances of comparing iteraive method are a number of iteration, computational order of convergence, and absolut value of function. Simulation result shows that the performance of the new iterative method better than any other methods.

Keywords : *Taylor series, Weerakoon-Fernando's method, nonlinear equation,devide difference*.

Pendahuluan

Permasalahan matematika yang sering dihadapi biasanya dalam bentuk penyelesaian persamaan nonlinier yang rumit sehingga sulit untuk memperoleh solusi penyelesaian eksak yang sejatinya. Oleh sebab itu, solusi yang sering digunakan untuk menyelesaikannya dengan metode numerik yaitu metode untuk mencari akar-akar dari persamaan nonlinier.

Penyelesaian dapat dilakukan dengan perhitungan komputasi yang bersifat berulang atau metode iterasi. Teknik penyelesaian persamaan nonlinear yang dilakukan dengan cara demikian biasa disebut metode iterasi.

Metode iterasi yang sering digunakan adalah metode Newton dengan bentuk

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{1}$$

Metode Newton memiliki konvergensi kuadratik dan melibatkan dua evaluasi fungsi dengan indeks efisiensi sebesar 1,4142. Berbagai cara dilakukan oleh peneliti dalam upaya untuk meningkatkan order konvergensi, sebagaimana yang telah dilakukan oleh Ozban [1], Kanwar [2], Jisheng [3], dan Weerakoon dan Fernando [4].

Salah satu metode varian Newton yang sudah dikembangkan yaitu metode Weerakoon dan Fernando [4] yang memiliki orde konvergensi tiga dan melibatkan tiga evaluasi fungsi dengan indeks efisiensi $3^{1/3} \approx 1,4422$ yang ditulis

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n) + f'(y_n)}, \tag{2}$$

dengan y_n diberikan oleh (1).

Pada artikel ini, penulis akan mengembangkan metode iterasi pada Persamaan (2) dengan menambahkan langkah ketiga dalam bentuk

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)}. \tag{3}$$

dengan z_n diberikan oleh (1).

Untuk menghindari penggunan turunan $f'(y_n)$, maka penulis akan mereduksi $f'(y_n)$ dengan menggunakan metode selisih terbagi, sebagaimana dilakukan oleh Khattri [5], dan Khattri dan Argyros [6].

Selanjutnya, $f(z_n)$ pada (3) direduksi menggunakan ekspansi deret Taylor tanpa turunan kedua sebagaimana dilakukan oleh Muhaijir dan Nanda [7], dan Liudan Wang [8].

Berdasarkan uraian diatas, penulis akan memodifikasi (2) dan mereduksi $f'(y_n)$ menggunakan ekspansi deret Taylor orde dua, sedangkan reduksi turunan kedua pada deret Taylor dilakukan dengan menggunakan salah satu bentuk persamaan Hiperbola.

Metodologi Penelitian

Pada bagian ini, penulis menggunakan beberapa definisi penting yang akan dilibatkan pada proses mengkontruksi metode iterasi, menentukan orde konvergensi, baik menggunakan ekspansi deret Taylor maupun komputasi (COC) dan simulasi numerik. Adapun definisi-definisi yang digunakan adalah sebagai berikut:

Definisi 1. Misalkan $f(x)$ merupakan sebuah fungsi dengan akar persamaan α dan $\{x_n\}$ adalah sebuah barisan bilangan real untuk $n \geq 0$ yang konvergen ke α. Jika terdapat $c \neq 0$ dan $p \geq 1$ sedemikian hingga,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = c \tag{4}$$

atau

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = c \tag{5}$$

maka p adalah orde konvergensi dari deret $\{x_n\}$, dan c adalah konstanta galat asimtotik (*asymptotic error constant*). Untuk $p = 1, 2, 3, \cdots$ maka deret konvergen linear, kuadratik, kubik dan seterusnya.

Definisi 2. Misalkan $e_n = x_n - \alpha$ adalah galat pada iterasi ke $-n$, maka dapat didefinisikan:

$$e_{n+1} = ce_n^p + O(e_n^{p+1}) \tag{6}$$

sebagai persamaan kesalahan dari suatu metode iterasi, dengan p adalah orde konvergensi dan c adalah konstanta asimtotik.

Definisi 3. Misalkan r adalah jumlah dari evaluasi pada fungsi atau salah satu dari derivatifnya, maka efisiensi dari suatu metode diukur dengan indeks efisiensi yang didefinisikan oleh:

$$IE = p^{1/r} \tag{7}$$

Definisi 4. Misalkan α adalah akar persamaan fungsi $f(x)$ dan x_{n-1}, x_n dan x_{n+1} adalah akar-akar pendekatan pada iterasi ke $n-1, n$ dan $n+1$ yang dekat dengan α, maka orde konvergensi komputasi dihitung menggunakan formulasi

$$\rho \approx \frac{\ln\left|(x_{n+1}-\alpha)/(x_n-\alpha)\right|}{\ln\left|(x_n-\alpha)/(x_{n-1}-\alpha)\right|} \tag{8}$$

Hasil dan Pembahasan

3.1 Metode Iterasi Dua Langkah

Berdasarkan Persamaan (2) dan (3), didefinisikan kembali Metode Weerakoon-Fernando [4] dengan bentuk sebagi berikut :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n)+f'(y_n)}, \tag{9}$$

dengan

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{10}$$

Untuk menghindari penggunaan turunan pertama $f'(y_n)$, maka turunan pertama $f(y_n)$ pada (9) diaproksimasi menggunakan metode selisih terbagi dengan bentuk

$$f'(y_n) = \frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n - x_n}, \tag{11}$$

Oleh karena itu dengan mensubsitusikan (11) ke (9), maka diperoleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)^2}{f'(x_n)(2f(x_n)-f(y_n))}. \tag{12}$$

Selanjutnya, Persamaan (9) dimodifikasi dengan menambahkan langkah ketiga dalam bentuk

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)}. \tag{13}$$

dengan z_n diberikan oleh (9).

Secara lengkap, metode iterasi tiga langkah tiga langkah diberikan sebagai berikut:

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{14.a}$$

$$z_n = x_n - \frac{2f(x_n)^2}{f'(x_n)(2f(x_n)-f(y_n))}, \tag{14.b}$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)}. \tag{14.c}$$

Metode iterasi (14.a) – (14.c) melibatkan empat evaluasi fungsi yaitu $f(x_n)$, $f'(x_n)$, $f(y_n)$ dan $f(z_n)$.

Untuk meningkatkan indeks efisiensi, maka salah satu cara yang dilakukan adalah mengurangi jumlah evaluasi fungsi. Oleh karena itu, untuk mengurangi jumlah evaluasi fungsi, maka $f(z_n)$ ditaksir dengan menggunakan pendekatan Deret Taylor dipersekitaran x_n (Cordero, dkk [10]) dengan bentuk persamaan, yaitu

$$f(z_n) \approx f(x_n) + f'(x_n)(z_n - x_n) + \frac{f''(x_n)}{2!}(z_n - x_n)^2 . \tag{15}$$

Kemudian subtitusikan Persamaan (15) ke Persamaan (14.c) sehingga diperoleh

$$f(z_n) \approx \frac{f(x_n)\left(2f'(x_n)^2 f(x_n) f(y_n) + f'(x_n)^2 f(y_n)^2 + 2f''(x_n) f(x_n)^3\right)}{f'(x_n)^2\left(2f(x_n) - f(y_n)\right)^2} . \tag{16}$$

Persamaan (16) masih memuat turunan kedua dari $f(x_n)$. Selanjutnyauntuk menghindari penggunaan turunan kedua, $f''(x_n)$ direduksi menggunakan persamaan Hiperbola dalam bentuk

$$ay + bxy + cx + d = 0 . \tag{17}$$

Turunan pertama dan kedua (17) diberikan masing-masing oleh

$$ay' + b(y + xy') + c = 0 , \tag{18}$$

$$ay'' + b(y' + (y' + xy'')) = 0 . \tag{19}$$

Bentuk turunan keduan $f''(x_n)$ ditentukan dengan menyelesaikan persamaan (17) dan (18) secara serentak untuk $x = x_n$ dan $x = y_n$.

Misalkan $y(x_n) = f(x_n)$, $y'(x_n) = f'(x_n)$ dan$y(y_n) = f(y_n)$, maka dengan mensubstitusikan kembali nilai-nilai a dan $b$ke (19), diperoleh bentuk taksiran $f''(x_n)$ dalam bentuk:

$$f''(x_n) = \frac{2f'(x_n)^2 f(y_n)}{f(x_n)(f(x_n) - f(y_n))} . \tag{20}$$

Substitusikan (20) ke (16) diperoleh

$$f(z_n) = \frac{f(x_n) f(y_n)\left(2f(x_n)^2 + 3f(x_n) f(y_n) - f(y_n)^2\right)}{\left(f(x_n) - f(y_n)\right)\left(2f(x_n) - f(y_n)\right)^2} . \tag{21}$$

Oleh karena itu, secara lengkap modifikasi metode iterasi Weerakoon-Fernando diberikan oleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{4f(x_n)^2\left(f(x_n) - f(y_n)\right) + f(y_n)^2\left(5f(x_n) - f(y_n)\right)}{\left(f(x_n) - f(y_n)\right)\left(2f(x_n) - f(y_n)\right)^2} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} , \tag{22}$$

dengan y_n diberikan oleh (10).

Persamaan (18) merupakan modifikasi metode Weerakoon-Fernando dengan menggunakan deret Taylor tanpa turunan kedua yang melibatkan tiga evaluasi fungsi.

3.2 Analisa Konvergensi

Berdasarkan metode iterasi baru yang diberikan pada Persamaan (22), maka ditentukan orde konvergensi dengan menggunakan pendekatan Deret Taylor yang diberikan pada teorema sebagai berikut.

Teorema 1: Asumsikan $\alpha \in D$ adalah akar dari fungsi $f(x)$ yang terdiferensial $f : D \to R$ pada interval terbuka$D$. Jika x_0 cukup dekat ke α, maka metode iterasi pada Persamaan (18) memiliki orde konvergensi empat dengan persamaan galat:

$$e_{n+1} = \left(-c_2 c_3 + \frac{9}{4} c_2^3\right) e_n^4 + O(e_n^5) , \tag{23}$$

dengan

$$c_j = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j!\, f'(\alpha)} .$$

Bukti : Misalkanαadalah akar dari fungsi f (x). Asumsikan$f(\alpha)$ = 0danx_n = α + e_n.Selanjutnya ekspansifungsi$f(x_n)$ dan$f'(x_n)$ disekitar α dengan menggunakan deret Taylor, masing-masing diberikan oleh:

$$f(x_n) = f'(\alpha)\left(e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + c_4 e_n^4 + O(e_n^5)\right), \tag{24}$$

dan

$$f'(x_n) = f'(\alpha)\left(1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + 4c_4 e_n^3 + 5c_5 e_n^4 + O(e_n^5)\right). \tag{25}$$

Kemudian Persamaan (24) dibagi dengan Persamaan (25) dan diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - c_2 e_n^2 + \left(-2c_3 + 2c_2^2\right) e_n^3 + \cdots + O(e_n^5). \tag{26}$$

Substitusikan (26) ke (1) dengan $x_n = \alpha + e_n$ sehingga diperoleh

$$y_n = \alpha + c_2 e_n^2 - \left(-2c_3 + 2c_2^2\right) e_n^3 + \cdots + O(e_n^5). \tag{27}$$

Selanjutnya, berdasarkan ekspansi Deret Taylor dipersekitaran α, makadiperoleh $f(y_n)$ dengang bentuk sebagai berikut:

$$f(y_n) = f'(\alpha)\left(c_2 e_n^2 + (2c_3 - 2c_2^2) e_n^3 + \cdots + O(e_n^5)\right). \tag{28}$$

kemudian mengoperasikan Persamaan (23) dan Persamaan (24) diperoleh:

$$f(x_n) - f(y_n) = f'(\alpha)\left(e_n + (2c_2^3 - c_2) e_n^3 + \cdots + O(e_n^5)\right), \tag{29}$$

dan

$$\left(2f(x_n) - f(y_n)\right)^2 = f'(\alpha)^2\left(4e_n^2 + 4c_2 e_n^3 + c_2^3 e_n^4 + O(e_n^5)\right). \tag{30}$$

kalikan Persamaan (25) dengan Persamaan (26), sehingga diperoleh

$$\left(2f(x_n) - f(y_n)\right)^2 \left(f(x_n) - f(y_n)\right) = f'(\alpha)^3\left(4e_n^3 + c_2 e_n^4 + O(e_n^5)\right) \tag{31}$$

Misalkan

$$A = 4f(x_n)^2\left(f(x_n) - f(y_n)\right) + f(y_n)^2\left(5f(x_n) - f(y_n)\right) \tag{32}$$

maka diperoleh

$$A = f'(\alpha)^3\left(4e_n^3 + 8c_2 e_n^4 + O(e_n^5)\right). \tag{33}$$

Setelah itu, bagi Persamaan (28) dengan Persamaan (27), diperoleh

$$\frac{A}{\left(2f(x_n) - f(y_n)\right)^2\left(f(x_n) - f(y_n)\right)}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = 1 + c_2 e_n + \left(2c_3 - c_2^2\right) e_n^2 + \left(-\frac{5}{4}c_2^3 - 2c_2 c_3 + 3c_4\right) e_n^3 + \left(-2c_2 c_4 + 4c_5 - \frac{21}{2}c_3 c_2^2 + \frac{17}{2}c_2^4\right) e_n^4 + O(e_n^5). \tag{34}$$

Subsitusikan (26) dan (34) ke (22), maka diperoleh x_{n+1} sebagai berikut:

$$x_{n+1} = x_n - \left(e_n + \left(c_2 c_3 - \frac{9}{4}c_2^3\right) e_n^4 + O(e_n^5)\right). \tag{35}$$

Oleh karena $x_{n+1} = e_{n+1} + \alpha$ dan $x_n = e_n + \alpha$ maka Persamaan (30) diperoleh:

$$e_{n+1} = \left(-c_2 c_3 + \frac{9}{4}c_2^3\right) e_n^4 + O(e_n^5). \tag{36}$$

Persamaan (36) merupakan persamaan galat dari modifikasi Metode Weerakoon-Fernando dengan menggunakan Deret Taylor tanpa turunan kedua yang menghasilkan orde konvergensi empat dan melibatkan tiga evaluasi fungsi, sehingga memiliki indeks efisiensi $4^{1/3} \approx 1,5874$.

3.3 Simulasi Numerik

Pada sub-bagian ini, diberikan simulasi numerik dengan menggunakan empat fungsi real untuk membandingkan performa metode iterasi yang diusulkan pada persamaan (22) yang disebut Metode Modifikasi Weerakoon-Fernando (MMWF) dengan metode iterasi lainnya, seperti: Metode Newton (MN), metode Weerakoon-Fernando (MWF), Metode varian Chebyshev-Halley (MCH), Metode varian Potra-Ptak(MVPP). Performa yang akan dibandingkan pada metode iterasi tersebut meliputi: jumlah iterasi, orde konvergensi yang dihitung secara komputasi (COC), dan nilai fungsi.

Simulasi dilakukan pada beberapa fungsi persamaan nonlinear dengan mengambil tebakan awalx_0 sedekat mungkin dengan akar persamaan α menggunakan Maple 13. Adapun fungsi persamaan nonlinear yang digunakan dengan ketelitian digit 850 desimal, yaitu :

$$f_1(x) = xe^{x^2-2x} - 0,1, \alpha = 0,126813177320077,$$

$$f_2(x) = (x+2)e^x - 1, \alpha = -0,442854401002388,$$

$$f_3(x) = x^3 + x^2 - 2, \ \alpha = 1,0000000000000000,$$

$$f_4(x) = \cos x - x, \ \alpha = 0,739085133215160,$$

$$f_5(x) = \ln x + \sqrt{x} - 5, \ \alpha = 8,309432694241571.$$

Selanjutnya pada Tabel 1 dan Tabel 2 masing-masing ditunjukkan perbandingan jumlah iterasi dan *COC* (*Computational Order of Convergence*) antara metode iterasi pada Persamaan (22) dengan metode iterasi lainnya.

Tabel 1 Perbandingan Jumlah Iterasi

$f(x)$	x_0	MN	MWF	MVCH	MVPP	MMWF
$f_1(x)$	0,0	8	5	5	5	4
	0,3	8	5	5	6	4
$f_2(x)$	−0,3	7	5	5	5	4
	0,0	8	5	5	5	4
$f_3(x)$	0,9	7	5	5	5	4
	1,5	8	5	5	5	4
$f_4(x)$	0,5	7	4	5	5	4
	1,9	7	5	5	5	4
$f_5(x)$	7,0	5	3	3	3	3
	9,9	5	3	3	3	3

Tabel 2Perbandingan *COC* (*Computational Order of Convergence*)

$f(x)$	x_0	MN	MWF	MVCH	MVPP	MMWF
$f_1(x)$	0,0	2,0000	3,0000	3,0000	3,0000	4,0000
	0,3	2,0000	3,0000	3,0000	3,0000	4,0000
$f_2(x)$	−0,3	2,0000	3,0000	3,0000	3,0000	4,0000
	0,0	2,0000	3,0000	3,0000	3,0000	4,0000
$f_3(x)$	0,9	2,0000	3,0000	3,0000	3,0000	4,0000
	1,5	2,0000	3,0000	3,0000	3,0000	4,0000
$f_4(x)$	0,5	2,0000	3,0000	3,0000	3,0000	4,0000
	1,9	2,0000	3,0000	3,0000	3,0000	4,0000
$f_5(x)$	7,0	2,0000	3,0000	3,0000	3,0000	4,0000
	9,9	2,0000	2,9999	2,9999	2,9999	4,0000

Berdasarkan Tabel 1dapat dilihat bahwa jumlah iterasi dari metode yang diusulkan pada persamaan (14) hampir seluruhnya lebih kecil dibandingkan dengan metode iterasi lainnya, sedangkan Tabel 2 mempertegas hasil order konvergensi modifikasi Weerakoon-Fernando yang diperoleh secara analitik, yaitu sebesar empat.

Selanjutnya, selain jumlah iterasi dan COC, ketelitian juga dapat digunakan sebagai ukuran performa metode iterasi. Tabel 3 berikut memperlihatkan ketelitian metode iterasi untuk duabelas evaluasi fungsi.

Tabel 3 Perbandingan nilai fungsi dengan TNFE = 12

$f(x)$	x_0	MN	MWF	MVCH	MPP	MMWF
$f_1(x)$	0,0	3,3484(e–43)	2,4063(e–49)	1,4517(e–57)	6,9156(e–45)	6,5683(e–158)
	0,3	4,0013(e–09)	1,2191(e–33)	1,2241(e–46)	1,2866(e–23)	9,7032(e–115)
$f_2(x)$	−0,3	1,2803(e–65)	1,4270(e–78)	1,2002(e–85)	3,6759(e–72)	7,2729(e–245)
	0,0	1,5000(e–36)	2,3802(e–42)	1,8451(e–48)	2,1220(e–37)	1,6502(e–131)
$f_3(x)$	0,9	1,3688(e–68)	2,7452(e–88)	2,6040(e–88)	2,5940(e–73)	5,1977(e–248)
	1,5	1,5217(e–32)	3,1849(e–39)	2,8023(e–42)	4,1309(e–33)	2,0425(e–113)
$f_4(x)$	0,5	2,6328(e–78)	8,3630 (e–114)	8,5071(e–95)	1,7890(e–85)	1,0032(e–265)
	1,9	2,3734(e–76)	1,6018(e–55)	4,2287(e–56)	9,8573(e–84)	9,3882(e–202)
$f_5(x)$	7,0	4,5588(e–79)	8,5462 (e–90)	3,7696(e–109)	1,6286(e–88)	5,4281(e–337)
	9,9	5,2037(e–76)	3,1581(e–85)	2,0123(e–106)	1,0312(e–83)	2,0531(e–327)

Tabel 3 menujukkan bahwa modifikasi metode Weerakoon-Fernando memiliki ketelitian lebih baik dibandingkan dengan metode iterasi lainnya.

Kesimpulan

Pada artikel ini, metode iterasi dibentuk dengan menggunakan pendekatan selisih terbagi dan ekspansi Deret Taylor dan memiliki order konvegensi empat yang melibatkan tiga evaluasi fungsi sehingga memiliki indeks efisiensi sebesar $4^{\frac{1}{3}} \approx 1{,}5874$.

Hasil simulasi numerik memberikan informasi bahwa secara umum, performa metode iterasi baru lebih baik dibandingkan dengan Metode Newton, Weerakoon-Fernando, Varian Chebyshev-Halley, dan Potra-Ptak.

Daftar Pustaka

[1] Ozban, A.Y., Some New Variants of Newton’s Method,*Applied Mathematic Letters*,13, 2004 : 87 – 93.

[2] Kanwar, V. A., Family of Third Orde Multipoint Methods for Solving Nonlinear Equations,*Applied Mathematics and Computation*, 176, 2006: 409 – 413.

[3] Jisheng,K., Yitian, L., dan Xiuhua, W., Third-Order Modification of Newton’s Method,*Journal Computational and Applied Mathematics,* 205, 2007 : 1 – 5.

[4] Weerakoon, S dan Fernando, T. G. I., A Variant of Newton’s with Accelerated Third-Order Convergence,*Applied Mathematics Letters,* 13, 2000: 87–93.

[5] Khattri, S. K., Quadrature Based Optimal Iterative Methods with Applications in High-Precision Computing, *Application in High Precision Computing*, 5, 2012, 592–601.

[6] Khattri, S. K. dan Argyros, I. K., How to Develop Fourth and Seventh Order Iterative Methods. *Novi Sad J. Math,* 48, 2010 : 61–67.

[7] Muhaijir, M. M dan Nanda, L. L., Metode Iterasi Tiga Langkah Bebas Turunan Orde Konvergensi Delapan untuk Menyelesaikan Persamaan Nonlinear. *SNTIKI*. 2017.8 : 226 – 227.

[8] Liu, L dan Wang, X., Eighth-Order Methods with High Efficiency Index for Solving Nonlinear Equations,*Applied Mathematics and Computation,* 215, 2010, 3449–3454.

[9] Nizam, M. M., Modifikasi Metode Newton-Steffensen Bebas Turunan. *SNTIKI*. 2015. 7, hal. 391.

[10] Cordero, A., House, J. L., Martinez, E., dan Torregrosa,J. R., New Modification of Potra-Ptak Method with Optimal Fourth and Eighth Orders of Convergence,*Journal of Computational and Applied Mathematics,* 234, 2010,2969–2976.

[11]Xianhuan, Y., dan Xiubin, X., A New Family of Chebyshev-Halley Like Methods Free from Second Derivative, *Fixed Point Theory,* 1, 2012,319–325.

[12] Xiaojian, Z. Modified Chebyshev-Halley Methods Free from Second Derivative,*Applied Mathematics and Computation*, 203, 2008,824–827.

[13] Chun, C., Some Second-Derevative-Free Variant of Chebyshev-Halley Methods,*Applied Mathematics and Computation*, 191, 2007a, 410–414.

[14] Chun, C., Some Variants of Chebyshev-Halley Methods Free from Second Derivative. *Applied Mathematics and Computation*,191, 2007b,193–198.