Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol 5, No 1, Januari 2019
ISSN 2460-4542, e-ISSN 2615-8663

NILAI TOTAL KETAKTERATURAN SISI DARI m-COPY GRAF LINTASAN

Corry Corazon Marzuki
Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: corry@uin-suska.ac.id

ABSTRAK

Suatu pelabelan total tak teratur sisi dari graf $G(V,E)$ adalah pelabelan total sedemikian sehingga bobot setiap sisi berbeda. Bobot sebuah sisi uv dengan pelabelan λ adalah jumlah dari label titik u, label titik v dan label sisi uv. Nilai total ketakteraturan sisi dari graf *G*, yang dinotasikan dengan *tes*(*G*) adalah label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf *G* dengan pelabelan total tak teratur sisi. Beberapa kelas graf telah didapatkan nilai total ketakteraturan sisinya. Pada makalah ini diperoleh nilai total ketakteraturan sisi dari m-copy graf lintasan P_n.

Katakunci: *pelabelan total tak teratur sisi, m-copy graf lintasan, nilai total ketakteraturan sisi.*

ABSTRACT

An edge irregular total labeling in graf $G(V,E)$ is a total labeling such that the weights of every edges is distinct. The weight of an edge uv under the labeling λ is sum of label of vertex u, label of veretx v and label of edge uv. Total edge irregularity strength of graph G, denoted by tes(G), is a minimum largest label which is used to label graph G with edge irregular total labeling. Some of graphs have been found their total edge irregularity strength. In this paper we will found total edge irregularity strength of m-copies of path P_n.

Katakunci: *edge irregular total labeling, m-copies of path, total edge irregularity strength.*

Pendahuluan

Pelabelan graf mempunyai banyak aplikasi yang tersebar dalam berbagai bidang, seperti pada bidang komunikasi, penyimpanan data, pemancar frekuensi radio, jaringan komputer, kristalografi, teori koding, astrologi, skema pembagian rahasia (*secret sharing schema*), dan *radar pulse code*. Pada tahun 2011, Wallis telah menerapkan pelabelan graf pada penentuan alamat dari jaringan komunikasi. Banyaknya aplikasi dari pelabelan graf ini menjadi salah satu penyebab pelabelan graf menjadi suatu topik yang banyak mendapat perhatian.

Misalkan $G=(V,E)$ adalah suatu graf sederhana. Pelabelan graf secara umum didefinisikan sebagai suatu fungsi dari himpunan bagian unsur-unsur dari G ke suatu himpunan bilangan, biasanya himpunan bilangan bulat positif atau non-negatif, yang memenuhi syarat tertentu. Semua hasil penelitian yang sudah diperoleh mengenai pelabelan graf telah disajikan dalam sebuah buku yang berjudul ”*A Dynamic Survey of Graph Labeling*” oleh Gallian (2016).

Ditinjau dari unsur graf yang dipetakan, pelabelan graf dibagi menjadi beberapa jenis : pelabelan titik, jika titik-titik graf yang menjadi domain; pelabelan sisi, jika sisi-sisi graf yang menjadi domain; dan pelabelan total, jika yang diberi label adalah titik dan sisi graf. Berdasarkan bobot unsur graf, pelabelan dapat dibedakan menjadi beberapa jenis, antara lain pelabelan anggun (*graceful labeling*), pelabelan harmonis, pelabelan ajaib (*magic labeling*), pelabelan anti ajaib (*antimagic labeling*), dan pelabelan tak teratur (*irregular labeling*).

Topik penelitian ini adalah pelabelan tak teratur, khususnya pelabelan total tak teratur sisi pada suatu graf. Pelabelan tak teratur pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand dkk. pada tahun 1986. Namun, makalah mereka yang berjudul “*Irregular Network*” baru terbit pada tahun 1988.

Pada tahun 2007, Baca dkk. memperkenalkan pelabelan tak teratur lainnya yang didasarkan pada pelabelan total, yaitu pelabelan total tak teratur sisi dan pelabelan total tak teratur titik. Misalkan $G = (V, E)$ adalah suatu graf, fungsi $f: V \cup E \to \{1,2,3, \dots, k\}$ disebut pelabelan-k total tak teratur sisi (*edge irregular total k-labeling*) pada G, jika setiap dua sisi yang berbeda di E mempunyai bobot yang berbeda. Bobot sisi xy di E terhadap fungsi f adalah $wt(xy) = f(x) + f(xy) + f(y)$. Bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga G mempunyai suatu pelabelan-k total tak teratur sisi dinamakan nilai total ketakteraturan sisi (*total edge irregularity strength*) dari G, dilambangkan dengan $tes(G)$.

Penentuan nilai total ketakteraturan sisi dari semua graf belum dapat dilakukan secara lengkap. Sampai saat ini hanya beberapa kelas graf yang sudah diketahui nilai total ketakteraturan sisinya. Baca dkk. (2007) memperoleh nilai total ketakteraturan sisi dari graf lingkaran, graf lintasan, graf bintang, graf lengkap, graf roda, dan graf *frienship*. Kemudian pada tahun 2008, Nurdin dkk. mendapatkan nilai total ketakteraturan sisi dari hasil kali korona graf lintasan dengan beberapa graf, diantaranya graf lintasan, graf lingkaran, graf bintang, dan graf roda.

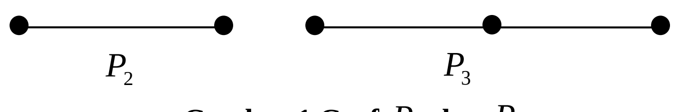
Penelitian ini terus berkembang setiap tahunnya sampai sekarang. Diantaranya penelitian M.K. Siddiqui dkk. pada tahun 2013 mengenai nilai total ketakteraturan sisi dari gabungan saling lepas dari beberapa graf matahari serta gabungan saling lepas dari beberapa graf helm. Penemuannya itu ditulis pada dua makalah yang berbeda. Pada tahun yang sama, Diari Indriati dkk. memperoleh nilai total ketakteraturan sisi dari generalisasi graf helm. Selanjutnya pada tahun 2015, Indra Rajasingh dkk. mendapatkan nilai total ketakteraturan sisi dari graf seri-paralel.

Graf lintasan dengan n titik dinotasikan dengan P_n adalah graf yang terdiri dari dua titik berderajat satu, yang disebut ujung dari lintasan dan $n-2$ titik berderajat dua, serta memiliki $n-1$ sisi. Jika dilakukan penggandaan saling lepas pada graf P_n maka terbentuklah graf mP_n.

Oleh karena masih banyak kelas graf yang belum diperoleh nilai total ketakteraturan sisinya, penulis tertarik untuk berkontribusi dalam menentukan nilai total ketakteraturan sisi dari kelas-kelas graf yang lain. Pada tahun 2017, penulis terlibat dalam penelitian yang membahas tentang nilai total ketakteraturan sisi dari m-*copy* graf $P_2, P_3, P_4,$ dan P_5. Namun, penelitian ini belum dipublikasikan. Pada penelitian tersebut diperoleh hasil $tes(mP_2) = \left\lceil\frac{m+2}{3}\right\rceil$, $tes(mP_3) = \left\lceil\frac{2m+2}{3}\right\rceil$, $tes(mP_4) = \left\lceil\frac{3m+2}{3}\right\rceil$, dan $tes(mP_5) = \left\lceil\frac{4m+2}{3}\right\rceil$. Hasil penelitian tersebut dituliskan dalam beberapa teorema yang sudah dibuktikan kebenarannya. Dari hasil penelitian tersebut, penulis semakin tertarik untuk melanjutkannya sehingga diperoleh $tes(mP_n)$ secara umum untuk $n \geq 6$.

Landasan Teori dan Metodologi Penelitian

Graf lintasan dengan n titik dinotasikan dengan P_n. Graf lintasan terdiri dari dua titik berderajat satu, yang disebut ujung dari lintasan dan $n-2$ titik berderajat dua, serta memiliki $n-1$ sisi. Dengan kata lain, graf lintasan $P_n = (V, E)$ dimana $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan $E = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, \dots, v_{n-1}v_n\}$. Contoh dari graf lintasan dapat dilihat pada Gambar 2.4.

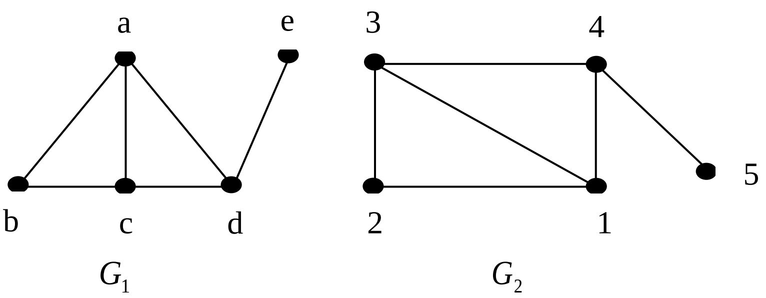


Gambar 1 Graf P_2 dan P_3

Misalkan kepada dua orang mahasiswa diminta menggambarkan sebuah graf dengan 5 titik, dimana 3 titik berderajat 3, 1 titik berderajat 2 dan 1 titik berderajat 1. Graf yang digambar bisa beragam bentuknya, dua diantaranya ditunjukkan pada Gambar 1. Meskipun kedua graf terlihat berbeda bentuk dan penamaan titiknya, namun sebenarnya kedua graf tersebut merupakan graf yang sama. Dua buah graf yang sama tetapi secara bentuk berbeda dikatakan graf yang saling isomorfik.

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol 5, No 1, Januari 2019
ISSN 2460-4542, e-ISSN 2615-8663

Definisi 1 (Rinaldi Munir, 2010) Dua buah graf G_1 dan G_2 dikatakan isomorfik $(G_1 \cong G_2)$, jika terdapat korespondensi satu-satu antara simpul-simpul keduanya dan antara sisi-sisi keduanya, sedemikian sehingga jika sisi e_i bersisian dengan simpul u dan v di G_1 maka sisi e yang berkoresponden di G_2 juga harus bersisian dengan simpul u' dan v' di G_2.

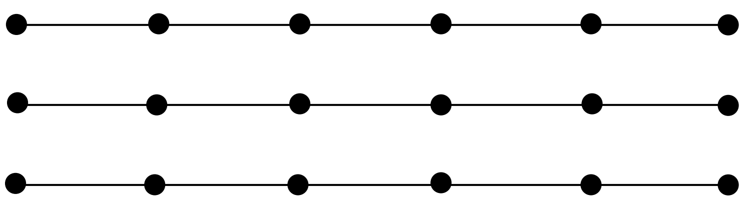


Gambar 2 Dua Buah Graf yang Isomorfik $(G_1 \cong G_2)$

Banyak cara yang dapat dilakukan untuk memperoleh graf baru, salah satunya adalah dengan melakukan suatu operasi terhadap dua buah graf. Terdapat beberapa jenis operasi pada graf diantaranya: operasi *join* $(+)$, gabungan $(\cup)$, kartesian $(\times)$, korona (Θ) , *comb* (⊳) dan *copy*.

Definisi 2 (Chartrand dan Oellermann, 1993 dikutip oleh Handayani, 2007) Gabungan dari dua buah graf G_1 dan G_2 yang dinotasikan dengan $G_1 \cup G_2$ adalah graf yang mempunyai $V(G_1 \cup G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan $E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2)$.

Jika $G_1 \cong G_2 \cong G$ dengan $V(G_1) \cap V(G_2) = \phi$ maka $G_1 \cup G_2$ dinotasikan dengan $2G$ yang dinamakan dengan 2-*copy* graf G. Secara umum, jika $G_1, G_2, \ldots, G_m$ adalah m graf yang isomorfik dengan G dan $V(G_i) \cap V(G_j) = \phi$ untuk setiap $i \neq j$, maka $G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_m$ dinotasikan dengan mG yang dinamakan dengan m-*copy* graf G. Contoh dari graf *copy* dapat dilihat pada Gambar 2.7 berikut.



Gambar 3 Tiga *Copy* Graf P_6

Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh matematikawan Sedlacek pada Tahun 1963. Pelabelan graf merupakan pemberian label yang berupa bilangan bulat positif pada elemen-elemen dalam graf berupa sisi atau titik.

Pelabelan pada suatu graf adalah pemetaan yang memasangkan unsur-unsur graf (titik/sisi) dengan bilangan bulat positif. Jika domain pemetaan adalah titik, maka disebut pelabelan titik. Jika domain

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol 5, No 1, Januari 2019
ISSN 2460-4542, e-ISSN 2615-8663

pemetaan adalah sisi, maka disebut pelabelan sisi. Jika domain dari pemetaan adalah titik dan sisi, maka disebut pelabelan total.

Bobot (*weight*) dari elemen graf adalah jumlah dari semua label yang berhubungan dengan elemen graf tersebut (Wallis, 2001). Bobot dari titik v dengan pelabelan λ adalah $wt(v) = \lambda(v) + \sum_{uv \in E} \lambda(uv)$. Sedangkan bobot dari sisi uv adalah $wt(uv) = \lambda(u) + \lambda(uv) + \lambda(v)$.

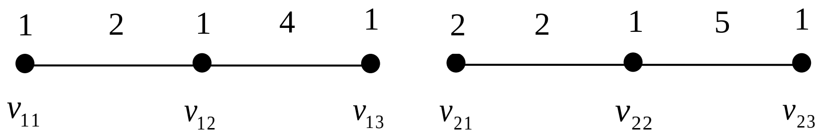
Sampai saat ini terdapat beberapa jenis pelabelan graf yang telah dikaji, salah satunya adalah pelabelan total tak teratur. Pelabelan total tak teratur terdiri dari: pelabelan total tak teratur titik, pelabelan total tak teratur sisi dan pelabelan total tak teratur total. Berikut akan dijelaskan mengenai pelabelan total tak teratur sisi yang didefinisikan oleh Bača, dkk. pada Tahun 2007 dalam makalahnya yang berjudul "*On Irregular Total Labelling*".

Definisi 3 (Bača, dkk., 2007)
Misalkan $G = (V, E)$, pelabelan-k total didefinisikan sebagai pemetaan

$$\lambda: V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}.$$

Pelabelan-k total dikatakan sebagai pelabelan-k total tak teratur sisi dari graf G jika untuk setiap sisi e dan f yang berbeda maka $wt(e) \neq wt(f)$.
Misalkan $e = x_1x_2$, maka $wt(e)$ merupakan bobot sisi e yang dinyatakan sebagai : $wt(e) = \lambda(x_1) + \lambda(e) + \lambda(x_2)$.
Nilai total ketakteraturan sisi dari graf G (*total edge irregularity strength*) dinotasikan dengan $tes(G)$ adalah nilai k minimum atau label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan total tak teratur sisi.

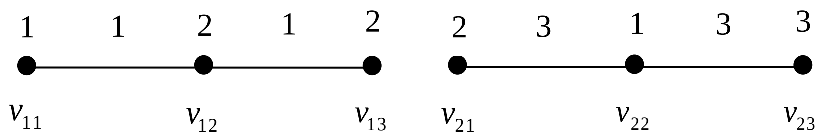
Pada Gambar 4 berikut diberikan contoh pelabelan total tak teratur sisi λ pada graf $2P_3$.



Gambar 4 Pelabelan-5 Total Tak Teratur Sisi pada Graf $2P_3$

Pelabelan pada Gambar 4 menggunakan label maksimum 5. Dari hasil perhitungan bobot sisi pada graf $2P_3$ diperoleh bobot setiap sisi berbeda. Oleh karena itu, λ adalah pelabelan-5 total tak teratur sisi pada graf $2P_3$.

Selanjutnya, Gambar 5 juga menunjukkan adanya pelabelan total tak teratur sisi γ pada graf $2P_3$.



Gambar 5 Pelabelan-3 Total Tak Teratur Total pada Graf $2P_3$

Pelabelan pada Gambar 5 menggunakan label maksimum 3. Dari hasil perhitungan bobot sisi pada graf $2P_3$ diperoleh bobot setiap sisi berbeda. Oleh karena itu, γ adalah pelabelan-3 total tak teratur sisi pada graf $2P_3$.

Berdasarkan definisi, nilai total ketakteraturan sisi yaitu label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf *G* dengan pelabelan total tak teratur sisi, yang dinotasikan dengan *tes(G)*. Artinya, akan dicari nilai k minimum sedemikian sehingga terdapat pelabelan-k total tak teratur sisi pada graf $2P_3$. Dalam kasus ini, dapat disimpulkan bahwa $tes(2P_3) \leq 3$.

Pada makalah yang berjudul "*On Irregular Total Labelling*", Bača, dkk. juga mendapatkan batas atas dan batas bawah dari nilai total ketakteraturan sisi dari sebarang graf serta beberapa nilai total ketakteraturan sisi dari beberapa graf sederhana seperti dinyatakan pada Teorema 5 dan 6 berikut. Pada teorema-teorema

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol 5, No 1, Januari 2019
ISSN 2460-4542, e-ISSN 2615-8663

tersebut didapatkan rumus nilai total ketakteraturan sisi dari beberapa graf sederhana secara umum. Didalam pembuktiannya juga harus ditunjukkan adanya pelabelan-k total tak teratur sisi yang dirumuskan secara umum.

Teorema 4 (Bača, dkk., 2007) Misalkan $G=(V,E)$ sebuah graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi tak kosong E maka $\left\lceil \frac{|E|+2}{3} \right\rceil \le tes(G) \le |E|$

Teorema 5 (Bača, dkk., 2007) Misalkan P_n dan C_n adalah graf lintasan dan graf lingkaran dengan sisi $n \ge 1$ maka $tes(P_n)=tes(C_n)=\left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil$

Teorema 6 (Bača, dkk., 2007) Misalkan $S_n = K_{1,n}$ adalah graf bintang dengan $n+1$ titik dan $n>1$ maka $tes(S_n)=\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$

Kemudian Ivanco, dkk. menemukan nilai total ketakteraturan sisi dari graf pohon dan mereka memberikan sebuah konjektur mengenai nilai total ketakteraturan sisi dari sebarang graf seperti yang dinyatakan pada Konjektur 7 berikut.

Konjektur 7 (Ivanco, dkk., 2006) Untuk setiap graf selain K_5 berlaku $tes(G) = max\left\{\left\lceil \frac{\Delta(G)+1}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{|E|+2}{3} \right\rceil\right\}$, dimana $\Delta(G)$ adalah derajat titik terbesar pada G.

Setelah itu, Nurdin, dkk. memperoleh nilai total ketakteraturan sisi dari graf hasil kali korona dari graf lintasan. Salah satu teoremanya dinyatakan pada Teorema 8 berikut.

Teorema 8 (Nurdin, dkk., 2008) Untuk setiap bilangan bulat $n, m \ge 2$ berlaku $tes(P_m \odot P_n) = \left\lceil \frac{2mn+1}{3} \right\rceil$.

Kemudian pada tahun 2013, M.K. Siddiqui, dkk. mendapatkan nilai total ketakteraturan sisi dari gabungan saling lepas beberapa graf helm dan gabungan saling lepas beberapa graf matahari seperti yang dinyatakan pada Teorema 9 dan 10.

Teorema 9 (M.K. Siddiqui, dkk., 2013) Misalkan $m, n \ge 2$ adalah bilangan bulat dan $G \cong \bigcup_{j=1}^{m} H_{n+j}$, maka $tes(G) = mn + 1 + \frac{m(m+1)}{2}$.

Teorema 10 (M.K. Siddiqui, dkk., 2013) Misalkan $p \ge 4$. Nilai total ketakteraturan sisi dari gabungan saling lepas p graf matahari yang tidak isomorfik adalah $\left\lceil \frac{2\left(\sum_{j=1}^{p} n_j + 1\right)}{3} \right\rceil$.

Selain itu, Diari Indriati, dkk. dan Indra Rajasingh, dkk juga memberikan kontribusi dalam hal ini. Diari Indriati, dkk. memperoleh nilai total ketakteraturan sisi dari generalisasi graf helm, sedangkan Indra Rajasingh, dkk. memperoleh nilai total ketakteraturan sisi dari graf seri-paralel.

Teorema 11 (Diari Indriati, dkk., 2013) Untuk $n \ge 3$ dan $m \equiv 0 (mod\ 3)$ berlaku $tes(H_n^m) = \left\lceil \frac{(m+3)n+2}{3} \right\rceil$.

Teorema 12 (Indra Rajasingh, dkk., 2015) Misalkan $sp(m,r,l)$, $l \ge 2$ adalah graf seri-paralel, maka $tes(sp(m,r,l)) = \left\lceil \frac{lm(r+1)+2}{3} \right\rceil$.

Pada tahun 2017, penulis terlibat dalam penelitian yang membahas tentang nilai total ketakteraturan sisi dari m-*copy* graf P_2, P_3, P_4, dan P_5. Namun, penelitian ini belum dipublikasikan. Pada penelitian tersebut diperoleh hasil $tes(mP_2) = \left\lceil \frac{m+2}{3} \right\rceil$, $tes(mP_3) = \left\lceil \frac{2m+2}{3} \right\rceil$, $tes(mP_4) = \left\lceil \frac{3m+2}{3} \right\rceil$, dan $tes(mP_5) = \left\lceil \frac{4m+2}{3} \right\rceil$. Pada Teorema 13 berikut akan dibahas secara detail mengenai nilai total ketakteraturan sisi dari m-*copy* graf P_2, P_3, dan P_4.

Teorema 13 Misalkan mP_n adalah m –*copy* graf lintasan dengan n titik, dimana $m \ge 2$ dan $2 \le n \le 4$, maka berlaku $tes(mP_n) = \left\lceil \frac{m(n-1)+2}{3} \right\rceil$.

Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Menentukan batas bawah dari $tes(mP_n)$ untuk $n \geq 6$ dan $m \geq 2$ dengan menggunakan Teorema 2.8, yaitu :
$$\left\lceil \frac{|E|+2}{3} \right\rceil \leq tes(G) \leq |E|$$
2. Menentukan pelabelan total tak teratur sisi dari graf mP_n untuk beberapa n dan m dengan $n \geq 6$ dan $m \geq 2$ menggunakan label terbesar sebesar batas bawah yang diperoleh pada langkah 1.
3. Menentukan rumus untuk pelabelan sisi dari graf mP_n untuk $n \geq 6$ dan $m \geq 2$, dengan mengacu pada pelabelan yang terdapat pada Langkah 2.
4. Menentukan rumus untuk pelabelan titik dari graf mP_n untuk $n \geq 6$ dan $m \geq 2$, dengan mengacu pada pelabelan yang terdapat pada Langkah 2.
5. Menentukan rumus untuk bobot sisi dari graf mP_n untuk $n \geq 6$ dan $m \geq 2$ menggunakan rumus yang diperoleh pada Langkah 3 dan Langkah 4.
6. Membuktikan bahwa bobot setiap sisi pada graf mP_n tersebut berbeda semua.
7. Menetapkan label titik atau sisi yang terbesar sebagai nilai total ketakteraturan titik dari graf mP_n untuk $n \geq 6$ dan $m \geq 2$.
8. Menyusun pembuktian bahwa label terbesar tersebut merupakan batas atas dari $tes(mP_n)$ untuk $n \geq 6$ dan $m \geq 2$.
9. Mengaplikasikan rumus nilai total ketakteraturan sisi dari graf mP_n yang diperoleh untuk $n = 8$ dan $m = 15$.

Hasil dan Pembahasan

Graf mP_n merupakan graf yang diperoleh dengan menggandakan graf P_n sebanyak m kali, dimana himpunan titik dari setiap hasil penggandaan tidak ada yang beririsan.

Misalkan graf P_n hasil penggandaan ke-i adalah $v_{i,1}e_{i,1}v_{i,2}e_{i,2} \ldots e_{i,(n-1)}v_{i,n}$ dimana $e_{i,j} = v_{i,j}v_{i,(j+1)}$ untuk $1 \leq i \leq m$ dan $1 \leq j \leq n$.

Nilai total ketakteraturan sisi pada m-copy graf lintasan P_n, dinotasikan dengan $tes(C)$, untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 6$ disajikan dalam teorema berikut:

Teorema 14 Misalkan mP_n adalah m-copy graf lintasan P_n. Untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 6$ berlaku $tes(mP_n) = \left\lceil \frac{(n-1)m+2}{3} \right\rceil$.

Bukti :
Pertama akan dibuktikan $tes(mP_n) \geq \left\lceil \frac{(n-1)m+2}{3} \right\rceil$. Perhatikan bahwa banyaknya sisi pada graf mP_n adalah $|E(mP_n)| = m(n-1)$. Berdasarkan Teorema 4 diperoleh batas bawah untuk $tes(mP_n)$ sebagai berikut :
$$\left\lceil \frac{|E(mP_n)|+2}{3} \right\rceil \leq tes(mP_n) \leq |E(mP_n)|$$
$$\left\lceil \frac{m(n-1)+2}{3} \right\rceil \leq tes(mP_n) \leq m(n-1)$$
Dapat dituliskan juga dengan :

$$tes(mP_n) \geq \left\lceil \frac{m(n-1)+2}{3} \right\rceil$$

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $tes(mP_n) \leq \left\lceil \frac{(n-1)m+2}{3} \right\rceil$ dengan menunjukkan adanya pelabelan total tak teratur sisi pada graf mP_n menggunakan label terbesar $\left\lceil \frac{(n-1)m+2}{3} \right\rceil$, yaitu sebagai berikut.

$\lambda(v_{i,j}) = \left\lceil \frac{j+(i-1)(n-1)+1}{3} \right\rceil$ dengan $1 \leq i \leq m$ dan $1 \leq j \leq n$

$\lambda(e_{i,j}) = \left\lceil \frac{j+(i-1)(n-1)}{3} \right\rceil$ dengan $1 \leq i \leq m$ dan $1 \leq j \leq n-1$

Berdasarkan rumus pelabelan titik dan pelabelan sisi, dapat kita peroleh rumus bobot untuk setiap sisi pada graf mP_n , yaitu:

$$\begin{aligned} wt(e_{i,j}) &= \lambda(e_{i,j}) + \lambda(v_{i,j}) + \lambda(v_{i,j+1}) \\ &= \left\lceil \frac{j+(n-1)(i-1)}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{j+(n-1)(i-1)+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{j+1+(n-1)(i-1)+1}{3} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{j+(n-1)(i-1)}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{j+(n-1)(i-1)+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{j+(n-1)(i-1)+2}{3} \right\rceil \end{aligned}$$

a. Jika $j+(n-1)(i-1) \equiv 0 (mod\ 3)$

$$\begin{aligned} wt(e_{i,j}) &= \frac{j+(n-1)(i-1)}{3} + \frac{j+(n-1)(i-1)}{3} + 1 + \frac{j+(n-1)(i-1)}{3} + 1 \\ &= j+(n-1)(i-1)+2 \end{aligned}$$

b. Jika $j+(n-1)(i-1) \equiv 1 (mod\ 3)$

$$\begin{aligned} wt(e_{i,j}) &= \frac{j+(n-1)(i-1)+2}{3} - 1 + \frac{j+(n-1)(i-1)+2}{3} - 1 + \frac{j+(n-1)(i-1)+2}{3} \\ &= j+(n-1)(i-1) \end{aligned}$$

c. Jika $j+(n-1)(i-1) \equiv 2 (mod\ 3)$

$$\begin{aligned} wt(e_{i,j}) &= \frac{j+(n-1)(i-1)+1}{3} - 1 + \frac{j+(n-1)(i-1)+1}{3} + 1 + \frac{j+(n-1)(i-1)+1}{3} + 1 \\ &= j+(n-1)(i-1)+2 \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa fungsi λ adalah suatu pemetaan dari $\{V(mP_n) \cup E(mP_n)\}$ ke $\{1, 2, \ldots, \left\lceil \frac{(n-1)m+2}{3} \right\rceil\}$. Bobot sisi dari graf mP_n adalah bilangan bulat positif berurut dimulai dari 3 sampai ke $\left\lceil \frac{j+(n-1)(i-1)}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{j+(n-1)(i-1)+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{j+(n-1)(i-1)+2}{3} \right\rceil$. Lebih detailnya diuraikan sebagai berikut.

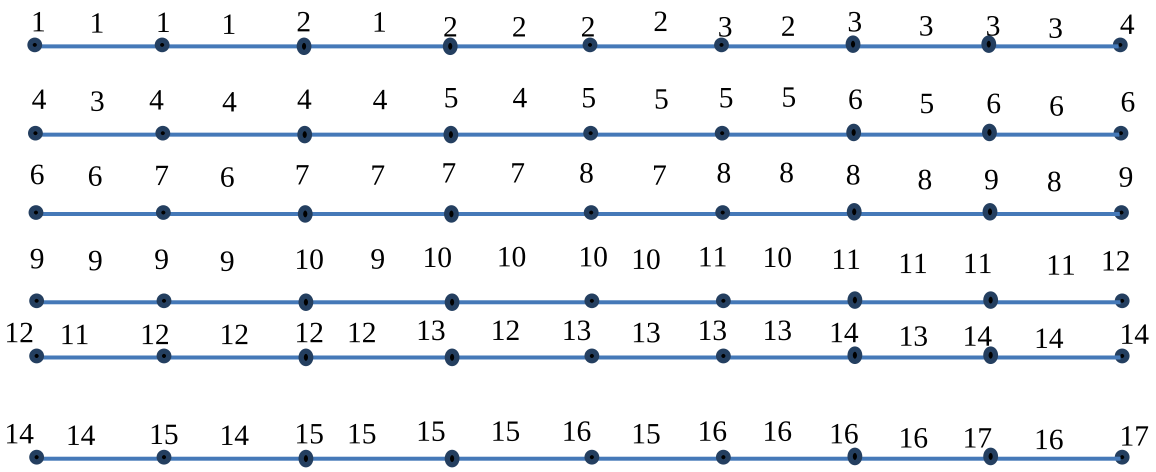
a. Jika $(n-1)m \equiv 0 (mod\ 3)$
Bobot sisi dari graf mP_n adalah bilangan bulat positif berurut dimulai dari 3 sampai ke $(n-1)m+2$.

b. Jika $(n-1)m \equiv 1 (mod\ 3)$
Bobot sisi dari graf mP_n adalah bilangan bulat positif berurut dimulai dari 3 sampai ke $(n-1)m$.

c. Jika $(n-1)m \equiv 2 (mod\ 3)$
Bobot sisi dari graf mP_n adalah bilangan bulat positif berurut dimulai dari 3 sampai ke $(n-1)m$.

Hal ini menunjukkan bahwa pelabelan λ adalah pelabelan total tak teratur titik. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa $tes(mP_n) \leq \left\lceil\frac{(n-1)m+2}{3}\right\rceil$.
Telah kita dapatkan bahwa $tes(mP_n) \leq \left\lceil\frac{(n-1)m+2}{3}\right\rceil$ dan $tes(mP_n) \geq \left\lceil\frac{(n-1)m+2}{3}\right\rceil$, maka dapat disimpulkan bahwa $tes(mP_n) = \left\lceil\frac{(n-1)m+2}{3}\right\rceil$. ■

Sebagai ilustrasi dari Teorema di atas, diberikan contoh pelabelan total tak teratur sisi untuk graf $5P_{10}$ dengan $tes(5P_{10}) = \left\lceil\frac{9(5)+2}{3}\right\rceil = 14$.



Gambar 5 Pelabelan Total Tak Teratur Sisi pada $5P_{10}$

Label terbesar yang digunakan adalah 14 dan bisa diperiksa bahwa pelabelan tersebut mengakibatkan bobot setiap sisinya berbeda, yaitu bilangan bulat berurutan dari 3 sampai 42. Jadi, pelabelan ini adalah pelabelan-14 total tak teratur sisi pada $5P_{10}$.

Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dari penelitian ini dapat disimpulkan bahwa terbukti nilai total ketakteraturan sisi (*total edge irregularity strength*) dari graf mP_n untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 6$ adalah $tes(mP_n) = \left\lceil\frac{(n-1)m+2}{3}\right\rceil$.

Daftar Pustaka

Ali Ahmad, M. Baca. 2009. Edge Irregular Total Labeling of Certain Family of Graphs. *AKCE J-Graph. Combin., 6, No.1,21-29.*

Ali Ahmad, Omar Al-Mushayt, M. Kamran Siddiqui, 2014, Total Edge Iregularity Strength of Strong Product of Cycles and Paths. *U.P.B. Sci. Bull., Series A, Vol.76.*

Bondy, J.A., U.S.R. Murty, 1982, *Graph Theory with Application*, Elsevier Science Publishing Company Inc., New York.

Diari Indriati, Widodo, Indah Emilia Wijayanti, Kiki Ariyanti Sugeng, 2013, On the Total Edge Irregularity Strength of Generalized Helm, *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, Vol.10 No.2, 147-155.

Gallian, J. A., 2016, A Dynamic Survey of Graph Labeling. *Electronic Journal of Combinatorics*, #DS6.

Handayani,Dwi, 2007, Pelabelan-k Total Tak Teratur Sisi dan Nilai Total Ketakteraturan Sisi dari Graf Lintang,[online] http://digilib.uns.ac.id, diakses 1-1-17.

Indra Rajasingh, S. Teresa Arockiamary, 2015, Total Edge Irregularity Strength of Series Parallel Graphs. *International Journal of Pure and Applied Math., Vol.99 No.1,11-21.*

J. Ivanco, S. Jendrol. 2006. Total Edge Irregularity Strength of Trees, *Discussiones Math. Graph Theory* Vol. 26, 449-456.

M. Baca, S. Jendrol, M. Miller, J. Ryan, 2007, On Irregular Total Labelings, *Discrete Math., 307, 1378-1388.*

M.K. Siddiqui, dkk., 2013, Total Edge Irregularity Strength of the Disjoint Union of Sun Graphs, *International Journal of Math and Soft Computing, Vol.3,No.1:21-27.*

M.K. Siddiqui, dkk., 2013, Total Edge Irregularity Strength of the Disjoint Union of Helm Graphs, *J. Math. Fund. Sci., Vol.45 No.2:163-171.*

Munir, Rinaldi, 2010, *Matematika Diskrit Edisi Ketiga*. Bandung: Penerbit Informatika.

Novalita Anjalia A.P., Slamin, Dafik, 2014, Nilai Ketakteraturan Total Sisi dari Graf Segitiga Bermuda, *Kadikma Vol.5 No.3 : 157-166, Desember 2014.*

Nurdin, A. N. M. Salman, E. T. Baskoro, 2008, The Total Edge-Irregular Strengths of The Corona Product of Paths with Some Graphs, *J. Combin. Math. Combin. Comput.,Vol. 65, 163-175.*

O. Al-Mushayt, Ali Ahmad, M.K. Siddiqui, 2012, On the Total Edge Irregularity Strength of Hexagonal Grid Graphs, *Australian Journal of Combinatorics Vol.53 : 263-271.*

Tong Chunling, dkk. 2009. Irregular Total Labelings of Some Families of Graphs. *Indian J.Pure Appl. Math.,40(3):155-181.*