Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol 5, No 1, Januari 2019
ISSN 2460-4542, e-ISSN 2615-8663

Kestabilan Global Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit Pada Model SIS Transmisi *HUMAN PAPILLOMAVIRUS* (HPV) Dengan Populasi Berbeda

I.Suryani[1], Afid Asandi[2]
[1,2]Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: irma.suryani@uin-suska.ac.id, afidasandi009@gmail.com

ABSTRAK

Pada paper ini dibahas tentang kestabilan global titik ekuilibrium bebas penyakit pada virus HPV (*Human Papillomavirus*) pada model SIS dengan populasi berbeda. Selanjutnya, dari model tersebut diselidiki eksistensi titik ekuilibrium dan kestabilan global titik ekuilibrium bebas penyakit. Titik ekuilibrium bebas penyakit ditentukan dengan menyelesaikan persamaan pada model SIS dan diuji kestabilannya dengan melakukan linearisasi menggunakan matriks Jacobian dan menentukan *Next Generation Matrixs* (NGM) dengan syarat R_0 terpenuhi. Selanjutnya diuji dengan fungsi Lyapunov. Kemudian model tersebut di analisis dengan simulasi numerik menggunakan *software Maple 18*.

Kata kunci: *Fungsi Lyapunov, kestabilan global, model SIS, stabil asimtotik, titik ekuilibrium.*

ABSTRACT

This paper discusses about global stability of disease-free equilibrium in the SIS model of transmission of human papillomavirus with different populations.This SIS model has disease-free equilibrium. From the model we study existence ekuilibrium states and global stability disease-free equilibrium. Disease-free equilibrium is determined in the SIS model equation and in its stability test by linearization using the Jacobian matrix and determining Next Genereation Matrixs with the condition that R_0 *is fulfilled. Then the model is analyzed by numerical simulation using Maple 18.*

Keywords *: A SIS model, asymptotically stable, equilibrium, global stability, Lyapunov function.*

PENDAHULUAN

Penyakit menular seksual dikenal dengan istilah infeksi menular seksual. Penyakit menular seksual adalah penyakit atau infeksi yang umumnya ditularkan melalui hubungan seks yang tidak aman. Penyebaran bisa melalui darah, sperma, cairan vagina atau pun cairan tubuh lainnya. Virus yang menyebabkan penyakit menular seksual salah satu nya ialah penyakit kutil kelamin. Kutil kelamin atau kutil genital adalah penyakit menular seksual yang disebabkan oleh virus yang dikenal sebagai *human papillomavirus* (Jevuska, 2014).

Human papillomavirus (HPV) adalah virus yang paling sering menyebabkan infeksi menular seksual. Ada lebih dari 40 jenis HPV berbeda secara khusus mempengaruhi genital. Beberapa jenis HPV juga dapat menginfeksi diberbagai bagian tubuh termasuk juga mulut dan tenggorokan. Kebanyakan orang yang terinfeksi HPV tanpa mereka sadari. Dalam kebanyakan kasus, sistem kekebalan tubuh mengalahkan infeksi HPV sebelum memiliki kesempatan untuk menciptakan kutil. Setidaknya 70% dari orang-orang yang aktif secara seksual akan terinfeksi HPV dalam hidup mereka. 80% dari kasus orang yang terinfeksi HPV akan hilang dengan sendirinya dalam beberapa bulan karena sistem kekebalan tubuh tanpa pengobatan, sedangkan 20% lagi infeksi yang tersisa menjadi persisten (Putro Agus Harnowo, 2011).

Selanjutnya pada jurnal L.Ribassin-Majed(2010) menyebutkan bahwa beberapa serotipe HPV yang berbeda telah diidentifikasi, ada serotipe risiko rendah yang bertanggung jawab untuk kerusakan anogenital jinak, dan serotipe berisiko tinggi yang dapat menyebabkan kerusakan prakanker dan kanker pada leher rahim. Studi epidemiologis pada infeksi HPV menetapkan peran virus ini sebagai penyebab utama kanker serviks. Diperkirakan bahwa infeksi HPV bertanggung jawab atas 500.000 kasus kanker serviks di seluruh dunia setiap tahun. Vaksinasi terhadap infeksi HPV merupakan cara yang efektif untuk menurunkan kejadian kanker serviks, terutama di kalangan wanita muda. Ketersediaan vaksin HPV memberikan kesempatan untuk menurunkan jumlah kasus penyakit di seluruh dunia yang di sebabkan oleh HPV. Sebenarnya, 2 vaksin pencegah infeksi HPV yang telah ditemukan sangat efisien dan cocok pada wanita. Beberapa model deterministik telah dikembangkan untuk menilai dampak potensial dari vaksinasi terhadap HPV.

Hal tersebut yang membuat penulis tertarik untuk mengulas model matematika, yang sebelumnya juga dibahas dalam beberapa jurnal, yaitu jurnal "*A SIS model for Human Pappillomavirus transmission*: L.Ribassin-Majed, 2010*"* yang membahas mengenai bagaimana bentuk model SIS penyebaran dari HPV. dan "*Global Stability of Equilibria in a Two-Sex HPV Vaccination Model*: Elamin H.Elbasha, 2007 yang membahas mengenai kestabilan global titik ekuilibrium dalam heteroseksual model vaksinasi HPV.

Berdasarkan uraian diatas, penulis tertarik mengulas kembali jurnal "*A SIS model for Human Pappillomavirus transmission*: L.Ribassin-Majed, 2010*"* dengan menambahkan simulasi numerik dari jurnal tersebut.

METODOLOGI PENELITIAN

Metodologi penelitian yang digunakan penulis adalah studi literatur, yaitu mempelajari buku-buku atau jurnal-jurnal yang berkaitan dengan pokok permasalahan. Prosedur permasalahan ini di awali dengan populasi yang terdiri dari dua kompartement (subpopulasi), yakni:

a. **S(t)** : ***Susceptible,*** yaitu menyatakan jumlah individu yang sehat dan rentan terhadap virus HPV
b. **I(t)** : ***Infectible,*** yaitu menyatakan jumlah individu yang terinfeksi dan menularkan terhadap virus HPV

Pada penelitian ini akan mengkaji model SIS untuk transmisi HPV pada populasi heteroseksual yang aktif. Yang berarti memperhitungkan jenis kelamin perempuan (X) dan laki-laki (Y) pada tiap subpopulasi. Pengembangan model deterministik menggunakan (SIS) struktur *rentan-terinfeksi-rentan* dan vaksinasi diperhitungkan. Vaksinasi yang diperhitungkan pada jenis kelamin perempuan dan laki-laki masing-masing dinyatakan dalam (V) dan (W). Untuk lebih detailnya, langkah-langkah yang akan dilakukan dalam penelitian tugas akhir ini adalah sebagai berikut :

1. Mengidentifikasi parameter dan variabel yang digunakan dalam model.
2. Membuat asumsi yang melibatkan parameter dan variabel
3. Model matematika dari parameter untuk setiap subpopulasi yang diperoleh dan asumsi-asumsi yang telah diberikan.
4. Menentukan titik ekuilibrium dari model yang diperoleh. Terdapat dua titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik. Dalam hal ini yang akan dibahas yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit.
5. Menganalisa kestabilan dari titik ekuilibrium bebas penyakit yang didapat.
6. Membuat simulasi numerik dengan menggunakan *software Maple 18.*
7. Menyimpulkan hasil yang diperoleh secara keseluruhan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Asumsi

Dibentuk kompartemen sistem non-linear model SIS transmisi *Human Papillomavirus* (HPV) yang merupakan model terpisah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{dX_S}{dt} &= (1-\varphi_f)\Lambda - \lambda_f X_S + \delta X_I - \mu X_S \\
\frac{dX_I}{dt} &= \lambda_f X_S - (\delta+\mu) X_I \\
\frac{dY_S}{dt} &= (1-\varphi_m)\Lambda - \lambda_m Y_S + \delta Y_I - \mu Y_S \\
\frac{dY_I}{dt} &= \lambda_m Y_S - (\delta+\mu) Y_I \\
\frac{dV_S}{dt} &= \varphi_f \Lambda - (1-\tau)\lambda_f V_S + \delta V_I - \mu V_S \\
\frac{dV_I}{dt} &= (1-\tau)\lambda_f V_S - (\delta+\mu) V_i \\
\frac{dW_S}{dt} &= \varphi_m \Lambda - (1-\tau)\lambda_m W_S + \delta W_I - \mu W_S \\
\frac{dW_I}{dt} &= (1-\tau)\lambda_m W_S - (\delta+\mu) W_I
\end{aligned} \tag{1}$$

dengan,

$$\lambda_f = \sigma_f \frac{(Y_I + W_I)}{N}$$

$$\lambda_m = \sigma_m \frac{(X_I + V_I)}{N}$$

Untuk mencari ukuran yang konstan dari populasi dalam model,

$$N = N_f + N_m$$

$$N_f = X_S + X_I + V_S + V_I$$

$$N_m = Y_S + Y_i + W_s + W_I$$

Kemudian,

$$\frac{dN}{dt} = 2\Lambda - \mu(N) \tag{2}$$

Saat titik ekuilibrium $N^* = \frac{2\Lambda}{\mu}$, hanya perlu untuk menganalisis asimtotik otonom yang membatasi sistem dimana N diganti dengan nilai ekuilibrium. Dengan mempertimbangkan sistem yang hanya diwilayah tersebut

$$D = \left\{ (X_S, X_I, Y_S, Y_I, V_S, V_I, W_S, W_I) \in R_+^8,\ X_S + X_I + Y_S + Y_I + V_S + V_I + W_S + W_I \le \frac{2\Lambda}{\mu} \right\} \tag{3}$$

2. Titik Ekuilibrium

Dengan tidak adanya vaksinasi, maka tidak ada laju vaksinasi untuk tiap jenis kelamin laki-laki dan perempuan masing-masing φ_m dan φ_f serta untuk setiap subpopulasi yang divaksinasi baik itu berdasarkan jenis kelamin maupun kompartement rentan/terinfeksi sama dengan nol. $\varphi_m = 0$ dan $\varphi_f = 0$ serta $V_S = V_I = W_S = W_I = 0$. Pernyataan tersebut dapat ditulis sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
\frac{dX_S}{dt} &= \Lambda - \lambda_f X_S + \delta X_I - \mu X_S \\
\frac{dX_I}{dt} &= \lambda_f X_S - (\delta + \mu) X_I \\
\frac{dY_S}{dt} &= \Lambda - \lambda_m Y_S + \delta Y_I - \mu Y_S \\
\frac{dY_I}{dt} &= \lambda_m Y_S - (\delta + \mu) Y_I
\end{aligned} \tag{4}
$$

dengan $\lambda_f = \dfrac{\sigma_f Y_I}{N}$ dan $\lambda_m = \dfrac{\sigma_m X_I}{N}$.

2.1 Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Didapat titik ekuilibrium bebas penyakit:

$$P_0 = \left(X_S^*, X_I^*, Y_S^*, Y_I^*\right) = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0 \frac{\Lambda}{\mu}, 0\right) \tag{5}$$

3. Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Indikator utama dalam mengontrol keendemikan suatu penyakit adalah dengan rasio reproduksi dasar (R_0). Suatu keadaan dinyatakan stabil menuju endemik apabila $R_0 > 1$, sedangkan stabil pada keadaan yang bebas penyakit apabila $R_0 < 1$, dalam hal ini setiap penderita hanya dapat menyebarkan penyakit kepada rata-rata kurang dari satu penderita baru, sehingga pada akhirnya penyakit akan hilang. Dengan kata lain jika $R_0 < 1$ maka penyakit tidak akan menyerang populasi. Sedangkan, apabila $R_0 > 1$ maka setiap penderita dapat menyebarkan penyakit kepada rata-rata lebih dari satu penderita baru, sehingga pada akhirnya akan terjadi endemic penyakit. Dengan kata lain apabila $R_0 > 1$ maka sangat mungkin penyakit untuk menyebar. *Next Generation Matrice* (NGM) digunakan untuk menghitung bilangan reproduksi dasar (R_0)**.** Didefinisikan dengan dua subpopulasi yang sesuai untuk subpopulasi terinfeksi dan subpopulasi yang rentan yaitu:

$$\dot{x} = (\dot{X}_I, \dot{Y}_I, \dot{X}_S, \dot{Y}_S)^T = (0,0,0,0)^T \tag{6}$$

Dengan menggunakan metode *Next Generation Matrice* kita pisahkan $\dot{x}$ menjadi $F - V$ kemudian didapat:

$$F = \begin{pmatrix} \dfrac{\sigma_f Y_I}{N} X_S \\ \dfrac{\sigma_m X_I}{N} Y_S \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$V = \begin{pmatrix} (\delta+\mu)X_I \\ (\delta+\mu)Y_I \\ -\Lambda + \lambda_f X_S - \delta X_I - \mu X_S \\ -\Lambda + \lambda_m Y_S - \delta Y_I - \mu Y_S \end{pmatrix} \tag{8}$$

Kemudian, Matrik *Jacobian* dari $\mathcal{F}$ dan $\mathcal{V}$ dievaluasi pada titik ekuilibrium bebas penyakit. Menggunakan relasi : $N = \frac{2\Lambda}{\mu}$

$$dF(P_0) = \begin{pmatrix} \frac{dF_1}{dX_I} & \frac{dF_1}{dY_I} \\ \frac{dF_2}{dX_I} & \frac{dF_2}{dY_I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sigma_f}{2} \\ \frac{\sigma_m}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$dV(P_0) = \begin{pmatrix} \frac{dV_1}{dX_I} & \frac{dV_1}{dY_I} \\ \frac{dV_2}{dX_I} & \frac{dV_2}{dY_I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\delta+\mu) & 0 \\ 0 & (\delta+\mu) \end{pmatrix}$$

maka,

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sigma_f}{2} \\ \frac{\sigma_m}{2} & 0 \end{pmatrix} \text{ dan } V = \begin{pmatrix} (\delta+\mu) & 0 \\ 0 & (\delta+\mu) \end{pmatrix}$$

jadi,

$$F(V^{-1}) = \frac{1}{2(\delta+\mu)} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_f \\ \sigma_m & 0 \end{pmatrix}$$

demikian,

$$R_0 = \sqrt{R_{0,f} R_{0,m}} \tag{9}$$

dengan,

$$R_{0,f} = \frac{\sigma_f}{2(\delta+\mu)} \text{ dan } R_{0,m} = \frac{\sigma_m}{2(\delta+\mu)} .$$

4. Kestabilan Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Kestabilan titik ekuilibrium dapat didekati dengan melakukan linearisasi menggunakan matrik Jacobian. Maka persamaan dari *Next Generation Matrixs* yaitu:

$$F = F - V$$

$$F=\begin{pmatrix}\dfrac{\sigma_f Y_I}{N}X_S\\ \dfrac{\sigma_m X_I}{N}Y_S\\ 0\\ 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}(\delta+\mu)X_I\\ (\delta+\mu)Y_I\\ -\Lambda+\lambda_f X_S-\delta X_I-\mu X_S\\ -\Lambda+\lambda_m Y_S-\delta Y_I-\mu Y_S\end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh persamaan

$$\begin{aligned}
F_1(X_S,X_I,Y_S,Y_I)&=\frac{\sigma_f Y_I}{N}X_S-(\delta+\mu)X_I\\
F_2(X_S,X_I,Y_S,Y_I)&=\frac{\sigma_m X_I}{N}Y_S-(\delta+\mu)Y_I\\
F_3(X_S,X_I,Y_S,Y_I)&=-\Lambda+\lambda_f X_S-\delta X_I-\mu X_S\\
F_4(X_S,X_I,Y_S,Y_I)&=-\Lambda+\lambda_m Y_S-\delta Y_I-\mu Y_S
\end{aligned}\tag{10}$$

Teorema 4.1 Jika $R_0<1$ maka titik ekuilibrium bebas penyakit adalah stabil asimtotik lokal.

Bukti:
Matrik *Jacobian* dari Persamaan (4.11) tanpa vaksinasi dievaluasi pada titik ekuilibrium bebas penyakit P_0:

$$J(P_0)=\begin{pmatrix}
\dfrac{\partial F_1}{\partial X_I} & \dfrac{\partial F_1}{\partial Y_I} & \dfrac{\partial F_1}{\partial X_S} & \dfrac{\partial F_1}{\partial Y_S}\\
\dfrac{\partial F_2}{\partial X_I} & \dfrac{\partial F_2}{\partial Y_I} & \dfrac{\partial F_2}{\partial X_S} & \dfrac{\partial F_2}{\partial Y_S}\\
\dfrac{\partial F_3}{\partial X_I} & \dfrac{\partial F_3}{\partial Y_I} & \dfrac{\partial F_3}{\partial X_S} & \dfrac{\partial F_3}{\partial Y_S}\\
\dfrac{\partial F_4}{\partial X_I} & \dfrac{\partial F_4}{\partial Y_I} & \dfrac{\partial F_4}{\partial X_S} & \dfrac{\partial F_4}{\partial Y_S}
\end{pmatrix}$$

dengan: $N=\dfrac{2\Lambda}{\mu}$, $\lambda_f=\dfrac{\sigma_f Y_I}{N}$, dan $\lambda_m=\dfrac{\sigma_m X_I}{N}$.

diperoleh,

$$J(P_0)=\begin{pmatrix}
-(\delta+\mu) & \dfrac{\sigma_f}{2} & 0 & 0\\
\dfrac{\sigma_m}{2} & -(\delta+\mu) & 0 & 0\\
\delta & -\dfrac{\sigma_f}{2} & -\mu & 0\\
-\dfrac{\sigma_m}{2} & \delta & 0 & -\mu
\end{pmatrix}$$

Didefinisikan:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -(\delta+\mu) & \dfrac{\sigma_f}{2} \\ \dfrac{\sigma_m}{2} & -(\delta+\mu) \end{pmatrix}$$

Trace dari matriks A_1

$$Tr(A_1) = -2(\delta+\mu)$$

Determinan dari matriks A_1

$$\det(A_1) = (\delta+\mu)^2 - \frac{\sigma_f \sigma_m}{4}$$

didefinisikan

$$(\delta+\mu)^2 - \frac{\sigma_f \sigma_m}{4} > 0$$

kemudian,

$$\left(\frac{\sigma_f}{2(\delta+\mu)}\right)\left(\frac{\sigma_m}{2(\delta+\mu)}\right) < 1 \tag{11}$$

Oleh karena itu, dari setiap jenis kelamin masing-masing

$$R_{0f,m} < 1.$$

Dengan demikian, $Tr(A_1) < 1$ dan $\det(A_1) > 0$ jika $R_0 < 1$. Kemudian jika $R_0 < 1$, semua nilai eigen dari persamaan linear matriks *Jacobian* pada titik ekuilibrium bebas penyakit memiliki bilangan real negative. Oleh karena itu, titik ekuilibrium bebas penyakit (P_0) adalah Stabil Asimtotik Lokal. Jika $R_0 > 1$, nilai eigen memiliki bilangan real positif dan titik ekuilibrium bebas penyakit Tak Stabil.

Teorema 4.2 Titik ekuilibrium bebas penyakit (P_0) dari Persamaan (4.2) *Stabil Asimtotik Global* jika $R_0 \leq 1$ dan tak stabil jika $R_0 > 1$.

Bukti:

Didefinisikan fungsi $L : D \to R$

$$L = X_I + R_{0,f} Y_I \in R \tag{12}$$

Dengan $R_{0,f}$ didefinisikan pada Persamaan (12) akan dianalisa *L* merupakan fungsi Liapunov. Diperhatikan bahwa $L : D \to R$ pada Persamaan (12) mempunyai sifat-sifat berikut:

i. Fungsi $L : D \to R$ differensiabel kontinu pada *D*. Karena turunan parisal fungsi *L* terhadap X_S, X_I, Y_S dan Y_I merupakan fungsi konstan sehingga $D_{X_S}, D_{X_I}, D_{Y_I}$ dan D_{Y_S} kontinu.

   Jadi, fungsi $L : D \to R$ differensiabel kontinu.

ii. Fungsi $L : D \to R$ mempunyai satu-satunya titik minimun di $P_0 = \left(X_S^*, X_I^*, Y_S^*, Y_I^*\right) = \left(\dfrac{\Lambda}{\mu}, 0 \dfrac{\Lambda}{\mu}, 0\right)$ Karena

   $L \geq 0 \quad \forall \left(X_S, X_I, Y_S, Y_I\right) \in D$

   maka fungsi *L* mencapai minimum jika *L* minimum.

Diketahui $X_I, Y_I \geq 0$ dan $X_S, Y_S > 0$ sehingga fungsi L mencapai minimum untuk $X_I = 0 = X_I^*$ dan $Y_I = 0 = Y_I^*$ akibatnya diperoleh $L(X_S 0, Y_S, 0) = X_I + R_{0,f} Y_I$. Lebih lanjut, syarat perlu $L(X_S, 0, Y_S, 0)$ minimum adalah $\frac{\partial L}{\partial X_S} = 0 \leftrightarrow \frac{\partial^2 L}{\partial X_S{}^2} = 0$ dan $\frac{\partial L}{\partial Y_S} = 0 \leftrightarrow \frac{\partial^2 L}{\partial Y_S{}^2} = 0$ karena $\frac{\partial^2 L}{\partial X_S{}^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial Y_S{}^2} \geq 0$ maka fungsi L mencapai minimum untuk $X_S = X_S^*$ dan $Y_S = Y_S^*$. Akibatnya $L(X_S, 0, Y_S, 0)$ mencapai minimum untuk $X_S = X_S^*$ dan $Y_S = Y_S^*$. Jadi, fungsi L mempunyai titik minimum tunggal di $P_0 = \left(X_S^*, X_I^*, Y_S^*, Y_I^*\right) = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0\frac{\Lambda}{\mu}, 0\right)$

iii. Fungsi L memenuhi

$$\frac{dL}{dt} \leq 0 \forall (X_S, X_I, Y_S, Y_I) \in D$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial X_I}{\partial X_I} \cdot \frac{dX_I}{dt} + R_{0,f} \frac{\partial Y_I}{\partial Y_I} \cdot \frac{dY}{dt}$$

Karena $Y_S \leq Y_S + Y_I \leq Y_S^* + Y_I$ maka $Y_S \leq Y_S^*$ dan $N = \frac{2\Lambda}{\mu}$ diperoleh,

$$\frac{dL}{dt} \leq (\delta + \mu)(R_0{}^2 - 1) X_I \tag{13}$$

Lemma 1 $\frac{dL}{dt} = 0$ hanya pada titik ekuilibrium bebas penyakit P_0.

Untuk setiap di D mendekati bagian bilangan positif terbesar dari himpunan E dimana $\frac{dL}{dt} = 0$ (Hale,1969). Telah dibuktikan pada **Lemma 1** bahwa satu-satunya bagian bilangan positif adalah P_0. Jadi, P_0 merupakan *Stabil Asimtotik Global* untuk $R_0 \leq 1$.

5. Simulasi

Simulasi dilakukan untuk menggambarkan secara jelas mengenai model matematika tentang kestabilan global titik ekuilibrium bebas penyakit pada model SIS transmisi HPV (*Human Papillomavirus*) dengan populasi berbeda. Simulasi diawali dengan memberikan nilai untuk masing-masing parameter dan nilai awal setiap subpopulasi.

Pada bagian ini akan dilakukan simulasi pada titik ekuilibrium bebas penyakit dengan menggunakan *Software Maple 18*.

Tabel 4.1 Nilai Parameter Untuk Bebas Penyakit HPV

Parameter	Nilai	Sumber
μ	0.021	Asumsi
δ	0.01	Asumsi

λ_m	0.001	Asumsi
λ_f	0.005	Asumsi
Λ	0.05	Asumsi
σ	0.002	Asumsi

Berdasarkan nilai-nilai parameter yang diberikan, maka titik ekuilibrium dari Persamaan (4.11) akan diperoleh:

$$X_S^* = \frac{\Lambda}{\mu} = 23.80952381$$

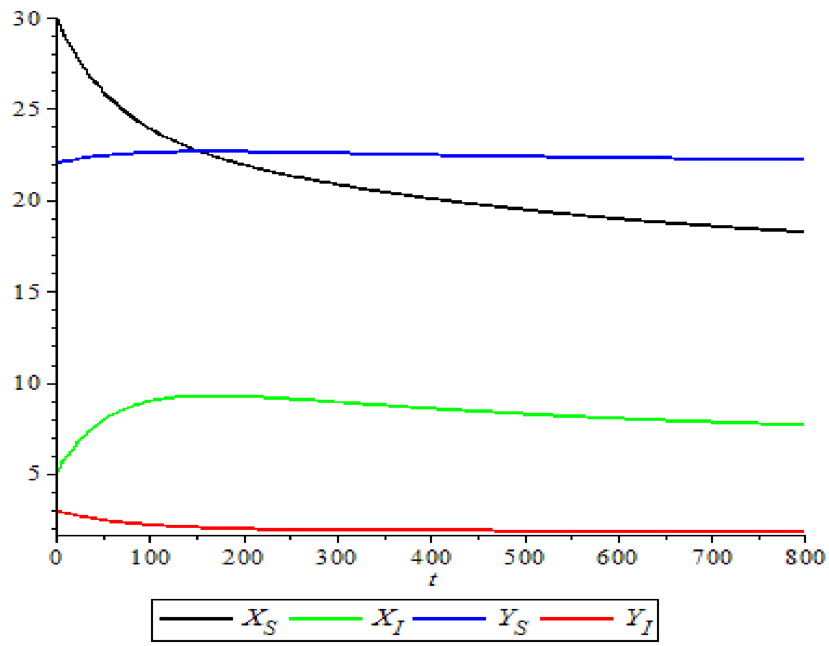
$$X_I^* = 0$$

$$Y_S^* = \frac{\Lambda}{\mu} = 23.80952381$$

$$Y_I^* = 0$$

dengan nilai awal

$X_S(0) = 30$, $X_I(0) = 5$, $Y_S(0) = 22$, $Y_I(0) = 3$ dan nilai $R_0 = 0.08264462810$ yang berarti kestabilannya yaitu *Stabil Asimtotik Global* dimana $R_0 \leq 0$. Dinamika populasi bebas penyakit HPV dapat dilihat pada Gambar 4.2 berikut ini:



Gambar 4.2 Simulasi Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit HPV

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan pada bab sebelumnya, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Model matematika pada model SIS transmisi *Human Papillomavirus* (HPV) tanpa vaksinasi membentuk suatu sistem persamaan diferensial yang terdiri dari empat persamaan yaitu :

$$\frac{dX_S}{dt} = \Lambda - \lambda_f X_S + \delta X_I - \mu X_S$$

$$\frac{dX_I}{dt} = \lambda_f X_S - (\delta + \mu) X_I$$

$$\frac{dY_S}{dt} = \Lambda - \lambda_m Y_S + \delta Y_I - \mu Y_S$$

$$\frac{dY_I}{dt} = \lambda_m Y_S - (\delta + \mu) Y_I$$

dengan total populasi $N = N_f + N_m$ dengan N_f merupakan jumlah dari subpopulasi perempuan yang rentan dan subpopulasi perempuan yang terinfeksi, dan N_m merupakan jumlah dari supopulasi laki-laki yang rentan dan subpopulasi laki-laki yang terinfeksi.

2. Terdapat titik ekuilibrium bebas penyakit.

$$P_0 = (X_S^*, X_I^*, Y_S^*, Y_I^*) = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, \frac{\Lambda}{\mu}, 0\right)$$

3. Terdapat kestabilan pada titik ekuilibrium bebas penyakit pada model SIS transmisi *Human Papillomavirus* (HPV) tanpa vaksinasi, yaitu *Stabil Asimtotik Global* yang artinya untuk jangka waktu yang lama subpopulasi akan berkurang dan bertambah sehingga pada akhirnya menjadi konstan pada waktu tertentu.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Clark. *"Analysis, Calculus, and Differential Equations*. University of Georgia. 1999.
[2] Elbasha, E. H. Global Stability of Equilibria in a Two-Sex HPV Vaccination Model. *Bulletin of Mathhematical Biology*. 2007.
[3] Hale, J. K. *Ordinary Differential Equations*. John Wiley dan Sons. 1969.
[4] Harnowo, P. A. "Infeksi Human Papilloma Virus (HPV)". https://health.detik.com/read/2011/08/12/091459/1702079/770/infeksi-human-papilloma-virus--hpv- (di akses tanggal 25 Oktober 2016).
[5] Howard, A. *Aljabar Linear Elementer*. Jakarta : Edisi kelima, Erlangga. 2000.
[6] Jevuska. "Penyakit Menular Seksual - Pengertian dan Sejenisnya." https://www.jevuska.com/category/artikel-kedokteran/kulit/ (di akses tanggal 16 November 2016).
[7] Novita. Diskusi Ilmiah. http://els.fkik.umy.ac.id/mod/forum/discuss.php?d=10661 (di akses tanggal 15 November 2016)
[8] Perko, L. *Differential Equations Dynamika System*. Springed-Verlag, New York. 1991.
[9] Ribassin, L. A SIS Model for Human Papillomavirus Transmission. Edisi ke-1, halaman 00555733. *Institut de Cancerologie Gustave Roussy*. 2010.
[10] Ripno, J. I. *Pemodelan Matematika*. Yogyakarta: Graha Ilmu. 2012.
[11] Sinatra, Y. Penyebaran Virus HPV Sembuh Selamanya. http://pusatpengobatanpenyakitkelamin.blogspot.co.id/2016/02/penyembuhan-virus-hpv-sembuh-selamanya.html (di akses tanggal 15 November 2016).

[12] Strogatz. *Nonlinear Dynamics And Chaos.* Avalon Publishing. Harvard University. 1994.
[13] Subiono. *Matematika Sistem.* Jurusan Matematika, FMIPA-ITS. Surabaya. 2010.
[14] Wartono. *Persamaan Differensial Biasa dan Masalah Nilai Awal*. Pekanbaru: Edisi pertama, Suska Press-UIN Sultan Syarif Kasim Riau. 2009.
[15] Widodo. *Pengantar Model Matematika*. Universitas Gadjah Mada. Yogyakarta. 2007.