Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol 5, No 1, Januari 2019
ISSN 2460-4542, e-ISSN 2615-8663

Invers Matriks Toeplitz Bentuk Khusus Menggunakan Metode Adjoin

Corry Corazon Marzuki [1], Fitri Aryani[2]
[1,2] Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: khodijah_fitri@uin-suska.ac.id; corry@uin-suska.ac.id

ABSTRAK

Invers matriks merupakan hal yang penting dalam bidang ilmu matematika, terutama ilmu aljabar. Aplikasi dari Invers matriks banyak dipakai pada bidang yang lain selain aljabar, baik dibidang matematika maupun dibidang yang lain. Banyak metode dalam menentukan invers matriks, salah satunya metode adjoin. Metode adjoin merupakan metode yang sederhana dalam menentukan invers matriks. Penelitian ini bertujuan menentukan invers matriks toeplitz bentuk khusus dengan menggunakan metode adjoin. Dalam menentukan invers matriks Toeplitz bentuk khusus, ada tiga langkah yang dikerjakan. Pertama, diperhatikan pola dari determinan matriks Toeplitz bentuk khusus orde 1 x 1 sampai 20 x 20 sehingga didapat bentuk umumnya. Kedua, perhatikan pola matriks kofaktor orde 2 x 2 sampai 10x10 sehingga diperoleh bentuk umumnya. Dan terakhir, dengan menggunakan metode adjoin untuk mendapatkan bentuk umum invers matriks Toeplitz bentuk khusus orde *n x n* .

Kata kunci: adjoin, determinan, invers matriks, matriks kofaktor, matriks Toeplitz

ABSTRACT

Inverse matrix is important in the field of mathematics, especially algebra. Applications from inverse matrix are many used in fields other than algebra, both in mathematics and in other fields. Many methods for determining matrix inverses, one of them is adjoin method. Adjoin method is a simple method of determining matrix inverses. This study aims to determine the inverse of a special toeplitz matrix using the adjoin method. In determining the inverse of a special Toeplitz matrix, there are three steps to be taken. First, the pattern of the determinant of the Toeplitz matrix determines the special order of order 1 x 1 to 20 x 20 so that the general form is obtained. Second, consider the pattern of the 2 x 2 to 10x10 cofactor matrix so that the general form is obtained. And finally, by using the adjoin method to get the general form of Toeplitz matrix inverses of special order n x n.

Keywords: *determinant, cofactor expansion, mathematical induction, Toeplitz matrix.*

Pendahuluan

Menurut Howard Anton dan Chris Rorres (2004), matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Salah satu jenis matriks adalah matriks Toeplitz. Menurut Robert (2005), matriks Toeplitz adalah matriks simetris yang sirkulan, dimana setiap unsur pada diagonal utamanya sama dan setiap unsur pada subdiagonal yang bersesuaian dengan diagonal utamanya juga sama. Bentuk umum dari matriks toeplitz adalah sebagai berikut.

$$T_n = (t_{ij}) \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \cdots & t_{-(n-2)} & t_{-(n-1)} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{-(n-3)} & t_{-(n-2)} \\ t_2 & t_1 & t_0 & \cdots & t_{-(n-4)} & t_{-(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t_{(n-2)} & t_{(n-3)} & t_{(n-4)} & \cdots & t_0 & t_{-1} \\ t_{(n-1)} & t_{(n-2)} & t_{(n-3)} & \cdots & t_1 & t_0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

dimana t_{ij} adalah entri-entri yang terletak pada baris ke-*i* dan kolom ke-*j*.

Pembahasan menarik dalam teori matriks adalah menentukan invers dari suatu matriks. Sebuah matriks memiliki invers jika matriks tersebut memiliki determinan tak nol. Beberapa metode yang digunakan dalam menghitung invers suatu matriks adalah Substitusi, Partisi Matriks, Matriks Adjoin, Eliminasi Gauss, Eliminasi Gauss-Jordan, Perkalian Matriks Invers Elementer, dan Dekomposisi Matriks LU. Permasalahan dalam mencari invers matriks biasanya berhubungan dengan ukuran matriks, semakin besar ukuran matriks akan semakin sulit untuk menentukan invers dari matriks tersebut, sehingga dibutuhkan formula yang tepat untuk menentukan invers dari suatu matriks.

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol 5, No 1, Januari 2019
ISSN 2460-4542, e-ISSN 2615-8663

Salah satu kegunaan invers dari suatu matriks adalah untuk menyelesaikan sistem persamaan linier. Sistem persamaan linier ini banyak sekali kegunaannya dalam memudahkan pengambilan keputusan di berbagai bidang, seperti bidang ekonomi, pendidikan, manajemen, kimia, dan sebagainya. Pada Tahun 1991, Kouachi telah melakukan penelitian mengenai nilai eigen dan vektor eigen dari matriks tridiagonal dengan entri-entri diagonalnya tidak konstan. Selanjutnya, pada Tahun 2005 Gray dan Robert juga melakukan penelitian mengenai teori matriks dengan judul "*Toeplitz and Circulant Matrices*".

Bakti Siregar dkk. juga membahas mengenai matriks Toeplitz pada Tahun 2014 pada makalahnya yang berjudul "Invers Suatu Matriks Toeplitz Menggunakan Metode Adjoin". Di dalam makalah tersebut, dirumuskan formula invers dari suatu matriks Toeplitz dengan bentuk khusus seperti berikut ini :

$$T_n = \begin{bmatrix} 0 & x & \cdots & x \\ x & 0 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \cdots & 0 \end{bmatrix} \forall\, x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Adapun hasil yang diperoleh yaitu bentuk umum dari determinan, matriks kofaktor dan invers dari matriks Toeplitz berorde *n* pada Persamaan (2).

1. Bentuk Umum determinan matriks Toeplitz berorde *n* pada Persamaan (1) adalah
$$\det(T_n) = (-1)^n (n-1) x^n$$
2. Bentuk Umum kofaktor-kofaktor yang terletak pada baris ke-*i* dan kolom ke-*j* dari matriks Toeplitz berorde *n* pada Persamaan (1.2) adalah
$$K_{ij}T_n = \begin{cases} \det(T_n) & ;\text{untuk } i = j \\ (-1)^{n+1} x^{n-1} & ;\text{untuk } i \neq j \end{cases}$$
3. Bentuk Umum invers dari matriks Toeplitz berorde *n* pada Persamaan (1) adalah
$${T_n}^{-1} = t_{ij} = \begin{cases} \dfrac{-n-2}{(n-1)x} & ;\text{untuk } i = j \\ \dfrac{1}{(n-1)x} & ;\text{untuk } i \neq j \end{cases}$$

Dari hasil diatas, dapat dilihat bahwa ada rumus khusus untuk menentukan invers dari suatu matriks Toeplitz yang bentuknya unik seperti Persamaan (2). Sehingga untuk menghitung inversnya tidak perlu lagi proses yang panjang dan rumit menggunakan metode-metode yang biasa digunakan, namun cukup dengan mensubstitusikan nilai *n* dan *x* yang ada pada matriks ke rumus-rumus di atas.

Pada tahun 2015, penulis juga telah melakukan penelitian mengenai invers matriks Toeplitz tridiagonal. Menurut Salkuyeh (2006), suatu matriks Toeplitz tridiagonal berorde n adalah suatu matriks yang berbentuk :

$$A = \begin{bmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{bmatrix} \quad \text{dengan } a, c \neq 0 \in \mathbb{R} \tag{3}$$

Pada penelitian tersebut, penulis telah mendapatkan bentuk umum dari determinan, matriks kofaktor, dan invers dari matriks Toeplitz tridiagonal pada Persamaan (3).

Selanjutnya pada tahun 2018, penulis telah melakukan penelitian mengenai determinan mariks Toeplitz berbentuk khusus seperti berikut:

$$|A_3| = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix} \text{dengan } a \neq 0 \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Hasil yang diperoleh pada makalah tersebut adalah mendapatkan bentuk umum determinan matriks Toeplitz berbentuk khusus tersebut, yaitu:

$$|A_n| = \begin{cases} 0, & jika\ n \equiv\ 6\ (mod\ 2)\ atau\ n =\ 6\ (mod\ 5) \\ 1 & jika\ n \equiv\ 6\ (mod\ 0)\ atau\ n =\ 6\ (mod\ 1) \\ -1 & jika\ n \equiv\ 6\ (mod\ 3)\ atau\ n =\ 6\ (mod\ 4) \end{cases} \tag{5}$$

Oleh karena itu, penulis tertarik untuk melanjutkan penelitian tahun 2018 tersebut yaitu mendapatkan formulasi/bentuk umum matriks kofaktor dan invers dari suatu matriks Toeplitz bentuk khusus pada Persamaan (4) menggunakan metode adjoin. Dengan keunikan bentuk matriks toeplitz ini, penulis menduga adanya sifat-sifat khusus pada matriks ini sehingga matriks kofaktor dan invers yang lebih sederhana dibandingkan matriks secara umum. Dengan adanya rumus tersebut, diharapkan dapat memudahkan kita dalam menentukan matriks kofaktor invers dari matriks Toeplitz dengan bentuk khusus yang ada pada Persamaan (4). Sehingga hal ini diharapkan dapat membantu berbagai pihak, baik di bidang ekonomi, pendidikan, manajemen, kimia, dan sebagainya, yang membutuhkan aplikasi invers dari suatu matriks.

Metode dan Bahan

Adapun tinjauan pustaka yang penulis gunakan dalam menyusun penelitian ini adalah matriks Toeplitz, determinan, determinan matriks Toeplitz, serta induksi matematika. Terdapat banyak jenis-jenis matriks, salah satunya adalah matriks Toeplitz. Berikut diberikan definisi matriks Toeplitz.

Definisi 1 (Robert, 2005) Sebuah matriks toeplitz adalah matrik berukuran $n \times n$ dinotasikan sebagai $T_n = [t_{kj}; k, j = 0,1, \dots, n-1]$, dengan $t_{kj} = t_{k-j}$. Matriks toeplitz dinyatakan dalam bentuk

$$T_n = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \cdots & t_{-(n-1)} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{-(n-2)} \\ t_2 & t_1 & t_0 & \cdots & t_{-(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{(n-1)} & t_{(n-1)} & \cdots & t_1 & t_0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Suatu matriks akan mempunyai invers apabila determinan matriks tersebut tak nol. Berikut akan didefinisikan invers dari matriks.

Definisi 2. (Ruminta, 2009) Jika A adalah matriks ukuran $n \times n$ dan jika ada matriks B ukuran $n \times n$ sedemikian sehingga :

$$AB = BA = I \tag{7}$$

dengan I adalah matriks identitas ukuran $n \times n$, maka matriks A disebut non singular atau *invertibel* dan matriks A merupakan invers dari B atau B merupakan invers dari A.

Invers suatu matriks dapat ditentukan dengan beberapa metode yaitu Substitusi, Partisi Matriks, Matriks Adjoin, Eliminasi Gauss, Eliminasi Gauss Jordan, Perkalian Matriks Invers Elementer, dan Dekomposisi Matriks LU. Berdasarkan metode-metode tersebut penulis hanya menggunakan metode adjoin dalam mencari invers suatu matriks.

Definisi 3. (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004) Jika Aadalah matriks $n \times n$ sebarang dan C_{ij} adalah kofaktor daria_{ij} maka matriks

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \tag{8}$$

disebut matriks kofaktor dari A. Transpose dari matrik ini disebut adjoin dari A dan dinyatakan sebagai $adj\ (A)$.

Suatu matriks A mempunyai invers atau tidak dapat dilihat dari determinan matriks A tersebut. Apabila $\det(A) \neq 0$ berarti matriks A mempunyai invers. Hal tersebut dijelaskan oleh teorema berikut.

Teorema 1. (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004) Suatu matriks kuadrat A dapat dibalik jika dan hanya jika $det(A) \neq 0$.

Berdasarkan pembahasan sebelumnya telah diperoleh formula adjoin yang akan digunakan untuk mencari invers dari suatu matriks yang dapat dibalik. Berikut diberikan teorema untuk mencari invers tersebut.

Teorema 2. (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004) Jika A adalah suatu matriks yang dapat dibalik, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A) \tag{9}$$

Ada beberapa penelitian yang terkait dengan penelitian yang akan dikaji kali ini. Diantara penelitian-penelitian tersebut yang sangat mendukung adalah Siregar dkk [6] dan Aryani dkk [2]. Matriks toeplitz yang dibahas oleh Siregar, dkk [6] pada tahun 2014 adalah matriks toeplitz T_n seperti Persamaan (2). Mereka telah mendapatkan rumus umum determinan, matriks kofaktor, dan invers dari matriks toeplitz tersebut. Hasil penelitiannya disajikan pada makalah ini hanya mengenai matriks kofaktor, dan invers saja yang tertuang dalam Teorema 3 berikut.

Teorema 3. (Bakti Siregar, dkk, 2014) Misalkan T_n suatu matriks Toeplitz berorde $n \geq 2$ pada Persamaan (1) di mana $\forall x \in \mathbb{R}$ maka kofaktor-kofaktor matriks Toeplitz T_n adalah

$$K_{ij}T_n = \begin{cases} |T_{n-1}|, & untuk\ i = j \\ (-1)^{n+1}x^{n-1}, & untuk\ i \neq j \end{cases} \tag{10}$$

di mana $K_{ij}T_n$ kofaktor-kofaktor yang terletak dibaris ke-i dan kolom ke-j.

Teorema 4. **(Bakti Siregar, dkk, 2014)** Misalkan T_n suatu matriks Toeplitz berorde $n \geq 2$ pada Persamaan (1) di mana $\forall x \in \mathbb{R}$ dan $|T_n| \neq 0$ maka invers matriks Topelitz T_n adalah

$$T_n^{-1} = t_{ij} = \begin{cases} \frac{-(n-2)}{(n-1)x}, & untuk\ i = j \\ \frac{1}{(n-1)x}, & untuk\ i \neq j \end{cases} \tag{11}$$

t_{ij} adalah entri-entri yang terletak dibaris ke- i dan kolom ke- j.

Salah satu metode pembuktian yang digunakan untuk membuktikan rumus yang diperoleh dari pola rekursif tersebut adalah induksi matematika. Induksi matematika adalah salah satu metode pembuktian dari banyak teorema dalam teori bilangan maupun dalam matematika lainnya. Induksi matematika merupakan salah satu argumentasi pembuktian suatu teorema atau pernyataan matematika yang semesta pembicaraannya himpunan bilangan bulat atau lebih khusus himpunan bilangan asli Sukirman [7].

Misalkan $\mathrm{p}(n)$ adalah suatu proporsi/pernyataan yang akan dibuktikan kebenarannya untuk setiap bilangan asli n. Langkah-langkah pembuktiannya dengan induksi matematika adalah sebagai berikut :

1. Langkah (1) : Ditunjukkan bahwa $\mathrm{p}(1)$ benar.
2. Langkah (2) : Diasumsikan bahwa $\mathrm{p}(k)$ benar untuk suatu bilangan asli k dan akan ditunjukkan bahwa $\mathrm{p}(k+1)$ juga benar.

Metodologi penelitian yang digunakan adalah studi literatur terdapat beberapa langkah yang dikerjakan. Pertama menentukan matriks kofaktor dan invers dari matriks toeplitz bentuk khusus pada Persamaan (4) orde 2×2 sampai 10×10, menduga bentuk umum matriks kofaktor dan invers dari matriks toeplitz bentuk khusus pada Persamaan (4) dengan memperhatikan pola rekursifnya. Kedua membuktian bentuk umum matriks kofaktor dan invers menggunakan metode induksi matematika.

Hasil dan Pembahasan

Bentuk umum Matriks Kofaktor dari Matriks Toeplitz Bentuk Khusus Orde *n x n*

Setelah kita dapat menentukan matriks kofaktor dari matriks toeplitz bentuk khusus dari orde 2 x 2 sampai 10 x 10, maka kita dapat memformulasikan bentuk umum matriks kofaktor dari matriks toeplitz bentuk khusus untuk orde *n x n* .Berikut diberikan formulasi umum matriks kofaktor dari matriks toeplitz bentuk khusus orde *n x n* dalam Teorema 5, serta pembuktiannya menggunakan pembuktian langsung.

Teorema 5 Diberikan A_n suatu matriks toeplitz bentuk khusus berorde $n \geq 1$ pada Persamaan (4) dengan $a \neq 0, a \in \mathbb{R}$ maka matriks kofaktor dari matriks A_n adalah:

$$C_n = \begin{bmatrix} (-1)^2|A_{n-1}| & (-1)^3 a\,|A_{n-2}| & (-1)^4 a^2\,|A_{n-3}| & \cdots & (-1)^n a^{n-2}\,|A_1| & (-1)^{n+1} a^{n-1} \\ (-1)^3\, a^{-1}\,|A_{n-2}| & (-1)^4\,|A_1|\,|A_{n-2}| & (-1)^5\, a\,|A_1|\,|A_{n-3}| & \cdots & (-1)^{n+1}\, a^{n-3}\,|A_1|\,|A_1| & (-1)^{n+2}\, a^{n-2}\,|A_1| \\ (-1)^4\, a-^{2}\,|A_{n-3}| & (-1)^5\, a^{-1}\,|A_1|\,|A_{n-3}| & (-1)^6\,|A_2|\,|A_{n-3}| & \cdots & (-1)^{n+2}\, a^{n-4}\,|A_1|\,|A_2| & (-1)^{n+3}\, a^{n-3}\,|A_2| \\ (-1)^5\, a^{-3}\,|A_{n-4}| & (-1)^6\, a^{-2}\,|A_2|\,|A_{n-4}| & (-1)^7\, a^{-1}\,|A_2|\,|A_{n-4}| & \cdots & (-1)^{n+3}\, a^{n-5}\,|A_1|\,|A_3| & (-1)^{n+4}\, a^{n-4}\,|A_3| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^n\, a^{-n+2}\,|A_1| & (-1)^{n+1}\, a^{-n+3}\,|A_1|\,|A_1| & (-1)^{n+2}\, a^{-n+4}\,|A_1|\,|A_2| & \cdots & (-1)^{n+n-2}\,|A_{n-2}|\,|A_1| & (-1)^{n+n-2}\, a\,|A_{n-2}| \\ (-1)^{n+1}\, a^{-n+1} & (-1)^{n+2}\, a^{-n+2}\,|A_1| & (-1)^{n+3}\, a^{-n+3}\,|A_2| & \cdots & (-1)^{n+n-1}\, a^{-1}\,|A_{n-2}| & (-1)^{2n}\,|A_{n-1}| \end{bmatrix}$$

Bukti :

Perhatikan matriks berikut

$$|A_3| = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

dengan $a \neq 0 \in \mathbb{R}$.

Selanjutnya kita akan membuktikan setiap entri dari matriks kofaktornya. Mulai dari entri matriks kofaktor baris pertama dan kolom pertama sampai baris pertama kolom ke n . Selanjutnya baris kedua dan kolom pertama sampai baris kedua dan kolom ke n. Seterusnya dilakukan hal yang sama sampai baris ke n dan kolom ke n. Prosesnya diberikan sebagai berikut:

a. Entri baris pertama matriks kofaktor sebagai berikut:

$$C_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & 1 \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^2 |A_{n-1}|$$

$$C_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} a & 1/a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & 1 \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^3 a\,|A_{n-2}|$$

$$C_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1/a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & 1 \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^4 a^2 \left|A_{n-3}\right|$$

Hal yang sama dilakukan sampai C_{1n}, sehingga kita dapat bentuk umum untuk entri baris pertama matriks kofaktor, yaitu:

$$C_{1n}=(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} a & 1 & 1/a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^{n+1} a^{n-1}$$

b. Entri baris kedua matriks kofaktor sebagai berikut:

$$C_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & 1 \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^3 1/a \left|A_{n-2}\right|$$

$$C_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & 1/a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & 1 \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^4 \left|A_{n-2}\right| .1 = (-1)\left|A_{n-2}\right|\left|A_1\right| = (-1)\left|A_1\right|\left|A_{n-2}\right|$$

$$C_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1/a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & 1 \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^5 . a\left|A_1\right|\left|A_{n-3}\right|$$

Hal yang sama dilakukan sampai C_{2n}, sehingga kita dapat bentuk umum untuk entri baris kedua matriks kofaktor, yaitu:

$$C_{2n} = (-1)^{n+2} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = (-1)^{n+2}\, 1\, a^{n-2} = (-1)^{n+2}\, a^{n-2}\, |A_1|$$

c. Entri baris ketiga matriks Kofaktor sebagai berikut:

$$C_{31} = (-1)^{4} \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & a & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & 1 \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^{4} 1/a\, |A_{n-3}|$$

$$C_{32} = (-1)^{5} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & 1/a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & 1 \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^{5}\, 1\,.\,1/a\, |A_{n-3}| = (-1)^{5}\, 1/a\, |A_1|\, |A_{n-3}|$$

$$C_{33} = (-1)^{6} \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & 1 \end{bmatrix}_{n-1} = (-1)^{6} |A_2|\, |A_{n-3}|$$

Hal yang sama dilakukan sampai C_{3n}, sehingga kita dapat bentuk umum untuk entri baris kedua matriks kofaktor, yaitu:

$$C_{3n} = (-1)^{n+3} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^{n+3}\, a^{n-3}\, |A_2|$$

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol 5, No 1, Januari 2019
ISSN 2460-4542, e-ISSN 2615-8663

Entri baris ke-4,5,6 dan seterusnya dilakukan dengan cara yang sama, sehingga di peroleh entri untuk baris ke-n sebagai berikut :

$$C_{n1} = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 & 1/a \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^{n+1}\, 1/a^{n-1}$$

$$C_{n2} = (-1)^{n+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & 1/a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 & 1/a \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^{n+2}\, 1\,.\,1/a^{n-1} = (-1)^{n+2}\, 1/a^{n-2}\, |A_1|$$

$$C_{n3} = (-1)^{n+3} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1/a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 & 1/a \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^{n+3}\, 1/a^{n-3}\, |A_2|$$

Hal yang sama dilakukan sampai C_{nn}, sehingga kita dapat bentuk umum untuk entri baris kedua matriks kofaktor, yaitu:

$$C_{nn} = (-1)^{2n} \begin{vmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^{2n}\, |A_{n-1}|$$

Dari perhitungan diatas, diperoleh :

$$C_n = \begin{bmatrix} (-1)^2|A_{n-1}| & (-1)^3 a\,|A_{n-2}| & (-1)^4 a^2\,|A_{n-3}| & \cdots & (-1)^n a^{n-2}\,|A_1| & (-1)^{n+1} a^{n-1} \\ (-1)^3\, a^{-1}\,|A_{n-2}| & (-1)^4\,|A_1|\,|A_{n-2}| & (-1)^5\, a\,|A_1|\,|A_{n-3}| & \cdots & (-1)^{n+1}\, a^{n-3}\,|A_1|\,|A_1| & (-1)^{n+2}\, a^{n-2}\,|A_1| \\ (-1)^4\, a-^2\,|A_{n-3}| & (-1)^5\, a^{-1}\,|A_1|\,|A_{n-3}| & (-1)^6\,|A_2|\,|A_{n-3}| & \cdots & (-1)^{n+2}\, a^{n-4}\,|A_1|\,|A_2| & (-1)^{n+3}\, a^{n-3}\,|A_2| \\ (-1)^5\, a^{-3}\,|A_{n-4}| & (-1)^6\, a^{-2}\,|A_2|\,|A_{n-4}| & (-1)^7\, a^{-1}\,|A_2|\,|A_{n-4}| & \cdots & (-1)^{n+3}\, a^{n-5}\,|A_1|\,|A_3| & (-1)^{n+4}\, a^{n-4}\,|A_3| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^n\, a^{-n+2}\,|A_1| & (-1)^{n+1}\, a^{-n+3}\,|A_1|\,|A_1| & (-1)^{n+2}\, a^{-n+4}\,|A_1|\,|A_2| & \cdots & (-1)^{n+n-2}\,|A_{n-2}|\,|A_1| & (-1)^{n+n-2}\, a\,|A_{n-2}| \\ (-1)^{n+1}\, a^{-n+1} & (-1)^{n+2}\, a^{-n+2}\,|A_1| & (-1)^{n+3}\, a^{-n+3}\,|A_2| & \cdots & (-1)^{n+n-1}\, a^{-1}\,|A_{n-2}| & (-1)^{2n}\,|A_{n-1}| \end{bmatrix}$$

$\blacksquare$

Bentuk Umum Invers Matriks Toeplitz Bentuk khusus Orde $n \times n$

Bentuk umum invers matriks toeplitz bentuk khusus orde $n \times n$, diperoleh bentuknya disajikan dalam Teorema 6, sebagai berikut:

Teorema 6 Diberikan matriks toeplitz bentuk khusus A_n berorde $n \geq 2$ yang sesuai Persamaan (4) dengan $a \neq 0, a \in \mathbb{R}$ maka invers dari matriks A_n adalah:

1. Jika $n \equiv 6 \ (mod\ 2)\ atau\ n = 6\ (mod\ 5)$, maka A_n tidak mempunyai invers.
2. Jika $n \equiv 6\ (mod\ 0)\ atau\ n = 6\ (mod\ 1)$, maka

$$A_n^{-1} = \begin{bmatrix} (-1)^2|A_{n-1}| & (-1)^3 a^{-1}|A_{n-2}| & (-1)^4 a^{-2}|A_{n-3}| & \cdots & (-1)^n a^{-n+2}|A_1| & (-1)^{n+1} a^{-n+1} \\ (-1)^3 a^1 |A_{n-2}| & (-1)^4 |A_1||A_{n-2}| & (-1)^5 a^{-1}|A_1||A_{n-3}| & \cdots & (-1)^{n+1} a^{-n+3}|A_1||A_1| & (-1)^{n+2} a^{-n+2}|A_1| \\ (-1)^4 a^2 |A_{n-3}| & (-1)^5 a^1 |A_1||A_{n-3}| & (-1)^6 |A_2||A_{n-3}| & \cdots & (-1)^{n+2} a^{-n+4}|A_1||A_2| & (-1)^{n+3} a^{-n+3}|A_2| \\ (-1)^5 a^3 |A_{n-4}| & (-1)^6 a^2 |A_2||A_{n-4}| & (-1)^7 a^1 |A_2||A_{n-4}| & \cdots & (-1)^{n+3} a^{-n+5}|A_1||A_3| & (-1)^{n+4} a^{-n+4}|A_3| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^n a^{n-2}|A_1| & (-1)^{n+1} a^{n-3}|A_1||A_1| & (-1)^{n+2} a^{n-4}|A_1||A_2| & \cdots & (-1)^{n+n-2}|A_{n-2}||A_1| & (-1)^{n+n-2} a^{-1}|A_{n-2}| \\ (-1)^{n+1} a^{n-1} & (-1)^{n+2} a^{n-2}|A_1| & (-1)^{n+3} a^{n-3}|A_2| & \cdots & (-1)^{n+n-1} a|A_{n-2}| & (-1)^{2n}|A_{n-1}| \end{bmatrix}$$

3. Jika $n \equiv 6\ (mod\ 3)\ atau\ n = 6\ (mod\ 4)$, maka

$$A_n^{-1} = -\begin{bmatrix} (-1)^2|A_{n-1}| & (-1)^3 a^{-1}|A_{n-2}| & (-1)^4 a^{-2}|A_{n-3}| & \cdots & (-1)^n a^{-n+2}|A_1| & (-1)^{n+1} a^{-n+1} \\ (-1)^3 a^1 |A_{n-2}| & (-1)^4 |A_1||A_{n-2}| & (-1)^5 a^{-1}|A_1||A_{n-3}| & \cdots & (-1)^{n+1} a^{-n+3}|A_1||A_1| & (-1)^{n+2} a^{-n+2}|A_1| \\ (-1)^4 a^2 |A_{n-3}| & (-1)^5 a^1 |A_1||A_{n-3}| & (-1)^6 |A_2||A_{n-3}| & \cdots & (-1)^{n+2} a^{-n+4}|A_1||A_2| & (-1)^{n+3} a^{-n+3}|A_2| \\ (-1)^5 a^3 |A_{n-4}| & (-1)^6 a^2 |A_2||A_{n-4}| & (-1)^7 a^1 |A_2||A_{n-4}| & \cdots & (-1)^{n+3} a^{-n+5}|A_1||A_3| & (-1)^{n+4} a^{-n+4}|A_3| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^n a^{n-2}|A_1| & (-1)^{n+1} a^{n-3}|A_1||A_1| & (-1)^{n+2} a^{n-4}|A_1||A_2| & \cdots & (-1)^{n+n-2}|A_{n-2}||A_1| & (-1)^{n+n-2} a^{-1}|A_{n-2}| \\ (-1)^{n+1} a^{n-1} & (-1)^{n+2} a^{n-2}|A_1| & (-1)^{n+3} a^{n-3}|A_2| & \cdots & (-1)^{n+n-1} a|A_{n-2}| & (-1)^{2n}|A_{n-1}| \end{bmatrix}$$

Bukti:

1. Jika $n \equiv 6\ (mod\ 2)\ atau\ n = 6\ (mod\ 5)$, maka berdasarkan Teorema 5 diperoleh $|A_n| = 0$, artinya A_n tidak mempunyai invers.
2. Jika $n \equiv 6\ (mod\ 0)\ atau\ n = 6\ (mod\ 1)$, maka berdasarkan Teorema 5 diperoleh $|A_n| = 1$. Sehingga $(A_n)^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{A_n}|} adj(A_n) = \frac{1}{1}(C_n)^T = (C_n)^T$, yaitu:

$$A_n^{-1} = \begin{bmatrix} (-1)^2|A_{n-1}| & (-1)^3 a^{-1}|A_{n-2}| & (-1)^4 a^{-2}|A_{n-3}| & \cdots & (-1)^n a^{-n+2}|A_1| & (-1)^{n+1} a^{-n+1} \\ (-1)^3 a^1 |A_{n-2}| & (-1)^4 |A_1||A_{n-2}| & (-1)^5 a^{-1}|A_1||A_{n-3}| & \cdots & (-1)^{n+1} a^{-n+3}|A_1||A_1| & (-1)^{n+2} a^{-n+2}|A_1| \\ (-1)^4 a^2 |A_{n-3}| & (-1)^5 a^1 |A_1||A_{n-3}| & (-1)^6 |A_2||A_{n-3}| & \cdots & (-1)^{n+2} a^{-n+4}|A_1||A_2| & (-1)^{n+3} a^{-n+3}|A_2| \\ (-1)^5 a^3 |A_{n-4}| & (-1)^6 a^2 |A_2||A_{n-4}| & (-1)^7 a^1 |A_2||A_{n-4}| & \cdots & (-1)^{n+3} a^{-n+5}|A_1||A_3| & (-1)^{n+4} a^{-n+4}|A_3| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^n a^{n-2}|A_1| & (-1)^{n+1} a^{n-3}|A_1||A_1| & (-1)^{n+2} a^{n-4}|A_1||A_2| & \cdots & (-1)^{n+n-2}|A_{n-2}||A_1| & (-1)^{n+n-2} a^{-1}|A_{n-2}| \\ (-1)^{n+1} a^{n-1} & (-1)^{n+2} a^{n-2}|A_1| & (-1)^{n+3} a^{n-3}|A_2| & \cdots & (-1)^{n+n-1} a|A_{n-2}| & (-1)^{2n}|A_{n-1}| \end{bmatrix}$$

3. Jika $n \equiv 6\ (mod\ 3)\ atau\ n = 6\ (mod\ 4)$, maka berdasarkan Teorema 5 diperoleh $|A_n| = -1$. Sehingga $(A_n)^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{A_n}|} adj(A_n) = \frac{1}{-1}(C_n)^T = -(C_n)^T$, yaitu:

$$A_n^{-1} = -\begin{bmatrix} (-1)^2|A_{n-1}| & (-1)^3 a^{-1}|A_{n-2}| & (-1)^4 a^{-2}|A_{n-3}| & \cdots & (-1)^n a^{-n+2}|A_1| & (-1)^{n+1} a^{-n+1} \\ (-1)^3 a^1 |A_{n-2}| & (-1)^4 |A_1||A_{n-2}| & (-1)^5 a^{-1}|A_1||A_{n-3}| & \cdots & (-1)^{n+1} a^{-n+3}|A_1||A_1| & (-1)^{n+2} a^{-n+2}|A_1| \\ (-1)^4 a^2 |A_{n-3}| & (-1)^5 a^1 |A_1||A_{n-3}| & (-1)^6 |A_2||A_{n-3}| & \cdots & (-1)^{n+2} a^{-n+4}|A_1||A_2| & (-1)^{n+3} a^{-n+3}|A_2| \\ (-1)^5 a^3 |A_{n-4}| & (-1)^6 a^2 |A_2||A_{n-4}| & (-1)^7 a^1 |A_2||A_{n-4}| & \cdots & (-1)^{n+3} a^{-n+5}|A_1||A_3| & (-1)^{n+4} a^{-n+4}|A_3| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^n a^{n-2}|A_1| & (-1)^{n+1} a^{n-3}|A_1||A_1| & (-1)^{n+2} a^{n-4}|A_1||A_2| & \cdots & (-1)^{n+n-2}|A_{n-2}||A_1| & (-1)^{n+n-2} a^{-1}|A_{n-2}| \\ (-1)^{n+1} a^{n-1} & (-1)^{n+2} a^{n-2}|A_1| & (-1)^{n+3} a^{n-3}|A_2| & \cdots & (-1)^{n+n-1} a|A_{n-2}| & (-1)^{2n}|A_{n-1}| \end{bmatrix}$$

Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan disimpulkan bahwa untuk mendapatkan invers matriks Toeplitz bentuk khusus dengan menggunakan metode adjoin terlebih dahulu ditentukan nilai determinan dari matriks tersebut. Selanjutnya kita menentukan matriks kofaktornya yang ditransposkan yang disebut adjoin dari matriks awal. Barulah akhirnya dengan mensubstitusi ke persamaan invers matriks didapat invers matriks Toeplitz bentuk khusus. Berikut diberikan bentuk umum dari matriks kofaktor dan inversnya.

1. Bentuk umum matriks kofaktor dari matriks Toeplitz bentuk khusus, yaitu:

$$C_n = \begin{bmatrix} (-1)^2|A_{n-1}| & (-1)^3 a\,|A_{n-2}| & (-1)^4 a^2\,|A_{n-3}| & \cdots & (-1)^n a^{n-2}\,|A_1| & (-1)^{n+1} a^{n-1} \\ (-1)^3 a^{-1}\,|A_{n-2}| & (-1)^4\,|A_1|\,|A_{n-2}| & (-1)^5 a\,|A_1|\,|A_{n-3}| & \cdots & (-1)^{n+1} a^{n-3}\,|A_1|\,|A_1| & (-1)^{n+2} a^{n-2}\,|A_1| \\ (-1)^4 a-^2\,|A_{n-3}| & (-1)^5 a^{-1}\,|A_1|\,|A_{n-3}| & (-1)^6\,|A_2|\,|A_{n-3}| & \cdots & (-1)^{n+2} a^{n-4}\,|A_1|\,|A_2| & (-1)^{n+3} a^{n-3}\,|A_2| \\ (-1)^5 a^{-3}\,|A_{n-4}| & (-1)^6 a^{-2}\,|A_2|\,|A_{n-4}| & (-1)^7 a^{-1}\,|A_2|\,|A_{n-4}| & \cdots & (-1)^{n+3} a^{n-5}\,|A_1|\,|A_3| & (-1)^{n+4} a^{n-4}\,|A_3| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^n a^{-n+2}\,|A_1| & (-1)^{n+1} a^{-n+3}\,|A_1|\,|A_1| & (-1)^{n+2} a^{-n+4}\,|A_1|\,|A_2| & \cdots & (-1)^{n+n-2}\,|A_{n-2}|\,|A_1| & (-1)^{n+n-2} a\,|A_{n-2}| \\ (-1)^{n+1} a^{-n+1} & (-1)^{n+2} a^{-n+2}\,|A_1| & (-1)^{n+3} a^{-n+3}\,|A_2| & \cdots & (-1)^{n+n-1} a^{-1}\,|A_{n-2}| & (-1)^{2n}\,|A_{n-1}| \end{bmatrix}$$

2. Bentuk umum dari invers matriks Toeplitz bentuk khusus, yaitu:
   a. Jika $n \equiv 6\ (mod\ 2)\ atau\ n = 6\ (mod\ 5)$, maka A_n tidak mempunyai invers.
   b. Jika $n \equiv 6\ (mod\ 0)\ atau\ n = 6\ (mod\ 1)$, maka

$$A_n^{-1} = \begin{bmatrix} (-1)^2|A_{n-1}| & (-1)^3 a^{-1}\,|A_{n-2}| & (-1)^4 a^{-2}\,|A_{n-3}| & \cdots & (-1)^n a^{-n+2}\,|A_1| & (-1)^{n+1} a^{-n+1} \\ (-1)^3 a^1\,|A_{n-2}| & (-1)^4\,|A_1|\,|A_{n-2}| & (-1)^5 a^{-1}\,|A_1|\,|A_{n-3}| & \cdots & (-1)^{n+1} a^{-n+3}\,|A_1|\,|A_1| & (-1)^{n+2} a^{-n+2}\,|A_1| \\ (-1)^4 a^2\,|A_{n-3}| & (-1)^5 a^1\,|A_1|\,|A_{n-3}| & (-1)^6\,|A_2|\,|A_{n-3}| & \cdots & (-1)^{n+2} a^{-n+4}\,|A_1|\,|A_2| & (-1)^{n+3} a^{-n+3}\,|A_2| \\ (-1)^5 a^3\,|A_{n-4}| & (-1)^6 a^2\,|A_2|\,|A_{n-4}| & (-1)^7 a^1\,|A_2|\,|A_{n-4}| & \cdots & (-1)^{n+3} a^{-n+5}\,|A_1|\,|A_3| & (-1)^{n+4} a^{-n+4}\,|A_3| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^n a^{n-2}\,|A_1| & (-1)^{n+1} a^{n-3}\,|A_1|\,|A_1| & (-1)^{n+2} a^{n-4}\,|A_1|\,|A_2| & \cdots & (-1)^{n+n-2}\,|A_{n-2}|\,|A_1| & (-1)^{n+n-2} a^{-1}\,|A_{n-2}| \\ (-1)^{n+1} a^{n-1} & (-1)^{n+2} a^{n-2}\,|A_1| & (-1)^{n+3} a^{n-3}\,|A_2| & \cdots & (-1)^{n+n-1} a\,|A_{n-2}| & (-1)^{2n}\,|A_{n-1}| \end{bmatrix}$$

   c. Jika $n \equiv 6\ (mod\ 3)\ atau\ n = 6\ (mod\ 4)$, maka

$$A_n^{-1} = -\begin{bmatrix} (-1)^2|A_{n-1}| & (-1)^3 a^{-1}\,|A_{n-2}| & (-1)^4 a^{-2}\,|A_{n-3}| & \cdots & (-1)^n a^{-n+2}\,|A_1| & (-1)^{n+1} a^{-n+1} \\ (-1)^3 a^1\,|A_{n-2}| & (-1)^4\,|A_1|\,|A_{n-2}| & (-1)^5 a^{-1}\,|A_1|\,|A_{n-3}| & \cdots & (-1)^{n+1} a^{-n+3}\,|A_1|\,|A_1| & (-1)^{n+2} a^{-n+2}\,|A_1| \\ (-1)^4 a^2\,|A_{n-3}| & (-1)^5 a^1\,|A_1|\,|A_{n-3}| & (-1)^6\,|A_2|\,|A_{n-3}| & \cdots & (-1)^{n+2} a^{-n+4}\,|A_1|\,|A_2| & (-1)^{n+3} a^{-n+3}\,|A_2| \\ (-1)^5 a^3\,|A_{n-4}| & (-1)^6 a^2\,|A_2|\,|A_{n-4}| & (-1)^7 a^1\,|A_2|\,|A_{n-4}| & \cdots & (-1)^{n+3} a^{-n+5}\,|A_1|\,|A_3| & (-1)^{n+4} a^{-n+4}\,|A_3| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^n a^{n-2}\,|A_1| & (-1)^{n+1} a^{n-3}\,|A_1|\,|A_1| & (-1)^{n+2} a^{n-4}\,|A_1|\,|A_2| & \cdots & (-1)^{n+n-2}\,|A_{n-2}|\,|A_1| & (-1)^{n+n-2} a^{-1}\,|A_{n-2}| \\ (-1)^{n+1} a^{n-1} & (-1)^{n+2} a^{n-2}\,|A_1| & (-1)^{n+3} a^{n-3}\,|A_2| & \cdots & (-1)^{n+n-1} a\,|A_{n-2}| & (-1)^{2n}\,|A_{n-1}| \end{bmatrix}$$

Daftar Pustaka

[1] Anton, Howard., dan Rorres, Chris., *Dasar-Dasar Aljabar Linear Versi Aplikasi*, Edisi Ketujuh, Erlangga, Jakarta, 2004.

[2] Aryani, F., and Corazon, C.M., Inverse of Tridiagonal Toeplitz Matrix By Adjoint Method, *Proceeding Icostechs*, FST UIN Suska Riau, ISSN: 2356-542X. 2016.

[3] Gray, Robert M., *Toeplitz and Circulan Matrices*, Stanford 94305, De- partment of Electrical Engineering Stanford, USA. 2005.

[4] Kouachi, S., *Eigenvalues and Eigenvectors of Some Tridiagonal Matrices with Non Constant Diagonal]Entries*. ELA, In press. 1991.

[5] Salkuyeh, Davod Khojasteh., Positive Integer Power of the Tridiagonal Matriks Toeplitz, *International Mathematical Forum*, Mohaghegh Ardabili University, Ardabil, Iran, Vol 1, no. 22, 1061 – 1065, 2006.

[6] Siregar, Bakti., dkk., Invers Suatu Matriks Toeplitz Menggunakan Metode Adjoin, *Saintia Matematika*. 02, (01), 85-94, 2014.

[7] Sukirman., *Pengantar Teori Bilangan*, Hanggar Kreator, Yogyakarta, 2006.