Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol 5, No 1, Januari 2019
ISSN 2460-4542, e-ISSN 2615-8663

Trace Matriks Toepitz Tridiagonal 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Fitri Aryani[1], Nurul Husna[2]
[1,2] Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: khodijah_fitri@uin-suska.ac.id, husnanurul2411@gmail.com

ABSTRAK

Trace matriks adalah jumlah entri-entri pada diagonal utama dari matriks bujur sangkar dan dinotasikan dengan $tr(A)$. Penelitian-penelitian sebelumnya telah dibahas tentang bentuk umum *trace* matriks khusus 2×2 berpangkat bilangan bulat positif. Penelitian kali ini membahas tentang *trace* dari matriks Toeplitz tridiagonal 3×3 berpangkat bilangan bulat positif. Tujuan penelitian untuk mendapatkan bentuk umum dari $(A_3)^n$ dan $tr(A_3)^n$. Ada tiga tahap untuk mendapatkan bentuk umum dari $(A_3)^n$ dan $tr(A_3)^n$, yaitu pertama menentukan bentuk $(A_3)^2$ sampai $(A_3)^{14}$, kedua menduga bentuk umum $(A_3)^n$ untuk n ganjil dan n genap, ketiga membuktikan bentuk umum $(A_3)^n$ dengan menggunakan metode induksi matematika dan $tr(A_3)^n$ dengan pembuktian langsung. Diperoleh bentuk umum $(A_3)^n$ dan $tr(A_3)^n$ dari matriks Toeplitz tridiagonal 3×3 berpangkat bilangan bulat positif untuk n ganjil dan n genap. Aplikasinya akan diberikan dalam bentuk contoh soal.
Kata Kunci : *binomial, induksi matematika, matriks Toeplitz tridagonal, perkalian matriks, trace.*

ABSTRACT

Trace matrix is the sum of entries on main diagonal of a square matrix and it denoted by $tr(A)$. In previous research has been discussed about the general form the trace of special matrix 2×2 rank positive integer. In this paper about the trace of tridiagonal Toeplitz matrix 3×3 rank positve integer. The purpose this final project to obtain the general form of $(A_3)^n$ and $tr(A_3)^n$. There are three steps in determining $(A_3)^n$ and $tr(A_3)^n$, the first step is determining the form $(A_3)^2$ until $(A_3)^{14}$, the second supposing the general form $(A_3)^n$ for odd and even n, the third proves the general form of $(A_3)^n$ by using matematical induction method and $tr(A_3)^n$ with direct proof. The general form $(A_3)^n$ and $tr(A_3)^n$ of tridiagonal Toeplitz matrix 3×3 rank positve integer for odd and even n. The application will be given in the form of sample questions.
Keywords : *binomial, mathematical induction, tridiagonal Toeplitz matrix, matrix multiplication, trace.*

Pendahuluan

Salah satu materi dasar dalam mempelajari ilmu matematika mengenai aljabar adalah matriks. Dalam teori matriks terdapat berbagai macam bentuk matriks, salah satu diantaranya adalah matriks Toeplitz. Matriks Toeplitz mempunyai struktur yang khusus, karena setiap entri pada diagonal utama bernilai sama begitupun dengan entri pada subdiagonal yang bersesuaian dengan diagonal utama juga bernilai sama. Ditinjau dari ukurannya, matriks ini merupakan jenis matriks bujur sangkar karena memiliki ukuran $n \times n$ atau dengan kata lain jumlah baris dan kolomnya sama.

Terdapat beberapa operasi pada matriks diantaranya perkalian matriks, penjumlahan matriks, determinan, *trace* matriks dan lain sebagainya. Penelitian ini hanya membahas mengenai *trace* matriks. *Trace* dari suatu matriks merupakan jumlah elemen pada diagonal utama dari matriks bujur sangkar berukuran $n \times n$.

Pembahasan mengenai *trace* telah banyak diteliti oleh peneliti sebelumnya. Diantaranya pembahasan mengenai *trace* telah dibahas oleh Brezinski [4] dalam makalahnya yang berjudul "*Estimations of the Trace of Powers of Positive Self-Adjoint Operators by Extrapolation of the Moments*". Menurut Brezinski [4], *trace* dari suatu matriks sering dibahas pada beberapa bidang matematika, seperti analisis jaringan, teori bilangan, sistem dinamik, teori matriks dan persamaan differensial.

Selanjutnya, menurut Pahade dan Jha [8] dalam makalahnya yang berjudul "*Trace of Positif Integer Power of Real* 2×2 *Matrices*" yaitu membahas tentang rumusan umum *trace* dari matriks 2×2 berpangkat bilangan bulat positif. Pembahasan mengenai *trace* juga telah dibahas oleh

Muhammad Solihin [2] dalam makalahnya berjudul "*Trace* Matriks Real Berpangkat Bilangan Bulat Negatif", yang membahas mengenai bentuk umum dari *trace* matriks real berpangkat bilangan bulat negatif untuk n ganjil dan n genap dengan syarat bahwa $\det(A) \neq 0$. Kemudian pada tahun yang sama Titik Fatonah [5] dalam makalahnya yang berjudul "*Trace* Matriks Berbentuk Khusus 2×2 Berpangkat Bilangan Bulat Positif", yang membahas mengenai bentuk umum dari *trace* matriks yang dibentuk secara khusus dengan entri bilangan real dan bilangan kompleks berpangkat bilangan bulat positif untuk n ganjil dan n genap. Pembahasan mengenai *trace* juga telah dibahas oleh Yulianis [3] dalam makalahnya yang berjudul "*Trace* Matriks Berbentuk Khusus 2×2 Berpangkat Bilangan Bulat Negatif", yang membahas mengenai bentuk umum *trace* matriks yang dibentuk secara khusus dengan entri bilangan real dan bilangan kompleks berpangkat bilangan bulat negatif untuk n ganjil dan n genap.

Berdasarkan latar belakang diatas maka penulis tertarik untuk membahas mengenai *trace* matriks Toeplitz tridiagonal berukuran 3×3 yang berbentuk khusus dengan pangkat bilangan bulat positif.

Metode dan Bahan Penelitian

Metodologi penelitian yang digunakan pada makalah ini adalah tinjauan pustaka. Terdapat tiga langkah yang akan dilakukan untuk mendapatkan bentuk umum *trace* matriks toeplitz tridiagonal 3 x 3 berpangkat bilangan bulat positif, sebagai berikut:

1. Diberikan matriks Toeplitz tridiagonal 3×3 yang berbentuk sebagai berikut:
$$A_3 = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & a & b \\ 0 & c & a \end{bmatrix} \text{ dengan } b \neq 0, c \neq 0, \forall a, b, c \in \mathbb{R}. \quad (1)$$
2. Menentukan matriks berpangkat dari $(A_3)^2$ sampai $(A_3)^{11}$,
3. Membuktikan bentuk umum $(A_3)^n$ dengan menggunakan induksi matematika.
4. Membuktikan bentuk umum $tr(A_3)^n$ dengan pembuktian langsung.
5. Mengaplikasikan bentuk umum $tr(A_3)^n$ dalam bentuk contoh soal.

Ada beberapa bahan yang digunakan dalam penelitian ini yaitu sebagai berikut:

Definisi 1. [6] Matriks Toeplitz adalah matriks bujur sangkar berukuran $n \times n$ dengan $T_n = [t_{k,j}; k, j = 0,1, \ldots, n-1]$ dimana $t_{k,j} = t_{k-j}$. Bentuk umum dari matriks Toeplitz adalah sebagai berikut:

$$T_n = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \ddots & t_{-(n-1)} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \ddots & t_{-(n-2)} \\ t_2 & t_1 & t_0 & \ddots & t_{-(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{(n-1)} & t_{(n-2)} & \cdots & t_1 & t_0 \end{bmatrix}$$

Definisi 2. [9] Salah satu jenis dari matriks Toeplitz adalah matriks Toeplitz tridiagonal berorde n, yaitu:

$$T_n = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & a \end{bmatrix} \text{dengan } b \neq 0 \text{ dan } c \neq 0, \forall a, b, c \in \mathcal{R}.$$

Definisi 3. [7] Kombinasi r elemen dari n elemen adalah jumlah pemilihan yang tidak terurut r elemen yang diambil dari n buah elemen. Secara umum rumus kombinasi adalah

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Definisi 4. [1] Jika A adalah matriks bujur sangkar, maka *trace* dari A (*trace of* A), yang dinyatakan sebagai $tr(A)$, didefinisikan sebagai jumlah entri-entri pada diagonal utama A. *Trace* dari A tidak dapat didefinisikan jika A bukan matriks bujur sangkar.

Hasil dan Pembahasan

Pembahasan berikut merupakan proses mendapatkan bentuk umum *trace* matriks Toeplitz tridiagonal 3×3 berpangkat bilangan bulat positif.

1. Menentukan matriks berpangkat dari $(A_3)^2$ sampai $(A_3)^{14}$ pada Persamaan (1) diperoleh:

$$(A_3)^2 = \begin{bmatrix} a^2+bc & 2ab & b^2 \\ 2ac & a^2+2bc & b \\ c^2 & 2ac & a^2+bc \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$(A_3)^3 = \begin{bmatrix} a^3+3abc & 3a^2b+2b^2c & 3ab^2 \\ 3a^2c+2bc^2 & a^3+6abc & 3a^2b+2b^2c \\ 3ac^2 & 3a^2c+2bc^2 & a^3+3abc \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$(A_3)^4 = \begin{bmatrix} a^4+6a^2bc+2b^2c^2 & 4a^3b+8ab^2c & 6a^2b^2+2b^3c \\ 4a^3c+8abc^2 & a^4+12a^2bc+4b^2c^2 & 4a^3b+8ab^2c \\ 6a^2c^2+2bc^3 & 4a^3c+8abc^2 & a^4+6a^2bc+2b^2c^2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$(A_3)^5 = \begin{bmatrix} a^5+10a^3bc+10ab^2c^2 & 5a^4b+20a^2b^2c+4b^3c^2 & 10a^3b^2+10ab^3c \\ 5a^4c+20a^2bc^2+4b^2c^3 & a^5+20a^3bc+20ab^2c^2 & 5a^4b+20a^2b^2c+4b^3c^2 \\ 10a^3c^2+10abc^3 & 5a^4c+20a^2bc^2+4b^2c^3 & a^5+10a^3bc+10ab^2c^2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$(A_3)^6 = \begin{bmatrix} a^6+15a^4bc+30a^2b^2c^2+4b^3c^3 & 6a^5b+40a^3b^2c+24ab^3c^2 & 15a^4b^2+30a^2b^3c+4b^4c^2 \\ 6a^5c+40a^3bc^2+24ab^2c^3 & a^6+30a^4bc+60a^2b^2c^2+8b^3c^3 & 6a^5b+40a^3b^2c+24ab^3c^2 \\ 15a^4c^2+30a^2bc^3+4b^2c^4 & 6a^5c+40a^3bc^2+24ab^2c^3 & a^6+15a^4bc+30a^2b^2c^2+4b^3c^3 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$(A_3)^7 = \begin{bmatrix} a^7+21a^5bc+70a^3b^2c^2+28ab^3c^3 & 7a^6b+70a^4b^2c+84a^2b^3c^2+8b^4c^3 & 21a^5b^2+70a^3b^3c+28ab^4c^2 \\ 7a^6c+70a^4bc^2+84a^2b^2c^3+8b^3c^4 & a^7+42a^5bc+140a^3b^2c^2+56ab^3c^3 & 7a^6b+70a^4b^2c+84a^2b^3c^2+8b^4c^3 \\ 21a^5c^2+70a^3bc^3+28ab^2c^4 & 7a^6c+70a^4bc^2+84a^2b^2c^3+8b^3c^4 & a^7+21a^5bc+70a^3b^2c^2+28ab^3c^3 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$(A_3)^8 = \begin{bmatrix} \begin{matrix} a^8+28a^6bc+140a^4b^2c^2 \\ +112a^2b^3c^3+8b^4c^4 \end{matrix} & \begin{matrix} 8a^7b+112a^5b^2c \\ +224a^3b^3c^2+64ab^4c^3 \end{matrix} & \begin{matrix} 28a^6b^2+140a^4b^3c \\ +112a^2b^4c^2+8b^5c^3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 8a^7c+112a^5bc^2 \\ +224a^3b^2c^3+64ab^3c^4 \end{matrix} & \begin{matrix} a^8+56a^6bc+280a^4b^2c^2 \\ +224a^2b^3c^3+16b^4c^4 \end{matrix} & \begin{matrix} 8a^7b+112a^5b^2c \\ +224a^3b^3c^2+64ab^4c^3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 28a^6c^2+140a^4bc^3 \\ +112a^2b^2c^4+8b^3c^5 \end{matrix} & \begin{matrix} 8a^7c+112a^5bc^2 \\ +224a^3b^2c^3+64ab^3c^4 \end{matrix} & \begin{matrix} a^8+28a^6bc+140a^4b^2c^2 \\ +112a^2b^3c^3+8b^4c^4 \end{matrix} \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$(A_3)^9 = \begin{bmatrix} a^9+36a^7bc+252a^5b^2c^2 & 9a^8b+168a^6b^2c+504a^4b^3c^2 & 36a^7b^2+252a^5b^3c \\ +336a^3b^3c^3+72ab^4c^4 & +288a^2b^4c^3+16b^5c^4 & +336a^3b^4c^2+72ab^5c^3 \\ 9a^8c+168a^6bc^2+504a^4b^2c^3 & a^9+72a^7bc+504a^5b^2c^2 & 9a^8b+168a^6b^2c+504a^4b^3c^2 \\ +288a^2b^3c^4+16b^4c^5 & +672a^3b^3c^3+144ab^4c^4 & +288a^2b^4c^3+16b^5c^4 \\ 36a^7c^2+252a^5bc^3 & 9a^8c+168a^6bc^2+504a^4b^2c^3 & a^9+36a^7bc+252a^5b^2c^2 \\ +336a^3b^2c^4+72ab^3c^5 & +288a^2b^3c^4+16b^4c^5 & +336a^3b^3c^3+72ab^4c^4 \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$(A_3)^{10} = \begin{bmatrix} a^{10}+45a^8bc+420a^6b^2c^2 & 10a^9b+240a^7b^2c+1008a^5b^3c^2 & 45a^8b^2+420a^6b^3c+840a^4b^4c^2 \\ +840a^4b^3c^3+360a^2b^4c^4+16b^5c^5 & +960a^3b^4c^3+160ab^5c^4 & +360a^2b^5c^3+16b^6c^4 \\ 10a^9c+240a^7bc^2+1008a^5b^2c^3 & a^{10}+90a^8bc+840a^6b^2c^2 & 10a^9b+240a^7b^2c+1008a^5b^3c^2 \\ +960a^3b^3c^4+160ab^4c^5 & +1680a^4b^3c^3+720a^2b^4c^4+32b^5c^5 & +960a^3b^4c^3+160ab^5c^4 \\ 45a^8c^2+420a^6bc^3+840a^4b^2c^4 & 10a^9c+240a^7bc^2+1008a^5b^2c^3 & a^{10}+45a^8bc+420a^6b^2c^2 \\ +360a^2b^3c^5+16b^4c^6 & +960a^3b^3c^4+160ab^4c^5 & +840a^4b^3c^3+360a^2b^4c^4+16b^5c^5 \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$(A_3)^{11} = \begin{bmatrix} a^{11}+55a^9bc+660a^7b^2c^2 & 11a^{10}b+330a^8b^2c+1848a^6b^3c^2 & 55a^9b^2+660a^7b^3c+1848a^5b^4c^2 \\ +1848a^5b^3c^3+1320a^3b^4c^4+176ab^5c^5 & +2640a^4b^4c^3+880a^2b^5c^4+32b^6c^5 & +1320a^3b^5c^3+176ab^6c^4 \\ 11a^{10}c+330a^8bc^2+1848a^6b^2c^3 & a^{11}+110a^9bc+1320a^7b^2c^2 & 11a^{10}b+330a^8b^2c+1848a^6b^3c^2 \\ +2640a^4b^3c^4+880a^2b^4c^5+32b^5c^6 & +3696a^5b^3c^3+2640a^3b^4c^4+352ab^5c^5 & +2640a^4b^4c^3+880a^2b^5c^4+32b^6c^5 \\ 55a^9c^2+660a^7bc^3+1848a^5b^2c^4 & 11a^{10}c+330a^8bc^2+1848a^6b^2c^3 & a^{11}+55a^9bc+660a^7b^2c^2 \\ +1320a^3b^3c^5+176ab^4c^6 & +2640a^4b^3c^4+880a^2b^4c^5+32b^5c^6 & +1848a^5b^3c^3+1320a^3b^4c^4+176ab^5c^5 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Dengan melihat kembali Persamaan (2) sampai Persamaan (11), maka diperoleh bentuk umum perpangkatan matriks $(A_3)^n$ yang disajikan dalam Teorema 1 sebagai berikut:

Teorema 1. Diberikan matriks Toeplitz tridiagonal dengan bentuk $A_3 = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & a & b \\ 0 & c & a \end{bmatrix}$,

$b \neq 0, c \neq 0, \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$, maka

$$(A_3)^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} a^n + \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2r} b^r c^r & na^{n-1}b + \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r+1} 2^r a^{n-2r-1} b^{r+1} c^r & \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2r} b^{r+1} c^{r-1} \\ na^{n-1}c + \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r+1} 2^r a^{n-2r-1} b^r c^{r+1} & a^n + \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r} 2^r a^{n-2r} b^r c^r & na^{n-1}b + \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r+1} 2^r a^{n-2r-1} b^{r+1} c^r \\ \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2r} b^{r-1} c^{r+1} & na^{n-1}c + \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r+1} 2^r a^{n-2r-1} b^r c^{r+1} & a^n + \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2r} b^r c^r \end{bmatrix}, & n \text{ ganjil} \\ \begin{bmatrix} a^n + \sum_{r=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2r} b^r c^r & \sum_{r=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2r-1} 2^{r-1} a^{n-2r+1} b^r c^{r-1} & \sum_{r=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2r} b^{r+1} c^{r-1} \\ \sum_{r=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2r-1} 2^{r-1} a^{n-2r+1} b^{r-1} c^r & a^n + \sum_{r=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2r} 2^r a^{n-2r} b^r c^r & \sum_{r=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2r-1} 2^{r-1} a^{n-2r+1} b^r c^{r-1} \\ \sum_{r=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2r} b^{r-1} c^{r+1} & \sum_{r=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2r-1} 2^{r-1} a^{n-2r+1} b^{r-1} c^r & a^n + \sum_{r=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2r} b^r c^r \end{bmatrix}, & n \text{ genap} \end{cases}$$

Bukti. Pembuktian ini menggunakan induksi matematika sebagai berikut:
Diberikan

$$p(n): (A_3)^n = \begin{bmatrix} a^n + \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2r} b^r c^r & na^{n-1}b + \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r+1} 2^r a^{n-2r-1} b^{r+1} c^r & \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2r} b^{r+1} c^{r-1} \\ na^{n-1}c + \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r+1} 2^r a^{n-2r-1} b^r c^{r+1} & a^n + \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r} 2^r a^{n-2r} b^r c^r & na^{n-1}b + \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r+1} 2^r a^{n-2r-1} b^{r+1} c^r \\ \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2r} b^{r-1} c^{r+1} & na^{n-1}c + \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r+1} 2^r a^{n-2r-1} b^r c^{r+1} & a^n + \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2r} b^r c^r \end{bmatrix}$$

untuk n ganjil,

1) Untuk $p(1)$ maka

$$p(1): (A_3)^1 = \begin{bmatrix} a^1 & 1 \cdot b & 0 \\ 1 \cdot c & a^1 & 1 \cdot b \\ 0 & 1 \cdot c & a^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & a & b \\ 0 & c & a \end{bmatrix},$$

dengan memperhatikan Persamaan (1) maka $p(1)$ benar.

2) Asumsikan $p(k)$ benar, artinya:

$p(k): (A_3)^k$

$$= \begin{bmatrix} a^k + \sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2r} 2^{r-1} a^{k-2r} b^r c^r & ka^{k-1}b + \sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2r+1} 2^r a^{k-2r-1} b^{r+1} c^r & \sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2r} 2^{r-1} a^{k-2r} b^{r+1} c^{r-1} \\ ka^{k-1}c + \sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2r+1} 2^r a^{k-2r-1} b^r c^{r+1} & a^k + \sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2r} 2^r a^{k-2r} b^r c^r & ka^{k-1}b + \sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2r+1} 2^r a^{k-2r-1} b^{r+1} c^r \\ \sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2r} 2^{r-1} a^{k-2r} b^{r-1} c^{r+1} & ka^{k-1}c + \sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2r+1} 2^r a^{k-2r-1} b^r c^{r+1} & a^k + \sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2r} 2^{r-1} a^{k-2r} b^r c^r \end{bmatrix}, \text{untuk } k \text{ ganjil}$$

maka akan dibuktikan $p(k+2)$ juga benar yaitu:

$p(k+2): (A_3)^{k+2}$

$$= \begin{bmatrix} a^{k+2} + \sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}} \binom{k+2}{2r} 2^{r-1} a^{k-2r+2} b^r c^r & (k+2)a^{k+1}b + \sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}} \binom{k+2}{2r+1} 2^r a^{k-2r+1} b^{r+1} c^r & \sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}} \binom{k+2}{2r} 2^{r-1} a^{k-2r+2} b^{r+1} c^{r-1} \\ (k+2)a^{k+1}c + \sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}} \binom{k+2}{2r+1} 2^r a^{k-2r+1} b^r c^{r+1} & a^{k+2} + \sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}} \binom{k+2}{2r} 2^r a^{k-2r+2} b^r c^r & (k+2)a^{k+1}b + \sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}} \binom{k+2}{2r+1} 2^r a^{k-2r+1} b^{r+1} c^r \\ \sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}} \binom{k+2}{2r} 2^{r-1} a^{k-2r+2} b^{r-1} c^{r+1} & (k+2)a^{k+1}c + \sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}} \binom{k+2}{2r+1} 2^r a^{k-2r+1} b^r c^{r+1} & a^{k+2} + \sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}} \binom{k+2}{2r} 2^{r-1} a^{k-2r+2} b^r c^r \end{bmatrix} \quad (12)$$

Pembuktian di mulai dari:
$(A_3)^{k+2} = (A_3)^k \cdot (A_3)^2$

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol 5, No 1, Januari 2019
ISSN 2460-4542, e-ISSN 2615-8663

$$
= \begin{bmatrix}
\begin{array}{l}
a^{k+2} + \sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2r} 2^{r-1} a^{k-2r+2} b^{r} c^{r} \\
+ a^{k} bc + \sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2r} 2^{r-1} a^{k-2r} b^{r+1} c^{r+1} \\
+ 2ka^{k} bc + \sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2r+1} 2^{r+1} a^{k-2r} b^{r+1} c^{r+1} \\
+ \sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2r} 2^{r-1} a^{k-2r} b^{r+1} c^{r+1}
\end{array}
&
\begin{array}{l}
2a^{k+1} b + \sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2r} 2^{r} a^{k-2r+1} b^{r+1} c^{r} \\
+ ka^{k+1} b + \sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2r+1} 2^{r} a^{k-2r+1} b^{r+1} c^{r} \\
+ 2ka^{k-1} b^{2} c + \sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2r+1} 2^{r+1} a^{k-2r-1} b^{r+2} c^{r+1} \\
+ \sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2r} 2^{r} a^{k-2r+1} b^{r+1} c^{r}
\end{array}
&
\begin{array}{l}
a^{k} b^{2} + \sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2r} 2^{r-1} a^{k-2r} b^{r+2} c^{r} \\
+ 2ka^{k} b^{2} + \sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2r+1} 2^{r+1} a^{k-2r} b^{r+2} c^{r} \\
+ \sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2r} 2^{r-1} a^{k-2r+2} b^{r+1} c^{r-1} \\
+ \sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2r} 2^{r-1} a^{k-2r} b^{r+2} c^{r}
\end{array}
\\[2em]
\begin{array}{l}
ka^{k+1} c + \sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2r+1} 2^{r} a^{k-2r+1} b^{r} c^{r+1} \\
+ ka^{k-1} bc^{2} + \sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2r+1} 2^{r} a^{k-2r-1} b^{r+1} c^{r+2} \\
+ 2a^{k+1} c + \sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2r} 2^{r+1} a^{k-2r+1} b^{r} c^{r+1} \\
+ ka^{k-1} bc^{2} + \sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2r+1} 2^{r} a^{k-2r-1} b^{r+1} c^{r+2}
\end{array}
&
\begin{array}{l}
2ka^{k} bc + \sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2r+1} 2^{r+1} a^{k-2r} b^{r+1} c^{r+1} \\
+ a^{k+2} + \sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2r} 2^{r} a^{k-2r+2} b^{r} c^{r} \\
+ 2a^{k} bc + \sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2r} 2^{r+1} a^{k-2r} b^{r+1} c^{r+1} \\
+ 2ka^{k} bc + \sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2r+1} 2^{r+1} a^{k-2r} b^{r+1} c^{r+1}
\end{array}
&
\begin{array}{l}
ka^{k-1} b^{2} c + \sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2r+1} 2^{r} a^{k-2r-1} b^{r+2} c^{r+1} \\
+ 2a^{k+1} b + \sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2r} 2^{r+1} a^{k-2r+1} b^{r+1} c^{r} \\
+ ka^{k+1} b + \sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2r+1} 2^{r} a^{k-2r+1} b^{r+1} c^{r} \\
+ ka^{k-1} b^{2} c + \sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2r+1} 2^{r} a^{k-2r-1} b^{r+2} c^{r+1}
\end{array}
\\[2em]
\begin{array}{l}
\sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2r} 2^{r-1} a^{k-2r+2} b^{r-1} c^{r+1} \\
+ \sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2r} 2^{r-1} a^{k-2r} b^{r} c^{r+2} \\
+ 2ka^{k} c^{2} + \sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2r+1} 2^{r+1} a^{k-2r} b^{r} c^{r+2} \\
+ a^{k} c^{2} + \sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2r} 2^{r-1} a^{k-2r} b^{r} c^{r+2}
\end{array}
&
\begin{array}{l}
\sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2r} 2^{r} a^{k-2r+1} b^{r} c^{r+1} + 2ka^{k-1} bc^{2} \\
+ ka^{k+1} c + \sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2r+1} 2^{r} a^{k-2r+1} b^{r} c^{r+1} \\
+ \sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2r+1} 2^{r+1} a^{k-2r-1} b^{r+1} c^{r+2} \\
+ 2a^{k+1} c + \sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2r} 2^{r} a^{k-2r+1} b^{r} c^{r+1}
\end{array}
&
\begin{array}{l}
\sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2r} 2^{r-1} a^{k-2r} b^{r+1} c^{r+1} + 2ka^{k} bc \\
+ \sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2r+1} 2^{r+1} a^{k-2r} b^{r+1} c^{r+1} \\
+ a^{k+2} + \sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2r} 2^{r-1} a^{k-2r+2} b^{r} c^{r} \\
+ a^{k} bc + \sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k}{2r} 2^{r-1} a^{k-2r} b^{r+1} c^{r+1}
\end{array}
\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}
\begin{array}{l}
a^{k+2}+\sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}}\binom{k}{2r}2^{r-1}a^{k-2r+2}b^{r}c^{r}\\
+\sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}}\binom{k}{2r-2}2^{r-1}a^{k-2r+2}b^{r}c^{r}\\
+2\sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}}\binom{k}{2r-1}2^{r-1}a^{k-2r+2}b^{r}c^{r}
\end{array}
&
\begin{array}{l}
(k+2)a^{k+1}b+\sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}}\binom{k}{2r+1}2^{r}a^{k-2r+1}b^{r+1}c^{r}\\
+\sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}}\binom{k}{2r-1}2^{r}a^{k-2r+1}b^{r+1}c^{r}\\
+2\sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}}\binom{k}{2r}2^{r}a^{k-2r+1}b^{r+1}c^{r}
\end{array}
&
\begin{array}{l}
\sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}}\binom{k}{2r}2^{r-1}a^{k-2r+2}b^{r+1}c^{r-1}\\
+2\sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}}\binom{k}{2r-1}2^{r-1}a^{k-2r+2}b^{r+1}c^{r-1}\\
+\sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}}\binom{k}{2r-2}2^{r-1}a^{k-2r+2}b^{r+1}c^{r-1}
\end{array}
\\
\begin{array}{l}
(k+2)a^{k+1}c+\sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}}\binom{k}{2r+1}2^{r}a^{k-2r+1}b^{r}c^{r+1}\\
+\sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}}\binom{k}{2r-1}2^{r}a^{k-2r+1}b^{r}c^{r+1}\\
+2\sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}}\binom{k}{2r}2^{r}a^{k-2r+1}b^{r}c^{r+1}
\end{array}
&
\begin{array}{l}
a^{k+2}+\sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}}\binom{k}{2r}2^{r}a^{k-2r+2}b^{r}c^{r}\\
+\sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}}\binom{k}{2r-2}2^{r}a^{k-2r+2}b^{r}c^{r}\\
+\sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}}\binom{k}{2r-1}2^{r}a^{k-2r+2}b^{r}c^{r}\\
+\sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}}\binom{k}{2r-1}2^{r}a^{k-2r+2}b^{r}c^{r}
\end{array}
&
\begin{array}{l}
(k+2)a^{k+1}b+\sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}}\binom{k}{2r+1}2^{r}a^{k-2r+1}b^{r+1}c^{r}\\
+\sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}}\binom{k}{2r-1}2^{r}a^{k-2r+1}b^{r+1}c^{r}\\
+2\sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}}\binom{k}{2r}2^{r}a^{k-2r+1}b^{r+1}c^{r}
\end{array}
\\
\begin{array}{l}
\sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}}\binom{k}{2r}2^{r-1}a^{k-2r+2}b^{r-1}c^{r+1}\\
+2\sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}}\binom{k}{2r-1}2^{r-1}a^{k-2r+2}b^{r-1}c^{r+1}\\
+\sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}}\binom{k}{2r-2}2^{r-1}a^{k-2r+2}b^{r-1}c^{r+1}
\end{array}
&
\begin{array}{l}
(k+2)a^{k+1}c+\sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}}\binom{k}{2r+1}2^{r}a^{k-2r+1}b^{r}c^{r+1}\\
+\sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}}\binom{k}{2r-1}2^{r}a^{k-2r+1}b^{r}c^{r+1}\\
+2\sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}}\binom{k}{2r}2^{r}a^{k-2r+1}b^{r}c^{r+1}
\end{array}
&
\begin{array}{l}
a^{k+2}+\sum_{r=1}^{\frac{k-1}{2}}\binom{k}{2r}2^{r-1}a^{k-2r+2}b^{r}c^{r}\\
+\sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}}\binom{k}{2r-2}2^{r-1}a^{k-2r+2}b^{r}c^{r}\\
+2\sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}}\binom{k}{2r-1}2^{r-1}a^{k-2r+2}b^{r}c^{r}
\end{array}
\end{bmatrix}
$$

$$= \begin{bmatrix} a^{k+2} + \sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}} \binom{k+2}{2r} 2^{r-1} a^{k-2r+2} b^r c^r & (k+2)a^{k+1}b + \sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}} \binom{k+2}{2r+1} 2^r a^{k-2r+1} b^{r+1} c^r & \sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}} \binom{k+2}{2r} 2^{r-1} a^{k-2r+2} b^{r+1} c^{r-1} \\ (k+2)a^{k+1}c + \sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}} \binom{k+2}{2r+1} 2^r a^{k-2r+1} b^r c^{r+1} & a^{k+2} + \sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}} \binom{k+2}{2r} 2^r a^{k-2r+2} b^r c^r & (k+2)a^{k+1}b + \sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}} \binom{k+2}{2r+1} 2^r a^{k-2r+1} b^{r+1} c^r \\ \sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}} \binom{k+2}{2r} 2^{r-1} a^{k-2r+2} b^{r-1} c^{r+1} & (k+2)a^{k+1}c + \sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}} \binom{k+2}{2r+1} 2^r a^{k-2r+1} b^r c^{r+1} & a^{k+2} + \sum_{r=1}^{\frac{k+1}{2}} \binom{k+2}{2r} 2^{r-1} a^{k-2r+2} b^r c^r \end{bmatrix}$$

Dengan memperhatikan Persamaan (12) maka $p(k+2)$ benar. Karena langkah (1) dan (2) sudah diperlihatkan benar, maka terbukti untuk n ganjil.Selanjutnya dengan cara yang sama diperoleh $(A_3)^n$ untuk n genap. ■

Berdasarkan Teorema 1 maka diperoleh *trace* matriks Toeplitz tridiagonal berpangkat bilangan bulat positif, yang disajikan pada Teorema 2 sebagai berikut.

Teorema 2. Diberikan matriks Toeplitz tridiagonal dengan bentuk $A_3 = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & a & b \\ 0 & c & a \end{bmatrix}$, $b \neq 0, c \neq 0, \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$, maka

$$tr(A_3)^n = \begin{cases} 3a^n + 4\sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2r} b^r c^r & \text{, untuk } n \text{ ganjil} \\ 3a^n + 4\sum_{r=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2r} b^r c^r & \text{, untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

Bukti. Akan dibuktikan untuk n ganjil sebagai berikut:
Berdasarkan Teorema 1 maka didapat bentuk umum $tr(A_3)^n$ untuk n bilangan ganjil yaitu:

$$tr(A_3)^n = \left(a^n + \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2r} b^r c^r\right) + \left(a^n + \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r} a^{n-2r} b^r c^r\right) + \left(a^n + \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2r} b^r c^r\right)$$

$$= 3a^n + 4\sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2r} b^r c^r$$

Maka terbukti $tr(A_3)^n = 3a^n + 4\sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2r} b^r c^r$, untuk n ganjil.

Akan dibuktikan $tr(A_3)^n = 3a^n + 4\sum_{r=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2r} b^r c^r$, untuk n genap sebagai berikut:
Berdasarkan Teorema 1 maka didapat bentuk umum $tr(A_3)^n$ untuk n bilangan genap yaitu:

$$tr(A_3)^n = \left(a^n + \sum_{r=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2r} b^r c^r\right) + \left(a^n + \sum_{r=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r} a^{n-2r} b^r c^r\right) + \left(a^n + \sum_{r=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2r} b^r c^r\right)$$

$$= 3a^n + 4\sum_{r=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2r} b^r c^r$$

Maka terbukti $tr(A_3)^n = 3a^n + 4\sum_{r=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2r} b^r c^r$, untuk n genap.
Berdasarkan pembuktian tersebut, maka Teorema 2 terbukti. ∎

Untuk mengaplikasikan bentuk umum $tr(A_3)^n$ untuk n ganjil dan n genap diberikan contoh yang berhubungan dengan Teorema 1 dan Teorema 2 sebagai berikut:

Contoh 1. Diberikan matriks $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$. Hitunglah $(A_3)^{12}$ menggunakan Teorema 1 dan $tr(A_3)^{12}$ dengan menggunakan Teorema 2.
Penyelesaian:
Menurut Teorema 1 diperoleh untuk n genap, maka

$$(A_3)^{12} = \begin{bmatrix} (1)^{12} + \sum_{r=1}^{6} \binom{12}{2r} 2^{r-1} (1)^{12-2r} (-2)^r (\frac{1}{2})^r & \sum_{r=1}^{6} \binom{12}{2r-1} 2^{r-1} (1)^{13-2r} (-2)^r (\frac{1}{2})^{r-1} & \sum_{r=1}^{6} \binom{12}{2r} 2^{r-1} (1)^{12-2r} (-2)^{r+1} (\frac{1}{2})^{r-1} \\ \sum_{r=1}^{6} \binom{12}{2r-1} 2^{r-1} (1)^{13-2r} (-2)^{r-1} (\frac{1}{2})^r & (1)^{12} + \sum_{r=1}^{6} \binom{12}{2r} 2^{r} (1)^{12-2r} (-2)^r (\frac{1}{2})^r & \sum_{r=1}^{6} \binom{12}{2r-1} 2^{r-1} (1)^{13-2r} (-2)^r (\frac{1}{2})^{r-1} \\ \sum_{r=1}^{6} \binom{12}{2r} 2^{r-1} (1)^{12-2r} (-2)^{r-1} (\frac{1}{2})^{r+1} & \sum_{r=1}^{6} \binom{12}{2r-1} 2^{r-1} (1)^{13-2r} (-2)^{r-1} (\frac{1}{2})^r & (1)^{12} + \sum_{r=1}^{6} \binom{12}{2r} 2^{r-1} (1)^{12-2r} (-2)^r (\frac{1}{2})^r \end{bmatrix}$$

$$(A_3)^{12} = \begin{bmatrix} 165 & 920 & -656 \\ -230 & 329 & 920 \\ -41 & -230 & 165 \end{bmatrix}$$

Menurut Teorema 2 diperoleh:

$$\begin{aligned} tr(A_3)^{12} &= 3a^{12} + 4\sum_{r=1}^{6} \binom{12}{2r} 2^{r-1} a^{12-2r} b^r c^r \\ &= 3 + 4\{-66 + 990 - 3696 + 3960 - 1056 + 32\} \\ &= 3 + 656 \\ &= 659 \end{aligned}$$

Contoh 2. Diberikan matriks $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. Hitunglah $tr(A_3)^{14}$ dan $tr(A_3)^{15}$ dengan menggunakan Teorema 2.
Penyelesaian:
Menurut Teorema 2 diperoleh:

$$\begin{aligned} tr(A_3)^{14} &= 3a^{14} + 4\sum_{r=1}^{7} \binom{14}{2r} 2^{r-1} a^{14-2r} b^r c^r \\ &= 0 + 4\{0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 134217728\} \\ &= 536870912 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} tr(A_3)^{15} &= 3a^{15} + 4\sum_{r=1}^{7} \binom{15}{2r} 2^{r-1} a^{15-2r} b^r c^r \\ &= 3(0)^{15} + 4\{\binom{15}{2} 2^0 . 0^{13} . 4^1 . 2^1 + \binom{15}{4} 2^1 . 0^{11} . 4^2 . 2^2 + \binom{15}{6} 2^2 . 0^9 . 4^3 . 2^3 + \\ &\quad \binom{15}{8} 2^3 . 0^7 . 4^4 . 2^4 + \binom{15}{10} 2^4 . 0^5 . 4^5 . 2^5 + \binom{15}{12} 2^5 . 0^3 . 4^6 . 2^6 + \binom{15}{14} 2^6 . 0^1 . 4^7 . 2^7\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol 5, No 1, Januari 2019
ISSN 2460-4542, e-ISSN 2615-8663

Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan sebelumnya, dengan menggunakan matriks Toeplitz tridiagonal 3×3 yang berbentuk sebagai berikut:

$A_3 = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & a & b \\ 0 & c & a \end{bmatrix}$ dengan $b \neq 0, c \neq 0, \forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

maka diperoleh:

a. $$(A_3)^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} a^n + \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2r} b^r c^r & na^{n-1}b + \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r+1} 2^r a^{n-2r-1} b^{r+1} c^r & \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2r} b^{r+1} c^{r-1} \\ na^{n-1}c + \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r+1} 2^r a^{n-2r-1} b^r c^{r+1} & a^n + \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r} 2^r a^{n-2r} b^r c^r & na^{n-1}b + \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r+1} 2^r a^{n-2r-1} b^{r+1} c^r \\ \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2r} b^{r-1} c^{r+1} & na^{n-1}c + \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r+1} 2^r a^{n-2r-1} b^r c^{r+1} & a^n + \sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2r} b^r c^r \end{bmatrix}, & n \text{ ganjil} \\[2ex] \begin{bmatrix} a^n + \sum_{r=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2r} b^r c^r & \sum_{r=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2r-1} 2^{r-1} a^{n-2r+1} b^r c^{r-1} & \sum_{r=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2r} b^{r+1} c^{r-1} \\ \sum_{r=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2r-1} 2^{r-1} a^{n-2r+1} b^{r-1} c^r & a^n + \sum_{r=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2r} 2^r a^{n-2r} b^r c^r & \sum_{r=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2r-1} 2^{r-1} a^{n-2r+1} b^r c^{r-1} \\ \sum_{r=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2r} b^{r-1} c^{r+1} & \sum_{r=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2r-1} 2^{r-1} a^{n-2r+1} b^{r-1} c^r & a^n + \sum_{r=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2r} b^r c^r \end{bmatrix}, & n \text{ genap} \end{cases}$$

b. $$tr(A_3)^n = \begin{cases} 3a^n + 4\sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2r} b^r c^r & , \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ 3a^n + 4\sum_{r=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2r} b^r c^r & , \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

Daftar Pustaka

[1] Anton, H., dan Rorres, C., *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi*, Edisi ke Delapan, Erlangga, 2004.

[2] Aryani, F., dan Solihin, M., Trace Matriks Real Berpangkat Bilangan Bulat Negatif, *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, Vol.3 (2), 2017.

[3] Aryani, F., dan Yulianis., Trace Matriks Berbentuk Khusus 2x2 Berpangkat Bilangan Bulat Negatif, *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, Vol.4 (2), 2018.

[4] Brezinski, C., Fika, P., dan M. Mitrouli., Estimations of the Trace of Powers of Positive Self-Adjoint Operators by Extrapolation of the Moments, *Electric Transactions on Numerical Analysis*, Vol. 39, 144-155, 2012.

[5] Fatonah, Titik., *Trace* Matriks Berbentuk Khusus 2×2 Berpangkat Bilangan Bulat Positif, Tugas Akhir, UIN Sultan Syarif Kasim Riau, Pekanbaru, 2017.

[6] Gray, Robert M., Toeplitz and Circulant Matrices, *Communications and Information Theory*, Vol. 2, No. 3, 155-239, 2006.

[7] Munir, R., *Matematika Diskrit*, Edisi Revisi ke Empat. halaman 151, Informatika Bandung, Bandung, 2010.

[8] Pahade, J., and Jha, M.., Trace of Positif Integer Power of Real 2×2 Matrices, *Advances in Linear Algebra & Matrix Theory*, Vol. 5, 150-155, 2015.

[9] Zhang, F., *Matrix Theory*, Second Ed, Springer, New York, 2011.