Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol 5, No 1, Januari 2019
ISSN 2460-4542, e-ISSN 2615-8663

Optimalisasi Hasil Produksi Menggunakan Metode *Kuhn-Tucker* (Studi Kasus: Toko Baju Mitra Pekanbaru)

Elfira Safitri[1], Sri Basriati[2], Amelia Zahara[3]
[1,,2,3] Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: elfira.safitri@uin-suska.ac.id

ABSTRAK

Metode *Kuhn-Tucker* merupakan suatu teknik yang dapat digunakan untuk mencari titik optimum dari suatu fungsi kendala tanpa memandang sifat apakah linear atau nonlinear. Adapun tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui bentuk penyelesaian menggunakan metode *Kuhn*-Tucker. Penyelesaian metode *Kuhn-Tucker* sama halnya dengan metode Lagrange, yaitu menghitung nilai (x, λ, S) dan menghitung nilai $f(x)$. Proses pencarian nilai (x, λ, S) menggunakan perkalian matriks. Berdasarkan hasil penelitian menggunakan metode Kuhn Tucker diperoleh banyaknya baju sekolah Madrasah Aliyah perempuan yang diproduksi 15 buah, banyaknya baju sekolah Madrasah Aliyah laki-laki yang diproduksi 20 buah, banyaknya baju sekolah Madrasah Ibtidaiyah perempuan yang diproduksi 15 buah dan banyaknya baju sekolah Madrasah Ibtidaiyah laki-laki yang diproduksi 20 buah dengan keuntungan diperoleh sebesar Rp 5.600.000.

Kata Kunci: *Metode Lagrange, metode Kuhn-Tucker, perkalian matriks*

ABSTRACT

Kuhn Tucker method is a technique that can used to find the optimum point of a constraint function regardless of whether the properties are linear or nonlinear. The purpose of this study wa to determine the form of settlement using the Kuhn-Tucker Method. The completion of the Kuhn-Tucker method is the same as the Lagrange method which iscalculate the value and calculate the value. The process finding value in this method can use matrix multiplication. Based on the results of the using Kuhn-Tucker Method obtained 15 *pieces of Madrasah Aliyah uniform for female,* 20 *pieces of Madrasah Aliyah uniform for male,* 15 *pieces of Madrasah Ibtidaiyah uniform for female and* 20 *pieces of Madrasah Ibtidaiyah uniform for male with a profit of* Rp 5.600.000.

Keywords: *Lagrange method, Kuhn-Tucker method, matrix multiplication*

Pendahuluan

Perkembangan era globalisasi membuat perusahaan ingin menjadikan perusahaannya mampu berkembang dan bersaing dengan perusahaan lain. Salah satu yang ingin dicapai adalah memperoleh keuntungan yang maksimum. Pencapaian keuntungan maksimum dapat dicapai dengan suatu strategi penjualan. Contohnya adalah Toko Baju Mitra beralamat di Jl. KH. Ahmad Dahlan Pekanbaru. Toko Baju Mitra adalah Toko yang berkembang dibidang produksi baju seperti baju sekolah, baju kantor, jas dan lain-lain. Salah satu ilmu matematika yang digunakan adalah metode optimasi. Optimasi digunakan untuk mendapatkan solusi terbaik dari suatu permasalahan yang dibedakan atas dua macam fungsi, yaitu linear dan nonlinear.

Dalam penerapannya sering kali diharuskan untuk mengoptimalkan (menentukan nilai ekstrim) dari sebuah fungsi, yakni menentukan nilai maksimum dan minimum suatu fungsi, tetapi ada syarat yang harus dipenuhi. Fungsi yang hendak dioptimumkan menghadapi suatu kendala (*constrant*). Kasus maksimum bersyarat semacam ini banyak dijumpai dalam bidang ekonomi. Misalnya sebuah perusahaan yang ingin memaksimumkan labanya namun terikat pada fungsi produksi. Maka suatu cara yang dapat digunakan untuk menentukan titik ekstrim dari suatu fungsi yang bersyarat adalah dengan menggunakan metode *Kuhn-Tucker*. Metode *Kuhn-Tucker* dapat berbentuk linear atau nonlinear [4].

Metode *Kuhn-Tucker* adalah suatu metode untuk menentukan nilai optimum suatu fungsi dengan kendala berupa pertidaksamaan. Metode ini memperluas metode Lagrange untuk masalah optimasi dengan kendala pertidaksamaan. Metode Lagrange sebenarnya hanya dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah optimasi yang fungsi kendalanya berupa persamaan tetapi jika diberikan syarat *Kuhn-Tucker*, metode Lagrange dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah optimasi pemograman nonlinear yang fungsi kendalanya berupa pertidaksamaan. Metode *Kuhn-Tucker* dapat digunakan untuk mencari solusi optimum tanpa memandang fungsi linear maupun nonlinear [1].

Berdasarkan penelitian sebelumnya yang telah menggunakan metode *Kuhn-Tucker* diantaranya Ni Made Asih dan I Nyoman Widana [4] menerapkan "*Aplikasi Metode Kuhn-Tucker dalam Penjualan Oli Mobil*". I Gade Aris Janova Putra, dkk. [5] juga menggunakan metode *Kuhn-Tucker* dengan judul "*Optimalisasi Penjualan Kain Endek dengan Metode Kuhn-Tucker"*. Anta Dika Karo-karo [2] yang berjudul "*Optimasi Hasil Produksi dengan Metode Kuhn-Tucker pada Pabrik Roti WN*".WahyudinNur, dkk [6] dengan judul "*Solusi Pemograman Nonlinear Desain Kamar Kost dengan Menggunakan Syarat Karush-Kuhn-Tucker (KKT)*". Sehingga penulis tertarik mengulas kembali penelitian tentang metode *Kuhn-Tucker*. Adapun tujuan dari penelitian ini adalah mengetahui bentuk fungsi tujuan dan fungsi kendala yang diperoleh dari hasil produksi baju pada toko mitra, kemudian bentuk penyelesaian menggunakan metode *Khun-Tucker*.

Metode dan Bahan Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur dengan mengumpulkan data dan informasi berupa materi-materi yang berkaitan dengan penelitian, seperti buku, jurnal dan internet. Data yang digunakan diperoleh dengan cara wawancara dan observasi langsung. Adapun metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode *Kuhn-Tucker*.

1. Pemograman Nonlinear dengan Kendala Linear

Pemograman nonlinear dengan kendala linear merupakan optimasi dengan kendala berbentuk fungsi linear dan fungsi tujuan berupa fungsi nonlinear. Untuk menentukan nilai $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dengan bentuk umum adalah:

Max/min $\quad z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (1)

kendala

$$g_i(x) \leq / = / \geq 0 \quad \text{untuk } m = 1, 2, \cdots, n$$
$$x \geq 0$$

2. Metod Pengali Lagrange

Metode ini digunakan untuk mencari solusi dari suatu permasalahan titik ekstrim dari beberapa variabel dan fungsi yang memenuhi semua persamaan kendala. Fungsi lagrange dipakai dalam menyelesaikan permasalahan optimasi dengan kendala persamaan. Fungsi Lagrange dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) \quad (2)$$

Misalnya terdapat permasalahan optimasi dengan satu kendala, maka bentuk fungsi Lagrange dapat ditulis, sebagai berikut:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda(g(x) - b) \quad (3)$$

Kemudian syarat perlu dari penyelesaian di atas dengan melakukan turunan parsial dari L terhadap x dan λ sebagai berikut:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$$

Berdasarkan persamaan (4) maka akan didapat nilai (x, λ) untuk menyelesaikan permasalahan tersebut. Dengan λ adalah laju perubahan kuantitas yang dioptimalkan sebagai fungsi variabel kendala.

3. Metode *Kuhn-Tucker*

Pada tahun 1951 Kuhn Tucker mengemukakan suatu teknik optimasi yang dapat digunakan untuk mencari titik optimum dari suatu fungsi berkendala. Metode *Kuhn-Tucker* dapat digunakan untuk mencari solusi yang optimum dari suatu fungsi tanpa memandang sifat dari fungsi tersebut apakah linear atau nonlinear [3].

Teorema 1 [7] Jika x_0 adalah solusi optimal dari pemograman nonlinear dan *Kuhn-Tucker* kendala yang berlaku, maka terdapat skalar λ_i untuk $i = 1, 2, \dots, m$

$$f(x_0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_0) = 0$$

(5)

$$\lambda_i g_i(x_0) = 0 \qquad i = 1,2, \dots, m$$
$$\lambda_i \geq 0 \qquad i = 1,2, \dots, m$$

Moengin [3] mengatakan bahwa kendala pertidaksamaan dapat ditransformasikan dengan menambahkan *slack variable* tak negatif${S_i}^2$, sehingga menjadi

$$g_i(x) + {S_i}^2 = 0 \quad \text{untuk } i = 1, 2, \dots, m$$

Dimana *slack variable* belum diketahui, maka masalah optimasi tersebut menjadi:

Max: $z = f(x)$ (6)

kendala

$$g_i(x) + {S_i}^2 = 0 \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, m$$

Masalah tersebut dapat diselesaikan dengan metode Lagrange, maka fungsi Lagrange untuk masalah ini adalah:

$$L(x, \lambda, S) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(g_i(x) - b + {S_i}^2 \right) \tag{7}$$

Diberikan kendala $g(x) \leq 0$, sebuah syarat perlu untuk optimalisasi bahwa λ haruslah tak negatif untuk masalah maksimasi.

Moengin [3] menjelaskan bahwa:

1. Jika $\lambda_i \neq 0$, maka *slack variable* bernilai nol, yang berarti bahwa kendala tersebut aktif pada titik optimum.
2. Jika $\lambda_i = 0$, maka *slack variable* bernilai lebih besar dari nol, yang berarti bahwa kendala tersebut tidak aktif dan selanjutnya dapat diabaikan.

Syarat perlu metode *Kuhn-Tucker* untuk masalah maksimasi yang dapat dirangkum sebagai berikut:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \qquad \text{untuk } i = 1, 2, \dots, m$$
$$\lambda_i g_i = 0 \qquad \text{untuk } i = 1, 2, \dots, m$$
$$g_i(x) \leq 0 \qquad \text{untuk } i = 1, 2, \dots, m$$
$$\lambda_i \text{ tidak dibatasi dalam tanda} \qquad \text{untuk } i = 1, 2, \dots, m$$

Berdasarkan kasus maksimasi atau minimasi, pengali Lagrange (λ) yang terkait dengan kendala kesamaan tidak terbatas tandanya.

Syarat yang diperlukan agar syarat perlu *Kuhn-Tucker* juga merupakan syarat cukup *Kuhn-Tucker* dapat didefinisikan sebagai berikut:

Max $z = f(x)$ (8)

kendala

$$g_i(x) \leq 0 \text{ untuk } i = 1,2, \dots, m$$
$$g_i(x) \geq 0 \text{ untuk } i = m + 1, \dots, n$$
$$g_i(x) = 0 \text{ untuk } i = n + 1, \dots, p$$

Fungsi Lagrange yang bersangkutan adalah

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol 5, No 1, Januari 2019
ISSN 2460-4542, e-ISSN 2615-8663

$$L(x,\lambda,S) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\left[g_i(x) + S_i^{\,2}\right] + \sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i\left[g_i(x) + S_i^{\,2}\right] + \sum_{i=n+1}^{p} \lambda_i g_i(x)$$
(9)

Dimana λ_i adalah pengali Lagrange yang terkait dengan kendala j. Syarat untuk menentukan kecukupan syarat *Kuhn-Tucker* dirangkum dalam Tabel 2.2 berikut ini:

Tabel 1 Syarat Cukup Metode *Kuhn-Tucker*

Jenis Optimasi	Syarat yang diperlukan		
	$f(x)$	$g_i(x)$	λ_i
Maksimasi	Konkaf	Konveks Konkaf Linear	$\geq 0(i = 1,2,\dots,m)$ $\leq 0(i = m+1,\dots,n)$ Tidak dibatasi $(i = n+1,\dots,p)$
Minimasi	Konveks	Konveks Konkaf Linear	$\geq 0(i = 1,2,\dots,m)$ $\leq 0(i = m+1,\dots,n)$ Tidak dibatasi $(i = n+1,\dots,p)$

Berdasarkan Tabel 1 diperoleh jika $g_i(x)$ konveks, maka $\lambda_i g_i(x)$ konveks dan $\lambda_i \geq 0$, $\lambda_i g_i(x)$ konkaf maka$\lambda_i \leq 0$ dan $\lambda_i g_i(x)$ linear maka λ tidak dibatasi dalam tanda ($\lambda_i \geq 0$ dan $\lambda_i \leq 0$). Sebuah fungsi linear adalah konveks sekaligus konkaf.

Prosedur menggunakan metode *Kuhn-Tucker* untuk memecahkan suatu masalah optimasi dengan kendala berupa pertidaksamaan, secara esensial melibatkan langkah-langkah yang sama seperti halnya dengan menggunakan metode Lagrange untuk memecahkan masalah optimasi dengan kendala berupa persamaan, yaitu:

a. Mengubah bentuk pertidaksamaan menjadi bentuk persamaan dengan menambahkan variabel *slack*.
b. Membentuk persamaan menjadi fungsi Lagrange.
$$L(x,\lambda,S) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\left(g_i(x) - b + S_i^{\,2}\right)$$
c. Setelah terbentuk fungsi Lagrange maka ubah menjadi persamaan *Kuhn-Tucker* sehingga membentuk persamaan baru.
d. Dari persamaan baru maka diperoleh solusi (x,λ,S) yang memenuhi persyaratan *Kuhn-Tucker*.
e. Menghitung nilai maksimum dengan mensubtitusi nilai (x,λ,S) ke fungsi Lagrange.

Hasil dan Pembahasan

1. Gambaran Data

Penelitian ini di Toko Baju Mitra yang beralamat di Jl. KH. Ahmad Dahlan Pekanbaru yang merupakan salah satu toko yang bergerak dalam bidang produksi baju. Data yang digunakan adalah data produksi baju sekolah Madrasah Aliyah dan Madrasah Ibtidaiyah. Data tersebut adalah data yang diasumsikan untuk sekali produksi yang diolah untuk mencari nilai maksimal keuntungan Toko Baju Mitra. Baju yang diproduksi oleh Toko Mitra memiliki beberapa macam produk. Jenis baju yang diproduksi adalah sebagai berikut :

a. Baju sekolah Madrasah Aliyah (MA) perempuan.
b. Baju sekolah Madrasah Aliyah (MA) laki-laki.
c. Baju sekolah Madrasah Ibtidaiyah (MI) perempuan.
d. Baju sekolah Madrasah Ibtidaiyah (MI) laki-laki.

2. Model Matematika

a. Pembentukan Variabel Keputusan

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol 5, No 1, Januari 2019
ISSN 2460-4542, e-ISSN 2615-8663

Variabel keputusan pada permasalahan ini dibentuk berdasarkan jenis-jenis baju yang diproduksi. Jenis baju yang diproduksi sebanyak empat model baju, sehingga jumlah variabel keputusan yang digunakan adalah empat variabel. Variabel keputusan tersebut yaitu:

x_1 : Jumlah baju sekolah Madrasah Aliyah perempuan yang diproduksi.
x_2 : Jumlah baju sekolah Madrasah Aliyah laki-laki yang diproduksi.
x_3 : Jumlah baju sekolah Madrasah Ibtidaiyah perempuan yang diproduksi.
x_4 : Jumlah baju sekolah Madrasah Ibtidaiyah laki-laki yang diproduksi.

b. Pembentukan Fungsi Tujuan

Fungsi tujuan merupakan fungsi yang menjadi tujuan utama dari proses optimasi dimana fungsi yang harus dioptimalkan sebagai hasil akhir dari perkiraan produksi yang optimal. Untuk mencapai fungsi tujuan maka jumlah harga jual setiap produk harus dikurangkan dengan harga modal sehingga diperoleh keuntungan per produk. Permasalahan produksi untuk kasus ini tujuan utamanya adalah memaksimumkan keuntungan. Adapun fungsi tujuan atau keuntungan dari produksi baju di Toko Baju Mitra dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 2 Keuntungan yang diperoleh dari Toko Mitra Pekanbaru (per unit)

Jenis Baju	Penjualan	Modal	Keuntungan
Baju Sekolah Madrasah Aliyah perempuan.	Rp 200.000	Rp 110.000	Rp 90.000
Baju Sekolah Madrasah Aliyah laki-laki.	Rp 200.000	Rp 110.000	Rp 90.000
Baju Sekolah Madrasah Ibtidaiyah perempuan.	Rp 180.000	Rp 110.000	Rp. 70.000
Baju Sekolah Madrasah Ibtidaiyah laki-laki.	Rp 180.000	Rp 110.000	Rp. 70.000

Sumber Data: Toko Baju Mitra Pekanbaru

Berdasarkan Tabel 2 di atas dapat dibentuk model fungsi tujuan sebagai berikut:

$$maks\ z = 90.000x_1 + 90.000x_2 + 70.000x_3 + 70.000x_4 \tag{10}$$

c. Pembentukan Fungsi Kendala

Fungsi kendala merupakan fungsi yang menggambarkan keterbatasan yang dimiliki oleh sebuah perusahaan. Adapun fungsi kendala pada permasalahaan ini sebagai berikut:

- Bahan Baku

Bahan baku yang diproduksi oleh Toko Baju Mitra untuk setiap jenis baju yang diproduksi. Bahan baku pembuatan masing-masing jenis baju yang dapat dilihat pada Tabel 3 berikut:

Tabel 3 Data Produksi Toko Mitra Pekanbaru (Per Unit)

Bahan	Baju Sekolah				Persediaan Bahan	Satuan
	MA Perempuan	MA Laki-Laki	MI Perempuan	MI Laki-Laki		
Bahan mitra	2	2	1,5	1.5	122,5	Meter
Kancing baju	1	7	1	6	290	Buah
Lambang OSIS MA	1	1	0	0	35	Buah
Lambang OSIS MI	0	0	1	1	35	Buah

Sumber Data: Toko Baju Mitra Pekanbaru

- Waktu Penyelesaian Produk

Waktu penyelesaian produk adalah proses pengerjaan satu jenis baju mulai dari pembuatan model sampai pemasangan kancing. Adapun waktu yang dibutuhkan oleh Toko Baju Mitra untuk menyelesaikan pembuatan baju yang disajikan dalam Tabel 4 sebagai berikut:

Tabel 4 Waktu produksi (Per Unit)

No.	Produk	Waktu Penyelesaian (jam)
1.	Baju Sekolah Madrasah Aliyah perempuan.	8

2.	Baju Sekolah Madrasah Aliyah laki-laki.	6
3.	Baju Sekolah Madrasah Ibtidaiyah perempuan.	8
4.	Baju Sekolah Madrasah Ibtidaiyah laki-laki.	6
5.	Waktu pengerjaan dalam satu bulan.	240

Sumber Data: Toko Baju Mitra Pekanbaru

Berdasarkan Tabel 4 di atas produksi baju Madrasah Aliyah dan Madrasah Ibtidaiyah merupakan hasil produksi dari pekerja yang berbeda-beda, maka dari Tabel 3 dan 4 dapat diubah ke dalam bentuk fungsi kendala sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
&2x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 + 1{,}5x_4 \le 122{,}5\\
&x_1 + 7x_2 + x_3 + 6x_4 \le 290\\
&8x_1 + 6x_2 \le 240\\
&8x_3 + 6x_4 \le 240\\
&x_1 + x_2 \le 35\\
&x_3 + x_4 \le 35
\end{aligned} \tag{11}$$

3. Penyelesaian menggunakan Metode *Kuhn-Tucker*

Berdasarkan persamaan (10) dan (11) dapat dibentuk model pemograman linear sebagai berikut:

$$maks\ z = 90.000x_1 + 90.000x_2 + 70.000x_3 + 70.000x_4$$

$$kendala$$

$$\begin{aligned}
&2x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 + 1{,}5x_4 \le 122{,}5\\
&x_1 + 7x_2 + x_3 + 6x_4 \le 290\\
&8x_1 + 6x_2 \le 240\\
&8x_3 + 6x_4 \le 240\\
&x_1 + x_2 \le 35\\
&x_3 + x_4 \le 35\\
&x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0
\end{aligned} \tag{12}$$

Keterangan:
x_1 : Jumlah baju sekolah Madrasah Aliyah perempuan yang diproduksi.
x_2 : Jumlah baju sekolah Madrasah Aliyah laki-laki yang diproduksi.
x_3 : Jumlah baju sekolah Madrasah Ibtidaiyah perempuan yang diproduksi.
x_4 : Jumlah baju sekolah Madrasah Ibtidaiyah laki-laki yang diproduksi.

Setelah membentuk model pemograman linear, selanjutnya mengubah kendala menjadi bentuk persamaan dengan menambahkan variabel *slack*. Maka dihasilkan bentuk persamaan berikut:

$$maks\ z = 90.000x_1 + 90.000x_2 + 70.000x_3 + 70.000x_4$$
$$kendala$$
$$\begin{aligned} &2x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 + 1{,}5x_4 + S_1^2 = 122{,}5 \\ &x_1 + 7x_2 + x_3 + 6x_4 + S_2^2 = 290 \\ &8x_1 + 6x_2 + S_3^2 = 240 \\ &8x_3 + 6x_4 + S_4^2 = 240 \\ &x_1 + x_2 + S_5^2 = 35 \\ &x_3 + x_4 + S_6^2 = 35 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6 \geq 0 \end{aligned} \tag{13}$$

Setelah dikonversikan ke dalam bentuk standar, maka persamaan (13) dapat diubah menjadi persamaan Lagrange sebagai berikut:

$$L(x,\lambda,S) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\left(g_i(x) - b + {S_i}^2\right)$$
(14)

$L(x_1,x_2,x_3,x_4,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6,S_1,S_2,S_3,S_4,S_5,S_6) = 90.000x_1 + 90.000x_2 + 70.000x_3 + 70.000x_4 + \lambda_1\left(2x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 + 1{,}5x_4 + {S_1}^2 - 122{,}5\right) + \lambda_2\left(x_1 + 7x_2 + x_3 + 6x_4 + {S_2}^2 - 290\right) + \lambda_3\left(8x_1 + 6x_2 + {S_3}^2 - 240\right) + \lambda_4\left(8x_3 + 6x_4 + {S_4}^2 - 240\right) + \lambda_5\left(x_1 + x_2 + {S_5}^2 - 35\right) + \lambda_6(x_3 + x_4 + {S_6}^2 - 35)$

Fungsi Lagrange pada persamaan (14) akan menjadi fungsi tujuan untuk mencapai hasil produksi dan keuntungan yang maksimum. Berdasarkan persamaan (14), maka selanjutnya mengubah fungsi Lagrange ke dalam bentuk persamaan *Khun-Tucker* dengan bentuk umum sebagai berikut:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(x,\lambda,S) = 0 \qquad \text{dimana } i = 1, 2, \ldots, m$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(x,\lambda,S) = 0 \qquad \text{dimana } i = 1, 2, \ldots, m$$
$$\frac{\partial L}{\partial S_i}(x,\lambda,S) = 0 \qquad \text{dimana } i = 1, 2, \ldots, m$$

Sehingga dapat dibuat persamaan tersebut menjadi persamaan-persamaan berikut:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 90{,}000 + 2\lambda_1 + \lambda_2 + 8\lambda_3 + \lambda_5 = 0 \tag{15}$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 90{,}000 + 2\lambda_1 + 7\lambda_2 + 6\lambda_3 + \lambda_5 = 0 \tag{16}$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 70{,}000 + 1{,}5\lambda_1 + \lambda_2 + 8\lambda_4 + \lambda_6 = 0 \tag{17}$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_4} = 70{,}000 + 1{,}5\lambda_1 + 6\lambda_2 + 6\lambda_4 + \lambda_6 = 0 \tag{18}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 2x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 + 1{,}5x_4 + {S_1}^2 - 122{,}5 = 0 \tag{19}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = x_1 + 7x_2 + x_3 + 6x_4 + {S_2}^2 - 290 = 0 \tag{20}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_3} = 8x_1 + 6x_2 + {S_3}^2 - 240 = 0 \tag{21}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_4} = 8x_3 + 6x_4 + {S_4}^2 - 240 = 0 \tag{22}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_5} = x_1 + x_2 + {S_5}^2 - 35 = 0 \tag{23}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_6} = x_3 + x_4 + {S_6}^2 - 35 = 0 \tag{24}$$
$$\frac{\partial L}{\partial S_1} = 2\lambda_1 S_1 = 0 \tag{25}$$
$$\frac{\partial L}{\partial S_2} = 2\lambda_2 S_2 = 0 \tag{26}$$

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol 5, No 1, Januari 2019
ISSN 2460-4542, e-ISSN 2615-8663

$$\frac{\partial L}{\partial S_3} = 2\lambda_3 S_3 = 0 \quad (27)$$
$$\frac{\partial L}{\partial S_4} = 2\lambda_4 S_4 = 0 \quad (28)$$
$$\frac{\partial L}{\partial S_5} = 2\lambda_5 S_5 = 0 \quad (29)$$
$$\frac{\partial L}{\partial S_6} = 2\lambda_6 S_6 = 0 \quad (30)$$

Berdasarkan persamaan (25) sampai (30) diperoleh nilai S_1 sampai S_6 masing-masing bernilai nol. Setelah diperoleh nilai S_1 sampai S_6, maka subtitusi nilai-nilai tersebut kepersamaan (19) sampai (24) sebagai berikut:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 2x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 + 1{,}5x_4 - 122{,}5 = 0 \quad (31)$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = x_1 + 7x_2 + x_3 + 6x_4 - 290 = 0 \quad (32)$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_3} = 8x_1 + 6x_2 - 240 = 0 \quad (33)$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_4} = 8x_3 + 6x_4 - 240 = 0 \quad (34)$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_5} = x_1 + x_2 - 35 = 0 \quad (35)$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_6} = x_3 + x_4 - 35 = 0 \quad (36)$$

Berdasarkan persamaan (15) sampai (18) akan diperoleh nilai λ dengan mengeliminasi persamaan tersebut maka muncul persamaan-persamaan berikut:
Eleminasi persamaan (15) dan (16) sehingga menghasilkan persamaan baru yaitu:

$$-6\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \quad (37)$$

Eleminasi persamaan (15) dan (17) sehingga menghasilkan persamaan baru yaitu:

$$20.000 + 0.5\lambda_1 + 8\lambda_3 - 8\lambda_4 + \lambda_5 - \lambda_6 = 0 \quad (38)$$

Eleminasi persamaan (15) dan (18) sehingga menghasilkan persamaan baru yaitu:

$$20.000 + +0{,}5\lambda_1 + \lambda_2 + 6\lambda_3 - 6\lambda_4 + \lambda_5 - \lambda_6 = 0 \quad (39)$$

Berdasarkan persamaan (37) sampai (39) dapat disederhanakan dengan melakukan eleminasi sehingga diperoleh persamaan baru sebagai berikut:
Eleminasi persamaan (37) dan (38) sehingga menghasilkan persamaan baru yaitu:

$$-20.000 - 0{,}5\lambda_1 - 6\lambda_2 - 6\lambda_3 + 8\lambda_4 - \lambda_5 + \lambda_6 = 0 \quad (40)$$

Eleminasi persamaan (37) dan (38) sehingga menghasilkan persamaan baru yaitu:

$$-20.000 - 0{,}5\lambda_1 - 7\lambda_2 - 4\lambda_3 + 6\lambda_4 - \lambda_5 + \lambda_6 = 0 \quad (41)$$

Berdasarkan persamaan (15) sampai (18) , (40) dan (41) maka persamaan tersebut dapat diubah menjadi persamaan linear untuk memperoleh nilai λ. Persamaan tersebut dapat ditulis sebagai berikut:

$$2\lambda_1 + \lambda_2 + 8\lambda_3 + \lambda_5 = -90.000 \quad (42)$$
$$2\lambda_2 + 7\lambda_2 + 6\lambda_3 + \lambda_5 = -90.000 \quad (43)$$
$$1{,}5\lambda_1 + \lambda_2 + 8\lambda_4 + \lambda_6 = -70.000 \quad (44)$$
$$1{,}5\lambda_1 + 6\lambda_2 + 6\lambda_4 + \lambda_6 = -70.000 \quad (45)$$
$$-0{,}5\lambda_1 - 6\lambda_2 - 6\lambda_3 + 8\lambda_4 - \lambda_5 + \lambda_6 = 20.000 \quad (46)$$
$$-0{,}5\lambda_1 - 7\lambda_2 - 4\lambda_3 + 6\lambda_4 - \lambda_5 + \lambda_6 = 20.000 \quad (47)$$

Selanjutnya agar memperoleh nilai λ_i, maka dapat dilakukan dengan aturan perkalian matriks dimana aturan perkalian matriks memiliki rumus umum $B = A\lambda_i$. Berdasarkan persamaan-persamaan (42) sampai (47) dapat dibentuk matriks A dan B sebagai berikut:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 1{,}5 & 1 & 0 & 8 & 0 & 1 \\ 1{,}5 & 6 & 0 & 6 & 0 & 1 \\ -0{,}5 & -7 & -6 & 8 & -1 & 1 \\ -0{,}5 & -7 & -4 & 6 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} -90.000 \\ -90.000 \\ -70.000 \\ -70.000 \\ 20.000 \\ 20.000 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan aturan perkalian matriks di atas, agar memperoleh nilai λ_i maka perlu mencari nilai invers dari matriks A karena λ_i memiliki rumus $\lambda_i = A^{-1}B$ Matriks A memiliki invers sebagai berikut:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 1.3E+16 & -4.6E+16 & 2E+16 & 1.3E+16 & -2E+16 & -1E+16 \\ -4.9E+14 & 1.8E+15 & -9E+14 & -4.9E+14 & 8.7E+14 & 4.9E+14 \\ -1.5E+15 & 5.5E+15 & -3E+15 & -1.5E+15 & 2.6E+15 & 1.5E+15 \\ -1.2E+15 & 4.6E+15 & -2E+15 & -1.2E+15 & 2.2E+15 & 1.2E+15 \\ -1.4E+16 & 4.6E+16 & -2E+16 & -1.4E+16 & 1.7E+16 & 1.4E+16 \\ -9.6E+15 & 3E+16 & -1E+16 & -9.6E+15 & 1.1E+16 & 9.6E+15 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan perkalian matriks diperoleh nilai λ_i sebagai berikut:

$$\lambda_i = A^{-1}B$$

$$\lambda_i = \begin{bmatrix} 1.3E+16 & -4.6E+16 & 2E+16 & 1.3E+16 & -2E+16 & -1E+16 \\ -4.9E+14 & 1.8E+15 & -9E+14 & -4.9E+14 & 8.7E+14 & 4.9E+14 \\ -1.5E+15 & 5.5E+15 & -3E+15 & -1.5E+15 & 2.6E+15 & 1.5E+15 \\ -1.2E+15 & 4.6E+15 & -2E+15 & -1.2E+15 & 2.2E+15 & 1.2E+15 \\ -1.4E+16 & 4.6E+16 & -2E+16 & -1.4E+16 & 1.7E+16 & 1.4E+16 \\ -9.6E+15 & 3E+16 & -1E+16 & -9.6E+15 & 1.1E+16 & 9.6E+15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -90.000 \\ -90.000 \\ -70.000 \\ -70.000 \\ 20.000 \\ 20.000 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_i = \begin{bmatrix} 655.360 \\ -98.304 \\ -196.608 \\ -131.072 \\ 557.056 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan perkalian matriks di atas, maka diperoleh nilai λ_i sebagai berikut:

$$\lambda_1 = 655.360$$
$$\lambda_2 = -98.304$$
$$\lambda_3 = -196.608$$
$$\lambda_4 = -131.072$$
$$\lambda_5 = 557.056$$
$$\lambda_6 = 0$$

Syarat cukup metode *Kuhn-Tucker* untuk kasus linear adalah λ yang tidak dibatasi oleh tanda artinya $\lambda_i \geq 0$dan $\lambda_i \leq 0$, maka pada kasus di atas syarat cukup metode *Kuhn-Tucker* terpernuhi. Eleminasi persamaan (33) dan (35) sehingga diperoleh$x_1 = 15$ dan $x_2 = 20$.Selanjutnya eliminasi persamaan (34) dan (36) untuk memperoleh nilai $x_3 = 15$ dan $x_4 = 20$. Sedangkan untuk keuntungan dapat dihasilkan dengan menghitung fungsi Lagrange yang merupakan fungsi tujuan untuk mencapai nilai hasil produksi dan keuntungan yang optimal dengan cara substitusi nilai (λ_i, x_i, S_i) sehingga diperoleh hasil sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
L\ (x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6)
&= 90.000(15) + 90.000(20) + 70.000(15) + 70.000(20) \\
&\quad + 655.360(2(15) + 2(20) + 1{,}5(15) + 1{,}5(20) - 122{,}5) \\
&\quad - 98.304(15 + 7(20) + 15 + 6(20) + 0 - 290) \\
&\quad + 196.608(8(15) + 6(20) + 0 - 240) - 131.072(8(15) + 6(20) + 0 - 240) \\
&\quad + 557.056(15 + 20 - 35) + 0(15 + 20 - 35)
\end{aligned}
$$

$$L\ (x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6) = 5.600.000$$

Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari penelitian, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Diperoleh model fungsi tujuan memaksimumkan $z = f(x)$ sebagai berikut:
$$z = 90.000x_1 + 90.000x_2 + 70.000x_3 + 70.000x_4$$
2. Memperoleh model fungsi Lagrange berikut:
$$
\begin{aligned}
L(x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6)
&= 90.000x_1 + 90.000x_2 + 70.000x_3 + 70.000x_4 \\
&\quad + \lambda_1(2x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 + {,}5x_4 + {S_1}^2 - 122{,}5) \\
&\quad + \lambda_2(x_1 + 7x_2 + x_3 + 6x_4 + {S_2}^2 - 290) \\
&\quad + \lambda_3(8x_1 + 6x_2 + {S_3}^2 - 240) + \lambda_4(8x_3 + 6x_4 + {S_4}^2 - 240) \\
&\quad + \lambda_5(x_1 + x_2 + {S_5}^2 - 35) + \lambda_6(x_3 + x_4 + {S_6}^2 - 35)
\end{aligned}
$$
3. Berdasarkan metode *Kuhn-Tucker* diperoleh hasil bahwa baju sekolah Madrasah Aliyah perempuan yang diproduksi sebanyak 15 buah, baju sekolah madrasah Aliyah laki-laki sebanyak 20 buah, baju sekolah Madrasah Ibtidaiyah perempuan sebanyak 15 buah, dan baju sekolah Madrasah Ibtidaiyah laki-laki sebanyak 20 buah dengan total produksi selama satu bulan sebanyak 70 buah baju dengan keuntungan Toko Baju Mitra sebanyak Rp 5.600.000.

Daftar Pustaka

[1] Amalia. "Peranan Persyaratan Karush-Kuhn-Tucker dalam Menyelesaikan Pemograman Kuadratis". Skripsi. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sumatera Utara. 2009.

[2] Dika, A. K. "Optimalisasi Hasil Produksi dengan Metode Kuhn-Tucker pada Pabrik Roti WN". Skripsi. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sumatera Utara. 2016.

[3] Moengin, P. "*Metode Optimasi*".CV. Muara Indah. Bandung. 2011.

[4] N. M. Asih dan I. N. Widana. "Aplikasi Metode Khun-Tucker Dalam Penjualan Oli Mobil".*Jurnal Matematika*. Vol. 2 No. 1, Halaman 57-68. 2012.

[5] N. M. Asih dkk. "Optimalisasi Penjualan Kain Endek dengan Metode Karush-Kuhn-Tucker (KKT)".*E-Jurnal Matematika*. Vol. 4. Halaman 158-162, 2015.

[6] Nur, Wahyudin., dkk. "Solusi Pemograman Nonlinier Desain Kamar Kost dengan Menggunkan Syarat Karush-Kuhn-Tucker (KKT)".*Jurnal Pendidikan MIPA*. Vol. 7. 2017.

[7] Sinha. S. M. "*Mathematical Programming: Theory and Method, First Edition*".Rajkamal Electric Press, Delhi.2006.