Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol 5, No 1, Januari 2019
ISSN 2460-4542, e-ISSN 2615-8663

Determinan Matriks $FLScirc_r$ Bentuk Khusus $n \times n, n \geq 3$ Menggunakan Metode Kondensasi Chio

Ade Novia Rahma[1], Elfira Safitri[2] ,Rahmawati[3]
[1,2] Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: adenoviarahma_mufti@yahoo.co.id

ABSTRAK

Determinan mempunyai peranan penting dalam menyelesaikan beberapa persoalan dalam matriks dan banyak dipergunakan dalam ilmu matematika maupun ilmu terapannya. Terdapat beberapa metode yang digunakan untuk menentukan determinan matriks diantaranya metode Sarrus, Ekspansi Kofaktor dan Kondensasi. Kondensasi Chio merupakan salah satu metode yang dapat digunakan dalam menentukan determinan matriks yang memiliki ordo $n \times n, n \geq 3$.Tulisan ini bertujuan untuk menentukan determinan matriks $FLScirc_r$ bentuk khusus dengan menggunakan metode Kondensasi Chio. Dalam menentukan determinan matriks $FLScirc_r$ bentuk khusus terdapat beberapa langkah yang dikerjakan. Pertama diperhatikan pola determinan matriks $FLScirc_r$ bentuk khusus berode 3×3 sampai 10×10. Kedua pembuktian bentuk umum determinan menggunakan metode induksi matematika. Hasil yang diperoleh adalah didapatkannya bentuk umum dari matriks $FLScirc_r$ bentuk khusus. Aplikasi juga dibahas didalam bentuk contoh.

Kata Kunci: Determinan, Kondensasi Chio, Induksi Matematika, Matriks $\boldsymbol{FLScirc_r}$

ABSTRACT

Determinants have an important role in solving several problems in the matrix and are widely used in mathematics and applied sciences. There are several methods used to determine matrix determinants including Sarrus method, Cofactor Expansion and Condensation. Chio condensation is one method that can be used to determine the determinant of a matrix that has an order of $\boldsymbol{n \times n, n \geq 3}$. *This study aims to determine the determinant of a specially* $\boldsymbol{FLScirc_r}$ *matrix form using the Chio Condensation method. In determining the determinant of a specially* $\boldsymbol{FLScirc_r}$ *matrix there are several steps taken. First, attention the determinant pattern of a specially* $\boldsymbol{FLScirc_r}$*matrix in orde of* $\boldsymbol{3 \times 3}$ *to* $\boldsymbol{10 \times 10}$. *Second, prove of the general form of determinant using the mathematical induction method. The result obtained is the determination of the general determinant from of a specially* $\boldsymbol{FLScirc_r}$*matrix.*

Keywords: *Determinant, Chio Condensation, Mathematical Induction,* $\boldsymbol{FLScirc_r}$*matrix*

Pendahuluan

Menurut Howard Anton [1] Sebuah matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks. Ukuran (ordo) suatu matriks dijelaskan dengan menyatakan banyaknya baris (garis horisontal) dan banyaknya kolom (garis vertikal) yang terdapat dalam matriks tersebut. Menurut Zhao Lin Jiang dan Zong Ben Xu [2] Suatu matriks bujur sangkar dikatakan matriks $FLScirc_r$ jika memenuhi formula pada persamaan dibawah ini

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ ra_{n-1} & a_0 + a_{n-1} & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ ra_{n-2} & ra_{n-1} + a_{n-2} & a_0 + a_{n-1} & \cdots & a_{n-4} & a_{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ra_2 & ra_3 + a_2 & ra_4 + a_3 & \cdots & a_0 + a_{n-1} & a_1 \\ ra_1 & ra_2 + a_1 & ra_3 + a_2 & \cdots & ra_{n-1} + a_{n-2} & a_0 + a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Dapat ditulis dengan $A = FLScirc_r(a_0, a_1, a_2, \dots a_{n-1})$.

Salah satu pembahasan dalam teori matriks adalah menentukan determinan suatu matriks. Determinan mempunyai peranan penting dalam menyelesaikan beberapa persoalan dalam matriks dan banyak dipergunakan dalam ilmu matematika maupun ilmu terapannya. Nilai determinan matriks dapat menentukan invers matriks. Jika nilai determinan matriks tidak nol, maka matriks tersebut punya invers. Namun jika nilai determinannya nol, maka matriks tidak mempunyai invers. Nilai determinan juga dapat menyelesaikan sistem persamaan linier. Sistem persamaan linier ini banyak digunakan oleh bidang ilmu optimasi, ekonomi dan lainnya.

Menghitung nilai determinan suatu matriks dapat menggunakan beberapa metode, diantaranya, Metode Sarrus, Metode Ekspansi Kofaktor, Metode Kondensasi Chio, Metode Eliminasi Gauss, Metode Dekomposisi. Pada makalah ini metode yang akan digunakan adalah Metode Kondensasi Chio. Menentukan nilai determinan suatu matriks berukuran kecil tidaklah begitu sulit. Namun jika matriksnya berukuran besar, maka menentukan determinan suatu matriks lumayan sulit. Artinya dieprlukan formula yang tepat utuk memudahkan menentukan determinan suatu matriks. Tujuannya, untuk memudahkan mendapatkan nilai determinan matriks. Hanya dengan mensubsitusi entri-entri mariks maka nilai determinannya didapat tanpa melalui proses yang panjang. Makalah ini membahas determinan matriks $FLScirc_r$ yang berukuran $n \times n$ dengan bentuk khusus.

Pembahasan matriks $FLScirc_r$ telah dikaji oleh peneliti Zhao Lin Jiang dan Zong Ben Xu [3] yang berjudul "*Effiecient Algorithm for Finding the Inverse and the Group Inverse of $FLScirc_r$ matrix*". Pada makalah kali ini penulis akan menentukan rumus umum untuk determinan matriks $FLScirc_r$ bentuk khusus sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} a & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & \cdots & a & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & a \\ ra & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{bmatrix} \text{dengan } a \neq 0 \in \mathbb{R}. \qquad (2)$$

Metode Penelitian

Adapun tinjauan pustaka yang penulis gunakan dalam menyusun penelitian ini adalah matriks $FLScirc_r$, determinan, determinan matriks $FLScirc_r$, serta induksi matematika.

Terdapat banyak jenis-jenis matriks, salah satunya adalah matriks $FLScirc_r$. Berikut diberikan definisi matriks $FLScirc_r$.

Definisi 1 (Zhao Lin Jiang dan Zong Ben Xu, 2005) Suatu matriks bujur sangkar dikatakan matriks $FLScirc_r$ jika memenuhi formula pada Persamaan (1).

Ada beberapa metode untuk menentukan determinan dari matriks bujur sangkar yaitu metode sarrus, metode minor dan kofaktor, metode kondensasi chio, metode eliminasi gauss, metode dekomposisi matriks. Berdasarkan 5 metode diatas, penulis hanya menggunakan metode kondensasi chio dalam mencari determinan suatu matriks.

Definisi 2 (F. Chio, 1853) Metode kondensasi Chio merupakan metode untuk menentukan nilai determinan matriks berordo $n \times n$ dengan cara mengkondensasikan (menyusutkan) ordo determinan matriks $n \times n$ menjadi determinan matriks ordo $(n-1) \times (n-1)$.

Berdasarkan penjelasan dari metode kondensasi Chio diatas maka dapat dibentuk rumus determinan menggunakan metode kondensasi chio dalam teorema berikut :

Teorema 1 (F.Chio, 1853) *Dimisalkan* $A = [a_{ij}]$ *merupakan matriks* $n \times n$ *dan andaikan* $a_{11} \neq 0$. *Misalkan D merupakan matriks yang diperoleh dengan menggantikan* a_{ij} *oleh* $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{ij} & a_{ij} \end{bmatrix}$, *maka*

$$|A| = \frac{1}{{a_{11}}^{n-2}} |D|.$$

Ada beberapa penelitian yang terkait dengan penelitian yang akan dikaji kali ini. Diantara penelitian-penelitian tersebut yang sangat mendukung adalah Adrianus Sumitro dkk[5]. Yang menjelaskan tentang kajian tentang Metode Kondensasi Chio pada Determinan Matriks $n \times n, n \geq 3$.

Salah satu metode pembuktian yang digunakan untuk membuktikan rumus yang diperoleh dari pola rekursif tersebut adalah induksi matematika. Induksi matematika adalah salah satu metode pembuktian dari banyak teorema dalam teori bilangan maupun dalam matematika lainnya. Induksi matematika merupakan salah satu argumentasi pembuktian suatu teorema atau pernyataan matematika yang semesta pembicaraannya himpunan bilangan bulat atau lebih khusus himpunan bilangan asli Sukirman [6].

Misalkan $p(n)$ adalah suatu proporsi/pernyataan yang akan dibuktikan kebenarannya untuk setiap bilangan asli n. Langkah-langkah pembuktiannya dengan induksi matematika adalah sebagai berikut :

1. Langkah (1) : Ditunjukkan bahwa $p(1)$ benar.
2. Langkah (2) : Diasumsikan bahwa $p(k)$ benar untuk suatu bilangan asli k dan akan ditunjukkan bahwa $p(k+1)$ juga benar.

Metodologi penelitian yang digunakan adalah studi literatur terdapat beberapa langkah yang dikerjakan. Pertama menentukan determinan matriks $FLScirc_r$ bentuk khusus 3×3 sampai 10×10, menduga bentuk umum determinan matriks $FLScirc_r$ bentuk khusus dengan memperhatikan pola rekursifnya. Kedua membuktikan bentuk umum determinan menggunakan metode induksi matematika.

Hasil dan Pembahasan

Diberikan matriks $FLScirc_r$ bentuk khusus orde 3×3 sampai 10×10 sebagai berikut :

$$A_3 = \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ 0 & a & a \\ ra & a & a \end{bmatrix}$$

Sehingga determinan dari matriks $FLScirc_r$ bentuk khusus menggunakan kondensasi chio diatas adalah :

$$|A_3| = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & a \\ a & a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & a \\ ra & a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & 0 \\ ra & a \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} a^2 & a^2 \\ a^2 - ra^2 & a^2 \end{bmatrix} = \frac{ra^4}{a} = ra^3$$

Lalu diberikan matriks $FLScirc_r$ bentuk khusus orde 4×4 sebagai berikut :

$$A_4 = \begin{bmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 0 & a & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \\ ra & a & 0 & a \end{bmatrix}$$

Sehingga determinan matriks $FLScirc_r$ bentuk khusus menggunakan kondensasi chio adalah :

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol 5, No 1, Januari 2019
ISSN 2460-4542, e-ISSN 2615-8663

$$|A_4| = \frac{1}{a^2}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a & a \\ 0 & a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & a \\ 0 & a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & a \\ ra & a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & 0 \\ ra & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & 0 \\ ra & a \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \frac{1}{a^2}\begin{bmatrix} a^2 & a^2 & 0 \\ 0 & a^2 & a^2 \\ a^2 - ra^2 & 0 & a^2 \end{bmatrix} = \frac{-(2-r)a^6}{a^2} = -(2-r)a^4$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} a & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & a \\ ra & a & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

Sehingga determinan matriks $FLScirc_r$ bentuk khusus menggunakan kondensasi chio adalah :

$$|A_5| = \frac{1}{a^3}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a & a \\ 0 & a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & a \\ ra & a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & 0 \\ ra & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & 0 \\ ra & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & 0 \\ ra & a \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \frac{1}{a^3}\begin{bmatrix} a^2 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & a^2 \\ a^2 - ra^2 & 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix} = \frac{ra^8}{a^3} = ra^5$$

Dengan menggunakan cara yang sama seperti sebelumnya didapat determinan matriks $FLScirc_r$ bentuk khusus menggunakan kondensasi chio sebagai berikut.

$$A_6 = \begin{bmatrix} a & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & a \\ ra & a & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

$|A_6| = -(2-r)a^6$

$$A_7 = \begin{bmatrix} a & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & a \\ ra & a & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

$|A_7| = ra^7$

$$A_8 = \begin{bmatrix} a & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & a \\ ra & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

$|A_8| = -(2-r)a^8$

$$A_9 = \begin{bmatrix} a & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & a \\ ra & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

$|A_9| = ra^9$

$$A_{10} = \begin{bmatrix} a & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & a \\ ra & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

$|A_{10}| = -(2-r)a^{10}$

Setelah kita mendapatkan nilai-nilai determinan dari matriks $FLScirc_r$ bentuk khusus yang berorde 3×3 sampai 10×10, maka akan dibuatkan bentuk umum dari determinan matriks $FLScirc_r$ bentuk khusus tersebut. Terlihat dalam Teorema 2 berikut.

Teorema 2 *Diberikan A_n suatu matriks $FLScirc_r$bentuk khusus berorde $n \times n, n \geq 3$ pada Persamaan (2) maka nilai determinan dari matriks A_n adalah:*

$$|A_n| = \begin{cases} ra^n & untuk\ n\ ganjil \\ (2-r)a^n & untuk\ n\ genap \end{cases}$$

Bukti.

Pembuktian teorema tersebut menggunakan induksi matematika.

Untuk n ganjil pembuktiannya sebagai berikut :

1. Basis Induksi. Akan ditunjukkan $p(3)$benar.
   Perhatikan bahwa :
   $$p\ (3){:}\ |A_3| = ra^n$$
   $$= ra^3.$$
   Dengan memperhatikan bentuk umum determinan 3×3 maka $p(3)$ benar.

2. Langkah induksi. Asumsikan $p(k)$ benar, yaitu $p(k): |A_k| = ra^k$, $k \geq 3$.
Selanjutnya akan dibuktikan $p(k+1)$ juga benar, yaitu

$$p(k+1): |A_{k+1}| = ra^{k+1}, \quad k \geq 3 \tag{3}$$

Pembuktian dimulai dari:

$$\begin{aligned}
|A_{k+1}| &= \begin{vmatrix} a & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & a & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ra & a & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}_{k+1} \\
&= a \begin{vmatrix} a & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & a & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ra & a & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}_{k} \\
&= a\,|A_k| \\
&= a\,ra^k \\
&= ra^{k+1}
\end{aligned}$$

Dengan memperhatikan Persamaan (3) maka $p(k+1)$ benar. Berdasarkan langkah 1 dan langkah 2 maka Teorema 2 terbukti. ■

Untuk membuktikan n genap gunakan cara yang sama.

Berikut diberikan contoh yang berhubungan dengan Teorema 2.

Contoh 1 Tentukan determinan dari matriks dibawah ini

$$A_5 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan soal diatas dapat ditulis $A_5 = FLScirc_2(2,2,0,0,0)$ dengan $r = 2, a = 2$ dan $n = 5$.

Penyelesaian :

$$|A_5| = \frac{1}{2^3} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \frac{1}{2^3} \begin{bmatrix} 2^2 & 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 & 2^2 \\ 2^2 - 4^2 & 0 & 0 & 2^2 \end{bmatrix} = \frac{4^8}{2^3} = 8.192.$$

Kesimpulan

Bentuk umum dari determinan matriks bentuk khusus seperti Persamaan (2) adalah:

$$|A_n| = \begin{cases} ra^n & untuk\ n\ ganjil \\ (2-r)a^n & untuk\ n\ genap \end{cases}$$

DaftarPustaka

[1] Anton, Howard., dan Rorres, Chris., *Dasar-Dasar Aljabar Linear Versi Aplikasi*, Edisi Ketujuh, Erlangga, Jakarta, 2004.
[2] Sukirman., *Pengantar Teori Bilangan*, Hanggar Kreator, Yogyakarta, 2006.
[3] Jiang, Zhaolin., dan Benxu, Zong., *Efficient Algorithm For Finding The Inverse And The Group Inverse Of FLScirc Matrix*, Journal of Application Math and Computing, Vol 18, No 1-2, 2005.
[4] Rinaldi, Munir., *Matematika Diskrit*, Edisi Kelima, Informatika, Bandung, 2012.
[5] H, Eves., *Chio's Expansion* , 3.6 in Elementary Matrix Theory, Hal 129-136, New York, 1996.
[6] Sumitro, Adrianus dkk., *Kajian Metode Kondensasi Chio Pada Determinan Matriks* $n \times n, n \geq 3$, Buletin Ilmiah Mat. Stat. Dan Terapannya, Vol 04 No. 03, Hal 279-284, 2015.