Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 4, No. 2, Juli 2018
ISSN 1693-2390 print/ISSN 2407-0939 online

Trace Matriks Berbentuk Khusus 2 *x* 2 Berpangkat Bilangan Bulat Negatif

Fitri Aryani [1], Yulianis [2]
[1,2] Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: khodijah_fitri@uin-suska.ac.id , nisyulia125@yahoo.com

ABSTRAK

Trace matriks merupakan jumlah dari elemen-elemen diagonal utama dari matriks bujur sangkar. Makalah ini membahas *trace* dari matriks yang berbentuk khusus $2x2$ berpangkat bilangan bulat negatif. Mendapatkan *trace* dari matriks berbentuk khusus $2x2$ berpangkat bilangan bulat negatif maka matriks harus memiliki invers Terdapat dua langkah dalam pembentukan bentuk umum *trace* matriks tersebut. Pertama, menentukan bentuk umum matriks berpangkat (A^{-n}) dari matriks khusus $2x2$ tersebut, dan membuktikan bentuk umum (A^{-n}) menggunakan induksi matematika. Kedua, menentukan bentuk umum $tr\ (A^{-n})$ dan membuktikannya dengan pembuktian langsung. Didapatkan bentuk umum *trace* matriks berbentuk khusus berpangkat bilangan bulat negatif ukuran $2x2$ untuk *n* ganjil dan *n* genap.

Kata kunci: *Induksi matematika, invers matriks, pemangkatan matriks, perkalian matriks, trace.*

ABSTRACT

Trace matrix is the sum of the main diagonal elements of a square matrix. In this paper, we discuss the trace of negative integer power of $2x2$ special matrix. To get the trace of negative integer power of $2x2$ special matrix is matrix must has an inverse. There are two steps in forming the general shape of the trace matrix. First, determine the general form of (A^{-n}) from special matrices $2x2$ and prove it using mathematical induction. Second, determine the general formr $tr\ (A^{-n})$ and prove it by direct proof. The results obtained a general shape of trace of negative integer power of $2x2$ special matrices for n odd and n even.

***Keywords** : Inverse of matrix, mathematical induction , matrix multiplication, power of matriks , trace.*

Pendahuluan

Matriks mempunyai peranan yang sangat penting dalam ilmu matematika. Pentingnya matriks dapat dilihat dengan begitu banyaknya penggunaan matriks dalam berbagai persoalan, seperti dalam bidang aljabar, statistik, dan lain sebagainya. Matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan, bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks. Hal tersebut diberikan di Anton[1].

Banyak hal yang dapat dilakukan pada sebuah matriks. Diantaranya perkalian matriks, mencari determinan matriks, menentukan invers matriks, *trace* matriks, dan lain sebagainya. Misalkan $A = [a_{ij}]$ adalah matriks bujur sangkar, maka *trace* matriks A adalah jumlah dari elemen-elemen diagonal utama dari matriks A dan dinotasikan dengan $tr(A)$ yang telah dipaparkan oleh Gentle [6] . Menghitung *trace* dari suatu matriks tidaklah begitu susah, namun apabila matriks tersebut adalah matriks yang berpangkat , maka untuk menghitung *trace*nya harus dipangkatkan terlebih dahulu sebanyak n. Sehingga untuk menghitung *trace* matriks berpangkat cukup rumit. Artinya, hal ini cukup menarik untuk diteliti bagaimana menemukan formula untuk menghitung *trace* matriks berpangkat tanpa menghitung perpangkatan matriks.

Penghitungan *trace* matriks berpangkat telah banyak menjadi perhatian. Datta et.al [5], telah mendapatkan algoritma penghitungan *trace* matriks berpangkat $Tr\ (A^k)$, dengan k adalah bilangan bulat dan A adalah matriks Hassenberg dengan unit *codiagonal*. Chu. Mt [4] membahas mengenai kalkulasi simbolik pada *trace* matriks tridiagonal yang berpangkat. Pembahasan *trace* juga terdapat pada beberapa aplikasi dalam teori matriks dan aljabar linier numerik. Sebagai contoh didalam penentuan nilai eigen suatu matriks simetris, prosedur dasar dalam mengestimasi *trace* (A^n) dan (A^{-n}) dengan n adalah bilangan bulat oleh Pan. [10]. Menurut Zarelua [12] pada teori bilangan dan kombinatorik, *trace* matriks berpangkat bilangan bulat berhubungan dengan kekongruenan Euler, yaitu:

$$Tr\left(A^{p^r}\right) = Tr\left(A^{p^{r-1}}\right) \ mod\ (p^r)$$

untuk semua matriks A bilangan bulat, p adalah bilangan prima dan r bilangan bulat. Makalah tersebut juga membahas mengenai invarian pada sistem dinamik yang digambarkan sebagai bentuk *trace* matriks berpangkat bilangan bulat. Contoh yang diberikan pada makalah tersebut adalah bilangan Lefschetz. Pada bidang analisis jaringan tepatnya pada *triangle counting in a graph*, menurut Avron [3] ketika menganalisa suatu jaringan yang kompleks, masalah terpenting yaitu menghitung bilangan total segitiga pada graph sederhana terhubung. Bilangan tersebut sama dengan $Tr(A^3)/6$, dengan A adalah matriks ketetanggaan pada graph.

Pembahasan mengenai *trace* matriks berpangkat juga telah dibahas oleh Pahade [9] dalam makalahnya "*Trace of positive integer power of real matrices*". Makalah tersebut mendapatkan bentuk umum *trace* matriks orde $2x2$ berpangkat bilangan bulat positif. Dalam makalah tersebut terdapat dua bentuk umum *trace* matriks berpangkat. Pertama, bentuk umum *trace* matriks berpangkat untuk n genap, yaitu:

$$tr(A^n) = \sum_{r=0}^{n/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)]\,[n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))](\det(A))^r (tr(A))^{n-2r} \quad (1)$$

Kedua, bentuk umum *trace* matriks berpangkat untuk n ganjil, yaitu:

$$tr(A^n) = \sum_{r=0}^{n-1/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)]\,[n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))](\det(A))^r (tr(A))^{n-2r} \quad (2)$$

Aryani [2] membahas mengenai *trace* matriks orde 2x2 berpangkat bilangan bulat negatif. Dalam makalah tersebut terdapat dua bentuk umum *trace* matriks berpangkat. Pertama, bentuk umum *trace* matriks berpangkat untuk n genap, yaitu:

$$tr(A^{-n}) = \frac{\sum_{r=0}^{n/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)]\,[n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))](\det(A))^r (tr(A))^{n-2r}}{(\det(A))^n} \quad (3)$$

Kedua, bentuk umum *trace* matriks berpangkat untuk n ganjil, yaitu:

$$tr(A^{-n}) = \frac{\sum_{r=0}^{n-1/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)]\,[n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))](\det(A))^r (tr(A))^{n-2r}}{(\det(A))^n} \quad (4)$$

Berdasarkan latar belakang tersebut maka makalah ini membahas mengenai *trace* matriks berbentuk khusus berpangkat bilangan bulat negatif, dengan bentuk matriksnya adalah:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}, \forall\, a, b \in \mathbb{R} \quad (5)$$

Tujuan penelitian ini adalah mendapatkan bentuk umum $tr\ (A^{-n})$ dengan A adalah matriks khusus seperti Persamaan (5). Diharapkan dengan bentuk umum tersebut tidak perlu lagi proses yang panjang untuk menentukan $tr\ (A^{-n})$, cukup dengan mensubstitusi entri – entri matriks kedalam bentuk umum $tr\ (A^{-n})$ tersebut.

Metode Penelitian

Metodologi penelitian yang digunakan pada makalah ini adalah tinjauan pustaka. Terdapat dua langkah secara umum yang akan dilakukan untuk mendapatkan bentuk umum *trace* matriks khusus 2 x 2 berpangkat bilanagn negatif. Pertama, menentukan bentuk umum A^{-n} dengan dugaan yang dilakukan dari A^{-1} sampai dengan A^{-12}. Serta membuktikannya dengan menggunakan induksi matematika. Kedua, menentukan $tr(\ A^{-n})$ dari bentuk umum (A^{-n}), dan membuktikan dengan pembuktian langsung.

Adapun beberapa bahan yang digunakan dalam penelitian ini yaitu sebagai berikut:

1. Perkalian Matriks

Definisi 1. Misalkan A adalah matriks $m \times k$ dan B adalah matriks $k \times n$. Perkalian A dan B, dinotasikan AB adalah matriks $m \times n$ dengan entri ke-(i, j) sama dengan jumlah perkalian dari elemen yang bersesuain dari baris ke-i dari A dan kolom ke- j dari B. Dengan kata lain, jika $AB = [c_{ij}]$, maka

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj}$$

Teorema 1. Jika A, B dan C adalah matriks dan c adalah skalar, maka sifat berikut ini benar.

a) $(AB)C = A(BC)$, (hukum asosiatif pada perkalian matriks)

b) $A(B+C) = AB + AC$, (hukum distributif kiri)

c) $(A+B)C = AC + BC$, (hukum distributif kanan)

d) $c(AB) = (cA)B = A(cB)$,

Definisi 2. Jika A adalah matriks bujursangkar, maka dapat didefinisikan pangkat-pangkat bilangan bulat tak negatif A menjadi.

$$A^0 = I, \qquad A^n = \underbrace{AA\ldots A}_{n\ faktor} \quad (n > 0)$$

Akan tetapi, jika A dapat dibalik, maka dapat didefinisikan pangkat bilangan bulat negatif menjadi

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \ldots A^{-1}}_{n\,faktor}.$$

Teorema 2. Jika A adalah matriks bujursangkar dan r serta s adalah bilangan bulat, maka berlaku:

a) $A^r A^s = A^{r+s}$.

b) $(A^r)^s = A^{rs}$.

2. Invers dan *Trace* Matriks

Definisi 3. Matriks bujur sangkar $A_{n \times n}$ mempunyai invers jika ada matriks B sehingga berlaku hubungan $AB = BA = I_n$ matriks B disebut sebagai invers dari matriks A atau sebaliknya.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

Jika $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ maka $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ dengan syarat $\det(A) \neq 0$.

Definisi 4. Misalkan $A=[a_{ij}]$ suatu matriks persegi berukuran $n\times n$, maka *trace* dari matriks A didefinisikan sebagai jumlah dari elemen diagonal matriks A dan dinotasikan dengan $tr(A)$. Dinyatakan bahwa *trace* matriks A adalah:

$$tr(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$$

3. Induksi Matematika

Prinsip induksi sederhana berbunyi sebagai berikut: Misalkan $p(n)$ menyatakan suatu pernyataan bilangan bulat positif dan akan dibuktikan bahwa pernyataan $p(n)$ tersebut benar untuk semua bilangan positif n maka untuk membuktikan pernyataan ini digunakan aturan sebagai berikut:

1. $p(1)$ benar, dan
2. Jika $p(n)$ benar, maka $p(n+1)$ juga benar untuk setiap $n\geq 1$.

Sehingga $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.

Langkah 1 dinamakan basis induksi, sedangkan langkah 2 dinamakan langkah induksi. Langkah induksi berisi asumsi (andaian) yang menyatakan bahwa $p(n)$ benar. Asumsi tersebut dinamakan hipotesis induksi. Bila kita sudah menunjukkan kedua langkah tersebut benar maka kita sudah membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n .

Hasil dan Pembahasan

Berdasarkan metodologi penelitian, maka pada bagian ini dibagi dua. Bagian pertama adalah bentuk umum perpangkatan matriks dan bagian keda adalah bentuk umum *trace* dari matriks berpangkat.

1. **Bentuk Umum Perpangkatan Matriks**

Berikut dipaparkan proses mendapatkan bentuk umum matriks berpangkat (A^{-n}) . Apabila $A=\begin{bmatrix}0 & a\\ b & 0\end{bmatrix}, \forall\, a,b\in\mathbb{R}$, maka dengan aturan perpangkatan matriks yang sesuai dengan Definisi 2 dan Definisi 3, maka diperoleh :

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix}0 & -a\\ -b & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \frac{a}{ab}\\ \frac{b}{ab} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{b}\\ \frac{1}{a} & 0\end{bmatrix}$$

$$A^{-2}=\begin{bmatrix}\frac{1}{ab} & 0\\ 0 & \frac{1}{ab}\end{bmatrix}\qquad A^{-3}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{ab^2}\\ \frac{1}{a^2b} & 0\end{bmatrix}$$

$$A^{-4}=\begin{bmatrix}\frac{1}{(ab)^2} & 0\\ 0 & \frac{1}{(ab)^2}\end{bmatrix}\qquad A^{-5}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{a^2b^3}\\ \frac{1}{a^3b^2} & 0\end{bmatrix}$$

$$A^{-6} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(ab)^3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(ab)^3} \end{bmatrix} \qquad A^{-7} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{a^3b^4} \\ \frac{1}{a^4b^3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{-8} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(ab)^4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(ab)^4} \end{bmatrix} \qquad A^{-9} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{a^4b^5} \\ \frac{1}{a^5b^4} & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{-10} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(ab)^5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(ab)^5} \end{bmatrix} \qquad A^{-11} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{a^5b^6} \\ \frac{1}{a^6b^5} & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{-12} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(ab)^6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(ab)^6} \end{bmatrix}$$

Berdasarkan hasil perpangkatan matriks tersebut, dapat dilihat bahwasannya dapat diduga bentuk umum perpangkatan matriks ada dua bentuk, untuk perpangkatan ganjil dan perpangkatan genap. Bentuk umum tersebut disajikan dalam teorema dibawah ini.

Teorema 3. Diberikan matriks dengan bentuk $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$ $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$, dengan A mempunyai invers, maka:

$$A^{-n} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}}} \\ \frac{1}{a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}}} & 0 \end{bmatrix} & \text{,untuk } n \text{ ganjil} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{(ab)^{\frac{n}{2}}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(ab)^{\frac{n}{2}}} \end{bmatrix} & \text{,untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

Bukti: Pembuktian menggunakan induksi matematika untuk n ganjil sebagai berikut:
Misalkan

$$p(n): A^{-n} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}}} \\ \frac{1}{a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}}} & 0 \end{bmatrix}$$

1) Akan ditunjukkan untuk $n = 1$, maka $p(1)$ benar, yaitu:

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 4, No. 2, Juli 2018
ISSN 1693-2390 print/ISSN 2407-0939 online

$$p(1): A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{a^{\frac{1-1}{2}} b^{\frac{1+1}{2}}} \\ \dfrac{1}{a^{\frac{1+1}{2}} b^{\frac{1-1}{2}}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{a^0 b^1} \\ \dfrac{1}{a^1 b^0} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{b} \\ \dfrac{1}{a} & 0 \end{bmatrix},$$

dengan memperhatikan bentuk A^{-1} di atas, maka $p(1)$ benar.

2) Asumsikan untuk $n = k$, $p(k)$ benar, yaitu:

$$p(k): A^{-k} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{a^{\frac{k-1}{2}} b^{\frac{k+1}{2}}} \\ \dfrac{1}{a^{\frac{k+1}{2}} b^{\frac{k-1}{2}}} & 0 \end{bmatrix}$$

untuk k ganjil. Maka akan dibuktikan untuk $n = k + 2$, $p(k+2)$ juga benar, yaitu:

$$A^{-(k+2)} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{a^{\frac{k+1}{2}} b^{\frac{k+3}{2}}} \\ \dfrac{1}{a^{\frac{k+3}{2}} b^{\frac{k+1}{2}}} & 0 \end{bmatrix}$$

Pembuktian dimulai dari

$$\begin{aligned} A^{-(k+2)} &= A^{-k} A^{-2} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{a^{\frac{k-1}{2}} b^{\frac{k+1}{2}}} \\ \dfrac{1}{a^{\frac{k+1}{2}} b^{\frac{k-1}{2}}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{ab} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{ab} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{a^{\frac{k+1}{2}} b^{\frac{k+3}{2}}} \\ \dfrac{1}{a^{\frac{k+3}{2}} b^{\frac{k+1}{2}}} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Oleh karena langkah (1) dan (2) sudah diperlihatkan benar, maka terbukti

$$A^{-n} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}}} \\ \dfrac{1}{a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}}} & 0 \end{bmatrix},$$ untuk n ganjil. Selanjutnya akan dibuktikan untuk n genap.

Misalkan

$$p(n): A^{-n} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(ab)^{\frac{n}{2}}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(ab)^{\frac{n}{2}}} \end{bmatrix}$$

1) Akan ditunjukkan untuk $n = 2$ maka $p(2)$ benar, yaitu:

$$p(2): A^{-2} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(ab)^{\frac{2}{2}}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(ab)^{\frac{2}{2}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{ab} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{ab} \end{bmatrix},$$ dengan memperhatikan bentuk A^{-2} di atas,

maka $p(2)$ benar.

2) Asumsikan untuk $n = k$, $p(k)$ benar, yaitu:

$$p(k): A^{-k} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(ab)^{\frac{k}{2}}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(ab)^{\frac{k}{2}}} \end{bmatrix}$$

dengan k genap. Maka akan dibuktikan untuk $n = k + 2$, $p(k + 2)$ juga benar, yaitu:

$$A^{-(k+2)} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(ab)^{\frac{k+2}{2}}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(ab)^{\frac{k+2}{2}}} \end{bmatrix}$$

Pembuktian dimulai dari

$$\begin{aligned} A^{-(k+2)} &= \left(A^{-k} A^{-2}\right) \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(ab)^{\frac{k}{2}}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(ab)^{\frac{k}{2}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{ab} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{ab} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(ab)^{\frac{k+2}{2}}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(ab)^{\frac{k+2}{2}}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Oleh karena langkah (1) dan (2) sudah diperlihatkan benar, maka terbukti

$$A^{-n} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(ab)^{\frac{n}{2}}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(ab)^{\frac{n}{2}}} \end{bmatrix},$$ unuk n genap. Berdasarkan pembuktian tersebut, maka Teorema 3

terbukti. ∎

2. Trace Matriks Khusus Berpangkat Bilangan Bulat Negatif

Setelah didapat bentuk umum matriks berpangkat yang dipaparkaan pada Teorema 3, maka didapat bentuk umum $tr\ (A^{-n})$. Bentuk umum $tr(A^{-n})$ dinyatakan dalam Teorema 4 sebagai berikut:

Teorema 4. Diberikan matriks dengan bentuk $= \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \forall\ a, b \in \mathbb{R}$, dengan A mempunyai invers, maka

$$tr(A^{-n}) = \begin{cases} 0 & ,\text{untuk } n \text{ ganjil} \\ \dfrac{2}{(-1)^{\frac{n}{2}}(\det(A))^{\frac{n}{2}}} & ,\text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

Bukti: Pembuktian teorema di atas menggunakan pembuktian langsung.
Berdasarkan Teorema 3 maka diperoleh bentuk umum $tr(A^{-n})$ untuk n ganjil yaitu:

$$tr(A^{-n}) = tr\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}}} \\ \dfrac{1}{a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}}} & 0 \end{bmatrix} = 0 + 0 = 0$$

BerdasarkanTeorema 3 maka diperoleh bentuk umum $tr(A^{-n})$ untuk n genap yaitu:

$$\begin{aligned} tr(A^{-n}) &= tr\begin{bmatrix} \dfrac{1}{(ab)^{\frac{n}{2}}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(ab)^{\frac{n}{2}}} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(ab)^{\frac{n}{2}}} + \frac{1}{(ab)^{\frac{n}{2}}} \\ &= \frac{2}{(ab)^{\frac{n}{2}}} \end{aligned}$$

Berdasarkan pembuktian tersebut, maka Teorema 4 terbukti. ■

Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan diatas, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}, \forall\ a, b\ \in \mathbb{R}$ dengan A mempunyai invers, maka Bentuk umum A^{-n} untuk n ganjil dan n genap diperoleh:

$$A^{-n} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}}} \\ \dfrac{1}{a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}}} & 0 \end{bmatrix} & \text{, untuk } n \text{ ganjil} \\ \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(ab)^{\frac{n}{2}}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(ab)^{\frac{n}{2}}} \end{bmatrix} & \text{, untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

2. Bentuk umum *trace* matriks berbentuk khusus berpangkat bilangan bulat negatif diperoleh:

$$tr(A^{-n}) = \begin{cases} 0 & \text{, untuk } n \text{ ganjil} \\ \dfrac{2}{(-1)^{\frac{n}{2}}(\det(A))^{\frac{n}{2}}} & \text{, untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

Daftar Pustaka

[1] Anton, H., *Aljabar Liniear elementer,* Edisi ke lima, halaman 59, Penerbit Erlangga Jakarta, 1987.
[2] Aryani, F., dan Solihin, M., Trace Matriks Real Berpangkat Bilangan Bulat Negatif, *Jurnal Sains Matematika dan Statistika,* Vol.3 (2), 2017.
[3] Avron, H., Counting Triangles in Large Graphs Using Randomized Matrix Trace Estimation, *Proceedings of KDD-LDMTA'10,* ACM, 2010.
[4] Chu, M.T., and Raleigh., Symbolic Calculation of the Trace of the Power of a Tridiagonal Matrix, *Computing,* 35, 257-268, 1985.
[5] Datta, B.N., and Datta, K., An Algorithm for Computing Powers of a Hessenberg Matrix and its Applications, *Linear Algebra and its Appications,* 14, 273 – 284, 1976.
[6] Gentle, J. E., *Matrix Algebra,* Springer, New York, 2007.
[7] Lewis, F.L., *Optimal Control,* Toronto : John Wiley & Sons, Inc. 1995.
[8] Munir, R., *Matematika Diskrit,* Edisi revisi kelima, halaman 151. Bandung 2012.
[9] Pahade, J., and Jha, M., Trace of positive integer power of real 2 × 2 Matrices, *Advances in Linear Algebra & Matrix Theory,* 5, 150-155, 2015.
[10] Pan, V., Estimating the Extremal Eigenvalues of a Symmetric Matrix, *Computers & Mathematics with Applications,* 20, 17 – 22, 1990.
[11] Rosen, K. H., *Discrete Mathematics and Its Application Seventh Ed,* McGraw-Hill, Singapore, 2007.
[12] Zarelua, A.V., On Congruences for the Trace of Powers of Some Matrices, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics,* 263, 78-98, 2008.