Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 4, No. 2, Juli 2018
ISSN 1693-2390 print/ISSN 2407-0939 online

Eksistensi Dan Kestabilan Optimal Nash PermainanDinamis Non-KooperatifDenganFaktorDiskonWaktuTak Berhingga

Nilwan Andiraja[1]
[1] Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: nilwanandiraja@uin-suska.ac.id

ABSTRAK

Penelitian ini membahas pembentukan kendali Nash dan analisa kestabilan pada permainan dinamis non-kooperatif kasus scalar untuk *N* pemain. Proses yang dilakukan dengan dibentuk terlebih dahulu persamaan permainan dinamis *N* pemain dengan pemberian factor diskon. Kemudian, dibentuk persamaan Hamilton dan persamaan aljabar Riccati. Persamaan aljabar Riccati dianalisa eksistensi masing-masing solusinya. Selanjutnya solusi persamaan aljabar Riccati digunakan untuk membentuk kendali Nash. Kendali Nash yang diperoleh disubstitusikan kepersamaan dinamis permainan dan dianalisa kestabilan persamaan dinamis permainan. Berdasarkan pembahasan diperoleh eksistensi solusi persamaan aljabar Riccati sehingga terdapat kendali Nash. Kemudian terdapat kendali Nash yang menstabilkan persamaan dinamis permainan.

Kata Kunci: Eksistensi, Kestabilan, Kendali, Nash, Non-kooperatif

ABSTRACT

This research discussed making of the Nash control and analysis of stability on dynamic game non-cooperative scalar case for N players with a discount factor. The process has first created the equation of dynamic game for N players with a discount factor. Then, the Hamilton equation and the algebraic Riccati equation is created. The algebraic Riccati equation analyzed the existence for each solution. Moreover, the solution of the algebraic Riccati equation used to create Nash control. The Nash control substituted to the equation dynamic game and analyzed the stability of the equation dynamic game. Based on the discussion acquired existence the solution of the algebraic Riccati equation then there is the Nash control. Finally, there is the Nash control that stabilizes the equation dynamic game.

Keywords: *Existence, Stability, Control, Nash, Non-cooperative*

Pendahuluan

Persoalan menentukan kendali Nash, telah dijelaskan oleh beberapa ahli diantaranya diberikan oleh Tamer Basar (1999), Weeren (1999) dan Jacob Engwerda (2000) yang telah menjelaskan tentang eksistensi kendali Nash untuk persoalan permainan dinamis non-kooperatif dengan waktu takhingga kasus non skalar. Penelitian lain oleh Michael R. Caputo (2013) yang dalam jurnalnya membahas mengenai kendali Nash pada persoalan permainan dinamis untuk waktu tak berhingga dengan penambahan factor diskon yang berfungsi eksponensial. Sementara itu penelitian yang dilakukan oleh Fabio S. Priuli (2015) telah membahas mengenai kendali Nash untuk waktu tak berhingga pada permainan linier kuadratik dengan penambahan factor diskon dengan menggunakan matriks Hamiltonian.

Berdasarkan, uraian tersebut dapat diperoleh bahwa penelitian mengenai kendali Nash pada permainan dinamis non-kooperatif telah dilakukan untuk waktu tak berhingga oleh Jacob Engwerda dan Weeren, namun dua peneliti tersebut tidak member penambahan factor diskon pada fungsi dinamis atau pada fungsi tujuannya. Sementara penelitian yang dilakukan oleh Philippe Michel, Michael R. Caputo dan Fabio S. Priuli telah membahas mengenai kendali Nash pada persoalan permainan dengan penambahan factor diskon pada sistem dinamisnya, namun persoalan permainan yang dibahas tidak berbentuk permainan dinamis non-kooperatif untuk kasus skalar.

Berdasarkan uraian tersebut, maka dalam penelitian ini yang akan dibahas mengenai mencari eksistensi kendali Nash pada permainan dinamis linier kuadratik non-kooperatif kontinu untuk kasus scalar waktu tak berhingga dengan factor diskon dan analisa kestabilan dari permainan dinamis linier kuadratik non-kooperatif kontinu untuk kasus scalar waktu tak berhingga dengan factor diskon.

MetodePenelitian

Metodologi yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literature dengan mengumpulkan berbagai informasi terhadap materi-materi yang berkaitan dengan penelitian yang diperoleh dari beberapa buku dan artikel, diantaranya :

Kestabilan

Sebelum pembahasan kestabilan perlu didefinisikan titik ekuilibrium, sebagai berikut.

Definisi 1. Diberikan persamaan diferensial orde satu yaitu $\dot{x} = f(x)$dengan nilai awal$x(0) = x_0$, sebuah vektor $\bar{x}$ yang memenuhi $f(x) = 0$ disebut titik ekuilibrium.

Definisi titik ekuilibrium, digunakan untuk memberikan definisi kestabilan sebagai berikut.

Definisi 2. Titik ekuilibrium$\bar{x}$dikatakan stabil jika $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ sehingga $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$ maka $\|x(t, x_0) - x < \varepsilon$, untuk semua $t \geq 0$. Titik ekuilibrium x dikatakan stabil asimtotik jika x merupakan titik stabil dan $\exists\delta > 0$ sehingga $\lim_{t\to\infty}\|x(t, x_0) - \bar{x}\| = 0$ memenuhi $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$.

Kendali Optimal Waktu Kontinu

Pada bagian ini dibahas masalah umum kendali optimal waktu kontinu untuk sistem dinamis *time-vary*. Diberikan persamaan diferensial dinamis yaitu,

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \tag{1}$$

Dengan $x(t)$ adalah vektor *state* internal dan $u(t)$ adalah vektor kendali input. Fungsi tujuan yang akan dicapai yaitu meminimalkan fungsi objektif, dengan persamaan

$$J(t_0) = \emptyset\big(x(T_f), T_f\big) + \int_{t_0}^{T_f} L(x(t), u(t), t)dt \tag{2}$$

Dengan t_0 adalah waktu awal dan $T_f$adalah waktu akhir.

Selanjutnya, untuk mencari solusi masalah kendali optimal waktu kontinu maka didefinisikan persamaan-persamaan berikut yang diperlukan untuk sebuah proses meminimalkan fungsi objektif.

Persamaan Hamilton :

$$H(x, u, t) = L(x, u, t) + \lambda^T(t)f(x, u, t) \tag{3}$$

Persamaan *state* $:\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = f$ (4)

Persamaan kostate $:-\dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial f^T}{\partial x}\lambda + \frac{\partial L}{\partial x}$ (5)

Kondisi stasioner : $0 = \frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial L}{\partial u} + \frac{\partial f^T}{\partial x}\lambda$ (6)

Kendali Nash

Diberikan kendali $u_i(t) = F_i(t)x(t)$, dengan $F_i(t) = -R_{ii}^{-1}B_i^T K_i(t)$ untuk $i = 1,2$. Selanjutnya pada kasus umpan balik akan diberikan kendali Nash yang akan menstabilkan fungsi dinamisnya. Banyaknya kendali Nash yang diberikan untuk setiap *t* dinyatakan dengan :

$$\Gamma_i^{lfb} = \{u_i(0, T_f | u_i(t) = F_i(t)x(t)\}, \quad i = 1,2 \tag{7}$$

Karena kendali yang diberikan memenuhi solusi ekuilibrium linier kendali Nash, maka diperlukan definisi berikut :

Definisi 3. Kendali $u_i^*(t) = F_i^*(t)x(t)$ merupakan solusi ekuilibrium linier kendali Nash jika memenuhi $J_1\big(u_1^*(t), u_2^*(t)\big) \leq J_1\Big(u_1\ (t), u_2^*(t)\Big)$ dan $J_2\big(u_1^*(t), u_2^*(t)\big) \leq J_2\Big(u_1^*(t), u_2\ (t)\Big)$ untuk setiap $u_i(t) \in \Gamma^{\mathrm{lfb}}$.

Model SistemDinamis*Discounted*

Pada bagian ini akan diberikan bentuk persaman sistem dinamis dengan pemberian factor diskon, yaitu

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B_1\tilde{u}_1 + B_2\tilde{u}_2 \tag{8}$$

Dengan fungsi tujuan setelah pemberian factor diskon sebagai berikut:

$$J_i(u_1, u_2) = \int_0^T e^{-\theta t}\,[x^T(t), u_1^T(t), u_2^T(t)]Q_1 \begin{bmatrix} x(t) \\ u_1(t) \\ u_1(t) \end{bmatrix} dt, \quad i = 1,2$$

Dengan didefinisikan $\tilde{x}(t) = e^{-\theta t}x(t)$ dan $\tilde{u}_i(t) = e^{-\theta t}u_i(t)$ maka fungsi tujuan menjadi :

$$J_i(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) = \int_0^T [\tilde{x}^T(t), \tilde{u}_1^T(t), \tilde{u}_2^T(t)]Q_1 \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{u}_1(t) \\ \tilde{u}_2(t) \end{bmatrix} dt.$$

Adapun langkah-langkah penelitian pada artikel ini sebagai berikut :

1. Membentukan model persamaan differensial dinamis kasus permainan non-kooperatif beserta fungsi tujuan waktu tak hingga dengan penambahan faktor diskon untuk kasus skalar untuk *N* pemain.
2. Berdasarkan alur permainan pada pembatasan masalah yaitu *loop* tertutup, maka untuk mencari kendali Nash pemain pertama diketahui kendali pemain yang lain.
3. Kendali Nash yang diketahui pada langkah (2) diatas, disubstitusikan ke persamaan differensial dinamis untuk *N* pemain.
4. Kemudian dibentuk persamaan Hamilton.
5. Berdasarkan langkah (4)di bentuk persamaan aljabar Riccati untuk *N* pemain.
6. Menganalisa eksistensi solusi persamaan aljabar Riccati di langkah (5), jika solusi eksis maka dibentuk kendaliNash untuk masing-masing pemain.
7. Menganalisa kestabilan sistem dinamis permainan dengan mensubstitusikankendali Nash yang diperoleh dari langkah (6) ke persamaan differensial dinamis di langkah (1).
8. Penarikan kesimpulan tentang bentuk model sistem dinamis kasus permainan non-kooperatif beserta fungsi tujuan waktu tak hingga dengan penambahan faktor diskon untuk kasus skalar untuk *N* pemain. Kemudian kesimpulan tentang eksistensi kendali Nash serta hasil analisa kestabilan sistem dinamis permainan untuk *N* pemain.

Hasil dan Pembahasan

Persamaan diferensial dinamis permainan untuk *N* pemain kasus scalar dengan factor diskon dibentuk dari Persamaan (8). Persamaan diferensial dinamis yang terbentuk sebagai berikut :

$$\dot{\tilde{x}} = (a - \theta)\tilde{x}(t) + \sum_{i=1}^{N} b_i \tilde{u}_i(t) \tag{9}$$

Dengan fungsi tujuan untuk *N* pemain setelah diberi diskon yaitu,

$$J = \int_0^\infty \{q_i \tilde{x}^2(t) + r_i \tilde{u}_i^2(t)\}\,dt, \quad i = 1,2,\dots,N \tag{10}$$

selanjutnya, dibentuk kendali Nash pemain pertama dengan diketahui $\tilde{u}_i = -r_i^{-1} b_i k_i \tilde{x}(t), i = 2,\dots,N,$ sehingga persamaan diferensial sistem dinamis permainan untuk pemain pertama menjadi,

$$\dot{\tilde{x}} = (a - \theta - s_2 k_2 - \cdots - s_N k_N)\tilde{x}(t) + b_1 \tilde{u}_1(t) \tag{11}$$

dengan $s_i = r_i^{-1} b_i^2$ untuk $i = 1,2,\dots,N.$
Selanjutnya dari persamaan (11) dan fungsi objektif untuk pemain pertama, diperoleh persamaan Hamilton yaitu,

$$H = \left(q_1 \tilde{x}^2(t) + r_1 \tilde{u}_1^2(t)\right) + \lambda\left(\left(a - \theta - \sum_{j=2}^{N} s_j k_j\right)\tilde{x}(t) + b_1 \tilde{u}_1(t)\right) \tag{12}$$

Kemudian dari Persamaan (12) dibentuk persamaan state, costate dan persamaan stasioner. Selanjutnya didefiniskan $\lambda = k_1 \tilde{x}(t)$, maka diperoleh persamaan diferensial Riccati yaitu,

$$\dot{k}_1 = -2q_1 - 2\left(a - \theta - \sum_{j=2}^{N} s_j k_j\right)k_1 + \frac{1}{2} s_1 k_1^2 \tag{13}$$

karena untuk kasus ini merupakan permainan dengan waktu tak berhingga, maka diperoleh persamaan aljabar Riccati yaitu,

$$\frac{1}{2}s_1k_1^2 - 2\left(a - \theta - \sum_{j=2}^{N} s_jk_j\right)k_1 - 2q_1 = 0 \tag{14}$$

Persamaan (4.20) merupakan persamaan aljabar Riccati yang memiliki solusi yaitu,

$$k_{1_{1,2}} = \frac{2\left(a - \theta - \sum_{j=2}^{N} s_jk_j\right) \pm \sqrt{4\left(a - \theta - \sum_{j=2}^{N} s_jk_j\right)^2 + 4s_1q_1}}{s_1}$$

Solusi$k_{1_{1,2}}$ memiliki eksistensi dan memiliki solusi real karena

$$4\left(a - \theta - \sum_{j=2}^{N} s_jk_j\right)^2 + 4s_1q_1 > 0 \tag{15}$$

sehingga terdapat kendali Nash untuk pemain pertama yaitu

$$\tilde{u}_1(t) = -r_1^{-1}b_1k_1\tilde{x}(t) \tag{16}$$

Selanjutnya, untuk pemain kedua diketahui kendali dari pemain pertama dan pemain yang lain yaitu $\tilde{u}_i(t) = -r_i^{-1}b_ik_i\tilde{x}(t),\ i = 1, \dots, N$ dengan $i \neq 2$. Sehingga persamaan diferensial sistem dinamis permainan untuk kasus pemain kedua menjadi,

$$\dot{\tilde{x}} = \left(a - \theta - \sum_{j=1,j\neq 2}^{N} s_jk_j\right)\tilde{x}(t) + b_2\tilde{u}_2(t) \tag{17}$$

Selanjutnya persamaan Hamilton untuk pemain kedua yaitu

$$H = (q_2\tilde{x}^2(t) + r_2\tilde{u}_2^2(t)) + \lambda\left(\left(a - \theta - \sum_{j=1,j\neq 2}^{N} s_jk_j\right)\tilde{x}(t) + b_2\tilde{u}_2(t)\right) \tag{18}$$

Selanjutnya dari persamaan Hamilton di Persamaan (18) dibentuk persamaan state, costate dan stasioner. Selanjutnya didefiniskan $\lambda = k_2\tilde{x}(t)$, maka diperoleh persamaan aljabar Riccati yaitu

$$\frac{1}{2}s_2k_2^2 - 2\left(a - \theta - \sum_{j=1,j\neq 2}^{N} s_jk_j\right)k_2 - 2q_2 = 0 \tag{19}$$

Persamaan (19) memiliki solusi yaitu,

$$k_{2_{1,2}} = \frac{2\left(a - \theta - \sum_{j=1,j\neq 2}^{N} s_jk_j\right) \pm \sqrt{4\left(a - \theta - \sum_{j=1,j\neq 2}^{N} s_jk_j\right)^2 + 4s_2q_2}}{s_2}$$

Solusi $k_{2_{1,2}}$memiliki eksistensi dan memiliki solusi real karena

$$4\left(a - \theta - \sum_{j=1,j\neq 2}^{N} s_jk_j\right)^2 + 4s_2q_2 > 0 \tag{20}$$

sehingga terdapat kendali Nash untuk pemain kedua yaitu

$$\tilde{u}_2(t) = -r_2^{-1}b_2k_2\tilde{x}(t). \tag{21}$$

Oleh karena itu, secara umum dengan persamaan diferensial dinamis N permainan pada persamaan (9) dengan fungsi objektif pada persamaan (10), maka dapat diperoleh,

$$\dot{\tilde{x}} = \left(a - \theta - \sum_{j\neq i}^{N} s_jk_j\right)\tilde{x}(t) + b_i\tilde{u}_i(t), \qquad i = 1,2, \dots, N \tag{22}$$

Kemudian berdasarkan persamaan (22) dan persamaan fungsi objektif pada persamaan (10), maka dapat dibentuk persamaan Hamilton yaitu

$$H = (q_i \tilde{x}^2(t) + r_i \tilde{u}_i^2(t)) + \lambda \left(\left(a - \theta - \sum_{j \neq i}^{N} s_j k_j \right) \tilde{x}(t) + b_i \tilde{u}_i(t) \right), i = 1,2, \dots, N \quad (23)$$

Selanjutnya dengan mendefenisikan $\lambda = k_i \tilde{x}(t), i = 1,2, \dots, N$, maka diperoleh persamaan aljabar Riccati yaitu,

$$\frac{1}{2} s_i k_i^2 - 2\left(a - \theta - \sum_{j \neq i}^{N} s_j k_j\right) k_i - 2q_i = 0, \;\; i = 1,2, \dots, N \quad (24)$$

Persamaan (24) akan memiliki solusi yaitu,

$$k_{i_{1,2}} = \frac{2\left(a - \theta - \sum_{j \neq i}^{N}(s_j k_j)\right) \pm \sqrt{4\left(a - \theta - \sum_{j \neq i}^{N}(s_j k_j)\right)^2 + 4 s_i q_i}}{s_i}, \qquad i = 1,2, \dots, N$$

Solusi tersebut memiliki eksistensi dan memiliki solusi real karena

$$4\left(a - \theta - \sum_{j \neq i}^{N} s_j k_j\right)^2 + 4 s_i q_i > 0, \;\; i = 1,2, \dots, N \quad (25)$$

sehingga terdapat kendali untuk N pemain yaitu

$$\tilde{u}_i(t) = -r_i^{-1} b_i k_i \tilde{x}(t), \;\; i = 1,2, \dots, N \quad (26)$$

Selanjutnya, persamaan diferensial sistem dinamis permainan akan menjadi stabil jika dipenuhi

$$\left(a - \theta - \sum_{i=1}^{N}(s_i k_i)\right) < 0 \quad (27)$$

Persamaan (27) akandipenuhijika di pilihsolusi k_{i_1}yaitu

$$k_{i_1} = \frac{2\left(a - \theta - \sum_{j \neq i}^{N}(s_j k_j)\right) + \sqrt{4\left(a - \theta - \sum_{j \neq i}^{N}(s_j k_j)\right)^2 + 4 s_i q_i}}{s_i}$$

untuk masing-masing kendali Nash untuk pemain ke N .
Selanjutnya dari persamaan (14), (19), dan (27) diasumsikan $s_1 = 0$, maka diperoleh

$$-2\left(a - \theta - \sum_{j=2}^{N} s_j k_j\right) k_1 - 2q_1 = 0 \quad (28)$$

$$\frac{1}{2} s_2 k_2^2 - 2\left(a - \theta - \sum_{j=3}^{N} s_j k_j\right) k_2 - 2q_2 = 0 \quad (29)$$

dan,

$$\left(a - \theta - \sum_{i=2}^{N}(s_i k_i)\right) < 0 \quad (30)$$

Berdasarkan persamaan (28)-(30), maka diperoleh solusi yaitu,

$$k_{2_{1,2}} = \frac{2\left(a - \theta - \sum_{j=3}^{N}(s_j k_j)\right) \pm \sqrt{4\left(a - \theta - \sum_{j=3}^{N}(s_j k_j)\right)^2 + 4 s_2 q_2}}{s_2}$$

dan,

$$k_1 = \frac{q_1}{-\left(a-\theta-\frac{2\left(a-\theta-\sum_{j=3}^{N}(s_j k_j)\right)\pm\sqrt{4\left(a-\theta-\sum_{j=3}^{N}(s_j k_j)\right)^2+4s_2 q_2}}{s_2}-\sum_{j=3}^{N} s_j k_j\right)}$$

selanjutnya, solusi k_1 dan $k_{2_{1,2}}$ di substitsikan ke Persaamaan (30), maka diperoleh bahwa persamaan (30) dipenuhi jika dipilih solusi k_{2_1}, yaitu

$$k_{2_1} = \frac{2\left(a-\theta-\sum_{j=3}^{N}(s_j k_j)\right)+\sqrt{4\left(a-\theta-\sum_{j=3}^{N}(s_j k_j)\right)^2+4s_2 q_2}}{s_2}$$

Oleh karena itu, untuk kasus $s_1 = 0$ sistem akan stabil jika dipilih solusi k_{2_1} dengan kendali Nash yaitu $\tilde{u}_2(t) = -r_2^{-1} b_2 k_2 \tilde{x}(t)$.

Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dapat disimpulkan bahwa eksistensi solusi untuk setiap persamaan aljabar Riccati dipenuhi karena $4\left(a-\theta-\sum_{j\neq i}^{N} s_j k_j\right)^2 + 4s_i q_i > 0,\ \ i = 1,2,\dots,N$ yang mengakibatkan eksistensi kendali Nash untuk setiap pemain juga dapat dipenuhi yaitu $\tilde{u}_i(t) = -r_i^{-1} b_i k_i \tilde{x}(t),\ \ i = 1,2,\dots,N$. Selanjutnya, persamaan diferensial sistem dinamis permainan akan menjadi stabil yaitu

$$\left(a-\theta-\sum_{i=1}^{N}(s_i k_i)\right) < 0$$

jika dipilih solusi k_{i_1}. Kemudian, jika diasumsikan $s_1 = 0$, maka sistem akan stabil jika dipilih solusi k_{2_1} dengan kendali Nash yaitu $\tilde{u}_2(t) = -r_2^{-1} b_2 k_2 \tilde{x}(t)$.

Daftar Pustaka

[1] Bartle, R.G. and Sherbert, D.R., *Introduction to Real Analysis*. John Wiley and Sons, second edition, New York, 1994.
[2] Basar, Tamer.,*Dynamicnoncooperative game theory*, SIAM, Philadelphia, 1999.
[3] Bellman, Richard. *Introduction to Matrix Analysis*, SIAM, Philadelphia, 1997.
[4] Caputro, Michael R., The Intrinsic comparative dynamics of locally differentiable feedback Nash equilibria of autonomous and exponentially discounted infinite horizon differential games. *Journal of Economic Dynamics and Control*; 37 ; 2013, pp.1982-1994.
[5] Engwerda, Jacob.,Feedback Nash equilibria in the scalar infinite horizon LQ-game. *Automatica*; 36; ;2000, pp135-139.
[6] Engwerda, Jacob., *LQDynamic Optimization and Differential Games*, John Wiley & Sons, Inc, Chichester, 2005.
[7] Haberman, Richard.,*Mathematical Models*. Prentice-Hall.Inc, New Jersey, 1977.
[8] Lewis, Frank.L. *Applied Optimal Control and Estimation*, Prentice-Hall.Inc, New Jersey :1992.
[9] Michel, Phillipe., On the Selection of One Feedback Nash Equilibrium in Discounted Linear-Quadratic Games. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 117, 2003, pp231-243.
[10] Ogata, Katsuhiko.,*Discrete-Time Control Systems*, Prentice-Hall, New Jersey, 1995.
[11] Olsder, G.J.,*Mathematical System Theory*, University of Technology, Delft, 1994.
[12] Perko, Lawrence.,*Differential Equations and Dynamical System*, Springer-Verlag, New York, 1991.
[13] Priuli, Fabio S., Linear-Quadratic N -Person and Mean-Field Games: Infinite Horizon Games with Discounted Cost and Singular Limits. *Journal Dynamic Games and Applications*, 5, 2015,pp397-419.
[14] Sanchez, David A., *Differential Equations An Introduction*. Addison-Wesley , New Mexico, 1984
[15] Weeren, A.J.T.M dkk., Asymptotic analysis of linear feedback Nash equilibria in nonzero-sum linear-quadratic differential games, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 101, 1999,pp693–723.