Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 4, No. 2, Juli 2018
ISSN 1693-2390 print/ISSN 2407-0939 online

Determinan Matriks Toeplitz Bentuk Khusus Menggunakan Ekspansi Kofaktor

Fitri Aryani[1], Corry Corazon Marzuki[2]
[1,2] Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: khodijah_fitri@uin-suska.ac.id; corry@uin-suska.ac.id

ABSTRAK

Determinan mempunyai peranan penting dalam menyelesaikan beberapa persoalan dalam matriks dan banyak dipergunakan dalam ilmu matematika maupun ilmu terapannya. Salah satu cara sederhana dalam menentukan determinan suatu matriks menggunakan ekspansi kofaktor. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan determinan dari suatu matriks toeplitz bentuk khusus dengan menggunakan ekspansi kofaktor. Dalam menentukan determinan matriks toeplitz bentuk khusus tersebut, terdapat beberapa langkah yang dikerjakan. Pertama diperhatikan bentuk pola determinan dari matriks toeplitz bentuk khusus orde 2×2 sampai 10×10. Kedua membuktian bentuk umum determinan menggunakan metode induksi matematika. Hasil yang diperoleh adalah didapatkannya bentuk umum determinan dari matriks toeplitz bentuk khusus. Aplikasi juga dibahas dalam bentuk contoh.

Kata kunci: Determinan, Ekspansi kofaktor, Induksi matematika, Matriks toeplitz.

ABSTRACT

Determinants have an important role in solving several problems in the matrix and are widely used in mathematics and applied sciences. One simple way of determining the determinant of a matrix is by cofactor expansion. This study aims to determine the determinant of a specially toeplitz matrix by using cofactor expansion. In determining the determinant of a specially toeplitz matrix, there are steps. First, attention the determinant of a specially toeplitz matrix in orde of 2×2 *to* 10×10. *Second, prove of the general form of determinants using mathematical induction methods. The result obtained is the determination of the general determinant form of a specially toeplitz matrix.*

Keywords: *Determinant, Cofactor expansion, Mathematical induction, Toeplitz matrix*.

Pendahuluan

Teori matriks merupakan salah satu cabang ilmu aljabar linier yang menjadi pembahasan penting dalam ilmu matematika. Sejalan dengan perkembangan ilmu pengetahuan, aplikasi matriks banyak dijumpai dalam kehidupan sehari-hari, baik dalam bidang matematika maupun ilmu terapannya.

Menurut Anton dan Chris Rorres [1], matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Salah satu jenis matriks adalah matriks toeplitz. Menurut Gray [3], matriks toeplitz adalah matriks simetris yang sirkulan, dimana setiap unsur pada diagonal utamanya sama dan setiap unsur pada subdiagonal yang bersesuaian dengan diagonal utamanya juga sama. Bentuk umum dari matriks toeplitz adalah sebagai berikut.

$$T_n = (t_{ij}) \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \cdots & t_{-(n-2)} & t_{-(n-1)} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{-(n-3)} & t_{-(n-2)} \\ t_2 & t_1 & t_0 & \cdots & t_{-(n-4)} & t_{-(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t_{(n-2)} & t_{(n-3)} & t_{(n-4)} & \cdots & t_0 & t_{-1} \\ t_{(n-1)} & t_{(n-2)} & t_{(n-3)} & \cdots & t_1 & t_0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Dimana t_{ij} adalah entri-entri yang terletak pada baris ke-i dan kolom ke-j.

Salah satu pembahasan dalam teori matriks adalah menentukan determinan suatu matriks. Determinan mempunyai peranan penting dalam menyelesaikan beberapa persoalan dalam matriks dan banyak dipergunakan dalam ilmu matematika maupun ilmu terapannya. Nilai determinan matriks dapat menentukan invers matriks. Jika nilai determinan matriks tidak nol, maka matriks tersebut punya invers. Namun jika nilai detrminannya nol, maka matrisk tidak punya invers. Nilai determinan juga dapat menyelesaikan sistem persamaan linier. Sistem persamaan linier ini banyak digunakan oleh bidang ilmu optimasi, ekonomi, dan lainnya.

Menghitung nilai determinan suatu matriks dapat menggunakan beberapa metode, diantaranya, Metode Sarrus, Metode Ekspansi Kofaktor, Metode CHIO, Metode Eliminasi Gauss, Metode Dekomposisi. Pada makalah ini metode yang akan digunakan adalah Metode Ekspansi Kofaktor. Menentukan nilai determinan matriks dengan ukuran yang kecil, tidaklah begitu sulit. Namun jika matriksnya berukuran besar, maka menentukan determinannya lumayan sulit. Artinya diperlukan formula yang tepat untuk memudahkan menentukan determinan suatu matriks. Tujaunnya, untuk memudahkan mendapatkan nilai determinan matriks. Hanya dengan mensubsitusi entri-entri matriks maka nilai detrminananya didapat tanpa melalui proses yang panjang. Makalah ini membahas determinan matriks toeplitz yang berukuran $n \times n$ dengan bentuk khusus.

Pembahasan mengenai matriks toeplitz telah banyak dikaji oleh peneliti-peneliti sebelumnya. Pada Tahun 1991, Kouachi [4] telah melakukan penelitian mengenai nilai eigen dan vektor eigen dari matriks toeplitz tridiagonal dengan entri-entri diagonalnya tidak konstan. Selanjutnya, pada Tahun Gray [3] juga melakukan penelitian mengenai teori matriks dengan judul "*Toeplitz and Circulant Matrices*".

Siregar dkk [6] juga membahas mengenai matriks toeplitz pada makalahnya yang berjudul "Invers Suatu Matriks Toeplitz Menggunakan Metode Adjoin". Makalah tersebut selain merumuskan formula invers dari suatu matriks toeplitz dengan bentuk khusus juga menentukan bentuk umum determinan matriks toeplitz dengan bentuk khusus seperti berikut ini :

$$T_n = \begin{bmatrix} 0 & x & \cdots & x \\ x & 0 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \cdots & 0 \end{bmatrix} \forall\, x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Adapun hasil determinan matriks toeplitz beorde n pada Persamaan (2) yang di peroleh pada makalah tersebut adalah sebagai berikut.

$$|T_n| = (-1)^n(n-1)x^n \tag{4}$$

Dari hasil diatas, dapat dilihat bahwa ada rumus khusus untuk menentukan determinan, matriks toeplitz yang bentuknya unik seperti Persamaan (2). Sehingga untuk menghitung determinan, tidak perlu lagi proses yang panjang dan rumit menggunakan metode-metode yang biasa digunakan, namun cukup dengan mensubstitusi nilai$n$ dan x yang ada pada matriks ke bentuk umum di atas.

Pada tahun 2015, Aryani dan Corazon [2] juga telah melakukan penelitian mengenai invers matriks toeplitz tridiagonal. Menurut Salkuyeh [5], suatu matriks toeplitz tridiagonal berorde n adalah suatu matriks yang berbentuk :

$$A = \begin{bmatrix} b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \end{bmatrix} \tag{5}$$

dengan $a, c \neq 0 \in \mathbb{R}$. Pada penelitian tersebut, penulis telah mendapatkan bentuk umum dari determinan, matriks kofaktor, dan invers dari matriks toeplitz tridiagonal pada Persamaan (5). Pada makalah ini penulis akan menentukan rumus umum untuk determinan matriks toeplitz dengan bentuk khusus berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/a & 1/a & 1/a & 1/a & \dots & 1/a \\ a & 0 & 1/a & 1/a & 1/a & \dots & 1/a \\ a & a & 0 & 1/a & 1/a & \dots & 1/a \\ a & a & a & 0 & 1/a & \dots & 1/a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 1/a \\ a & a & a & a & a & \dots & 0 \end{bmatrix} \text{dengan } a \neq 0 \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Metode Penelitian

Adapun tinjauan pustaka yang penulis gunakan dalam menyusun penelitian ini adalah matriks toeplitz, determinan, determinan matriks toeplitz, serta induksi matematika.

Terdapat banyak jenis-jenis matriks, salah satunya adalah matriks toeplitz. Berikut diberikan definisi matriks toeplitz.

Definisi 1 (Robert, 2005) Sebuah matriks toeplitz adalah matrik berukuran $n \times n$ dinotasikan sebagai $T_n = [t_{kj}; k, j = 0,1, \dots, n-1]$, dengan $t_{kj} = t_{k-j}$. Matriks toeplitz dinyatakan dalam bentuk

$$T_n = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \cdots & t_{-(n-1)} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{-(n-2)} \\ t_2 & t_1 & t_0 & \cdots & t_{-(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{(n-1)} & t_{(n-1)} & \cdots & t_1 & t_0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Ada beberapa metode untuk menentukan determinan dari matriks bujur sangkar yaitu metode sarrus, metode minor dan kofaktor, metode CHIO, metode eliminasi Gauss, metode dekomposisi matriks. Berdasarkan 5 metode di atas, penulis hanya menggunakan metode minor dan kofaktor dalam mencari determinan suatu matriks.

Definisi 2 (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004) Jika A adalah matriks bujur sangkar, maka minor dari entri a_{ij} dinyatakan sebagai M_{ij} dan didefinisikan sebagai determinan dari submatriks yang tersisa setelah baris ke-i dan kolom ke$-j$ dihilangkan dari A. Bilangan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dinyatakan sebagai C_{ij} dan disebut sebagai kofaktor dari entri a_{ij}.

Berdasarkan penjelasan dari minor dan kofaktor di atas, maka dapat dibentuk rumus determinan menggunakan ekpansi kofaktor dalam teorema berikut:
Teorema 1 (Howard Anton dan Chris Rorres, 2004) Determinan dari matriks A, dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri pada sebarang baris (atau kolom) dengan kofaktor-kofaktornya dan menjumlahkan hasil kali – hasil kali yang diperoleh, dimana untuk setiap $1 \leq i \leq n$dan $1 \leq j \leq n$,

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$
(*ekpansi kofaktor sepanjang kolom ke-j*)

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$
(*ekpansi kofaktor sepanjang baris ke-i*)

Ada beberapa penelitian yang terkait dengan penelitian yang akan dikaji kali ini. Diantara penelitian-penelitian tersebut yang sangat mendukung adalah Siregar dkk [6] dan Aryani dkk [2]. Matriks toeplitz yang dibahas oleh Siregar, dkk [6] pada tahun 2014 adalah matriks toeplitz T_n seperti Persamaan (2). Mereka telah mendapatkan rumus umum determinan, matriks kofaktor, dan invers dari matriks toeplitz tersebut. Hasil penelitiannya disajikan pada makalah ini hanya mengenai determinan saja yang tertuang dalam Teorema 3 berikut.

Teorema 3 (Bakti Siregar, dkk, 2014) Misalkan T_n suatu matriks Toeplitz berorde $n \geq 2$ pada Persamaan (1.2) di mana $\forall x \in \mathbb{R}$ maka nilai determinan matriks T_n adalah

$$|T_n| = (-1)^{n+1}(n-1)x^n$$

Salah satu metode pembuktian yang digunakan untuk membuktikan rumus yang diperoleh dari pola rekursif tersebut adalah induksi matematika. Induksi matematika adalah salah satu metode pembuktian dari banyak teorema dalam teori bilangan maupun dalam matematika lainnya. Induksi matematika merupakan salah satu argumentasi pembuktian suatu teorema atau pernyataan matematika yang semesta pembicaraannya himpunan bilangan bulat atau lebih khusus himpunan bilangan asli Sukirman [7].

Misalkan $\mathrm{p}(n)$ adalah suatu proporsi/pernyataan yang akan dibuktikan kebenarannya untuk setiap bilangan asli n. Langkah-langkah pembuktiannya dengan induksi matematika adalah sebagai berikut :

1. Langkah (1) : Ditunjukkan bahwa $\mathrm{p}(1)$ benar.
2. Langkah (2) : Diasumsikan bahwa $\mathrm{p}(k)$ benar untuk suatu bilangan asli k dan akan ditunjukkan bahwa $\mathrm{p}(k+1)$ juga benar.

Metodologi penelitian yang digunakan adalah studi literatur terdapat beberapa langkah yang dikerjakan. Pertama menentukan determinan matriks toeplitz bentuk khusus orde 2×2 sampai 10×10, menduga bentuk umum determinan matriks toeplitz bentuk khusus dengan memperhatikan pola rekursifnya. Kedua membuktian bentuk umum determinan menggunakan metode induksi matematika.

Hasil dan Pembahasan

Setelah kita mendapatkan nilai-nilai determinan dari matriks teoplitz bentuk khusus yang berorde $2\,x\,2$sampai $20\,x\,20$, maka akan dibuatkan bentuk umum dari determinan matriks teoplitz bentuk khusus tersebut. Terlihat dalam Teorema 4.1 berikut.

Teorema 4. Diberikan A_n suatu matriks teoplitz bentuk khusus berorde $n \geq 1$ pada Persamaan (6) dengan $a \neq 0$ maka nilai determinan matriks A_n adalah

$$|A_n| = \begin{cases} 0, & jika\ n \equiv\ 6\ (mod\ 2)\ atau\ n =\ 6\ (mod\ 5) \\ 1 & jika\ n \equiv\ 6\ (mod\ 0)\ atau\ n =\ 6\ (mod\ 1) \\ -1 & jika\ n \equiv\ 6\ (mod\ 3)\ atau\ n =\ 6\ (mod\ 4) \end{cases}$$

Bukti:

Pembuktian teorema tersebut dengan menggunakan induksi matematika.

(1) Basis induksi. Akan ditunjukkan $p(1)$ dan $p(2)$ benar.
Perhatikan bahwa :
$|A_1| = |1| = 1$dan $|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1/a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 0$. Jadi terbukti bahwa $p(1)$ dan $p(2)$ benar.

(2) Langkah induksi. Asumsikan $p(1) \wedge p(2) \wedge p(3) \wedge \dots \wedge p(k)$ benar. Maka akan dibuktikan $p(k+1)$ benar.

a. Jika $k \equiv 6\,(mod\ 1)$, maka diasumsikan $|A_1| = 1$, $|A_2| = 0$, $|A_3| = -1,\ldots,|A_{k-1}| = 1$, $|A_k| = 1$. Sehingga diperoleh:

$$|A_{k+1}| = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1.|A_k| - a \begin{bmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

$$= |A_k| - a.\frac{1}{a}|A_{k-1}| = |A_k| - |A_{k-1}| = 1 - 1 = 0$$

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 4, No. 2, Juli 2018
ISSN 1693-2390 print/ISSN 2407-0939 online

b. Jika $k \equiv 6\ (mod\ 4)$, maka diasumsikan $|A_1| = 1$, $|A_2| = 0$, $|A_3| = -1,\dots,$ $|A_{k-1}| = -1$, $|A_k| = -1$. Sehingga diperoleh:

$$|A_{k+1}| = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1.|A_k| - a \begin{bmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

$$= |A_k| - a.\frac{1}{a}|A_{k-1}| = |A_k| - |A_{k-1}| = -1 - (-1) = 0$$

c. Jika $k \equiv 6\ (mod\ 5)$, maka diasumsikan $|A_1| = 1$, $|A_2| = 0$, $|A_3| = -1,\dots,$ $|A_{k-1}| = -1$, $|A_k| = 0$. Sehingga diperoleh:

$$|A_{k+1}| = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1.|A_k| - a \begin{bmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

$$= |A_k| - a.\frac{1}{a}|A_{k-1}| = |A_k| - |A_{k-1}| = 0 - (-1) = 1$$

d. Jika $k \equiv 6\ (mod\ 0)$, maka diasumsikan $|A_1| = 1$, $|A_2| = 0$, $|A_3| = -1,\dots,$ $|A_{k-1}| = 0$, $|A_k| = 1$. Sehingga diperoleh:

$$|A_{k+1}| = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1.|A_k| - a \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix}$$

$$= |A_k| - a.\frac{1}{a}|A_{k-1}| = |A_k| - |A_{k-1}| = 1 - 0 = 1$$

e. Jika $k \equiv 6\ (mod\ 2)$, maka diasumsikan $|A_1| = 1$, $|A_2| = 0$, $|A_3| = -1, \dots,$ $|A_{k-1}| = 1$, $|A_k| = 0$. Sehingga diperoleh:

$$|A_{k+1}| = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1.|A_k| - a \begin{vmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix}$$

$$= |A_k| - a.\frac{1}{a}|A_{k-1}| = |A_k| - |A_{k-1}| = 0 - 1 = -1$$

f. Jika $k \equiv 6\ (mod\ 3)$, maka diasumsikan $|A_1| = 1$, $|A_2| = 0$, $|A_3| = -1, \dots,$ $|A_{k-1}| = 0$, $|A_k| = -1$. Sehingga diperoleh:

$$|A_{k+1}| = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1/a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1.|A_k| - a \begin{bmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$$

$$= |A_k| - a.\frac{1}{a}|A_{k-1}| = |A_k| - |A_{k-1}| = -1 - 0 = -1. \quad \blacksquare$$

Kesimpulan

Bentuk umum dari determinannya matriks toeplitz bentuk khusus seperti pada Persamaan (2) adalah:

$$|A_n| = \begin{cases} 0, & jika\ n \equiv 6\ (mod\ 2)\ atau\ n = 6\ (mod\ 5) \\ 1 & jika\ n \equiv 6\ (mod\ 0)\ atau\ n = 6\ (mod\ 1) \\ -1 & jika\ n \equiv 6\ (mod\ 3)\ atau\ n = 6\ (mod\ 4) \end{cases}$$

Daftar Pustaka

[1] Anton, Howard., dan Rorres, Chris., *Dasar-Dasar Aljabar Linear Versi Aplikasi*, Edisi Ketujuh, Erlangga, Jakarta, 2004.

[2] Aryani, F., and Corazon, C.M., Inverse of Tridiagonal Toeplitz Matrix By Adjoint Method, *Proceeding Icostechs*, FST UIN Suska Riau, ISSN: 2356-542X. 2016.

[3] Gray, Robert M., *Toeplitz and Circulan Matrices*, Stanford 94305, De- partment of Electrical Engineering Stanford, USA. 2005.

[4] Kouachi, S., *Eigenvalues and Eigenvectors of Some Tridiagonal Matrices with Non Constant Diagonal Entries*. ELA, In press. 1991.

[5] Salkuyeh, Davod Khojasteh., Positive Integer Power of the Tridiagonal Matriks Toeplitz, *International Mathematical Forum*, Mohaghegh Ardabili University, Ardabil, Iran, Vol 1, no. 22, 1061 – 1065, 2006.

[6] Siregar, Bakti., dkk., Invers Suatu Matriks Toeplitz Menggunakan Metode Adjoin, *Saintia Matematika*. 02, (01), 85-94, 2014.

[7] Sukirman., *Pengantar Teori Bilangan*, Hanggar Kreator, Yogyakarta, 2006.