Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 4, No. 2, Juli 2018
ISSN 1693-2390 print/ISSN 2407-0939 online

Orde Konvergensi Modifikasi Metode Weerakoon-Fernando dan Homeier dengan Parameter Riil Menggunakan Rataan Harmonik

Muhammad Arif [1], Wartono [2]
[1,2] Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
[2] e-mail : wartono@uin-suska.ac.id

ABSTRAK

Makalah ini membahas tentang modifikasi metode Weerakoon dan Homeier, yang menggunakan rata-rata Harmonik. Selanjutnya, turunan pertama ditaksir menggunakan penyetaraan metode Varian super-Halley dan Newton-Steffensen dengan menambahkan parameter riil $\theta \in R$. Berdasarkan penelitian diperoleh metode baru yang memiliki orde konvergensi tiga untuk $\theta \neq 4$ dan orde konvergensi empat untuk $\theta = 4$ serta melibatkan tiga evaluasi fungsi. Simulasi numerik dilakukan terhadap beberapa fungsi untuk menunjukkan performa modifikasi metode Weerakoon dan Homeier.

Katakunci: Indeks efisiensi, Metode Homeier, Metode Weerakoon, Orde konvergensi.

ABSTRACT

This paper discusses a modification of Weerakoon and Homeier methods, which uses a mean of Harmonics. Furthermore, the first derivative was approximated by using an equality of Variant super-Halley and Newton-Steffensen methods with real parameter $\theta \in R$. Based on the research, we present a new method that has third orde convergence for $\theta \neq 4$ and has fourth orde convergence for $\theta = 4$ with three evaluation of functions. Numerical simulations is presented functions to perform a modified methods of Weerakoon and Homeier.

Keywords: *Efficiency index, Homeier's method, Weerakoon's method, Order of convergence.*

Pendahuluan

Permasalahan yang sering muncul dalam matematika ialah teknik untuk menemukan akar-akar dari persamaan nonlinear dalam bentuk

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

dengan f: $D \subset \Re \to \Re$ adalah fungsi skalar diselang terbuka D. Metode yang digunakan untuk menyelesaikan Persamaan (1) adalah metode numerik yang menghasilkan solusi hampiran yang bersifat iterasi. Metode iterasi yang sering digunakan untuk menyelesaikan Persamaan (1) adalah metode Newton yang bentuk iterasinya sebagai berikut:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \; f(x) \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots, \tag{2}$$

yang memiliki orde konvergensi dua [4].

Selain itu, Weerakoon dan Fernando [14] memodifikasi metode Newton menggunakan aturan Trapesium yang memiliki persamaan sebagai berikut:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n) + f'(y_n)}, \tag{3}$$

Dengan y_n pada Persamaan (2) .

Homeier [8], juga telah memodifikasi Persamaan (2) menggunakan interpolasi kuadratur yang memilik bentuk iterasinya sebagai berikut:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{f'(y_n)}\right) \tag{4}$$

dengan konvergensi tiga [8].

Pada artikel ini akan dibahas modifikasi penjumlahan Persamaan (3) dengan Persamaan (4). Selanjutnya, akan ditunjukkan orde konvergensi metode yang dikemukakan dan dilanjutkan dengan melakukan komputasi numerik untuk beberapa fungsi yang ditentukan.

Metode Penelitian

Metode yang digunakan pada artikel ini adalah studi literatur dengan mempelajari berbagai sumber yang relevan dengan artikel dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Mempertimbangkan kembali metode Weerakoon-Fernando [14] dan Homeier [8] yang masing-masing ditulis pada Persamaan (3) dan (4).
2. Mengkontruksi metode iterasi baru dengan menjumlahkan Persamaan (3) dengan Persamaan (4) seperti yang dilakukan oleh Kanwar [10] dengan bentuk persamaannya sebagai berikut:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2f'(x_n)f'(y_n)(f'(x_n)+f'(y_n))}\left(\frac{a^{\lambda}+b^{\lambda}}{2}\right)^{1/\lambda}, \tag{5}$$

   dengan $a = 4f'(x_n)f'(y_n)$ dan $b = (f'(x_n)+f'(y_n))^2$
3. Jika $\lambda = -1$, maka diperoleh bentuk Persamaan (5) sebagai berikut:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{4f(x_n)(f'(x_n)+f'(y_n))}{4f'(x_n)f'(x_n)(f'(x_n)+f'(y_n))^2}. \tag{6}$$

4. Menaksir $f'(y_n)$ dengan menyetarakan metode varian super-Halley [3] dengan metode Newton-Steffensen [11] dengan bentuk persamaannya sebagai berikut:

$$f'(y_n) = \pm\frac{\sqrt{(f(x_n)+f(y_n))(f(x_n)-3f(x_n))}}{f(x_n)+f(y_n)}\,f'(x_n). \tag{7}$$

5. Kemudian menaksir Persamaan (7) dengan menggunakan deret Taylor orde satu sehingga diperoleh persaman berikut:

$$f'(y_n) \approx \pm\frac{f(x_n)-f(y_n)}{f(x_n)+f(y_n)}\,f'(x_n). \tag{8}$$

6. Menentukan orde konvergensi berdasarkan rumusan iterasi yang diperoleh.
7. Membuat simulasi numerik dengan menggunakan hitungan komputasi dalam hal ini menggunakan*software*Maple13.
8. Membandingkan hasil penelitian dengan metode lain, seperti Metode Newton[4] Persamaan (4), dan metode Chebychev-Halley [7] dengan$\theta = ½$.

Hasil dan Pembahasan

Pada bagian akan dibahas cara membentuk metode iterasi baru dengan menjumlahkan Persamaan (3) dan Persamaan (4) dengan mengubah bentuknya ke rata-rata pangkat m_{λ} serta menentukan orde

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 4, No. 2, Juli 2018
ISSN 1693-2390 print/ISSN 2407-0939 online

konvergensinya. Kemudian melakukan simulasi numerik sebagai bahan perbandingan dengan metode-metode lainnya.

Jumlahkan Persamaan (3) dengan Persamaan (4) sehingga diperoleh:

$$2x_{n+1} = 2x_n - \left(\frac{2f(x_n)}{f'(x_n)+f'(y_n)} + \frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{f'(y_n)} \right) \right) \tag{9}$$

Kemudian, ruas kiri dan kanan pada Persamaan (9) dibagi dua, sehingga diperoleh:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}\left(\frac{2f(x_n)}{f'(x_n)+f'(y_n)} + \frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{f'(y_n)} \right) \right), \tag{10}$$

dengan y_n diberikan pada Persamaan (2).

Berdasarkan Persamaan (10) dengan menyamakan penyebut dan menyederhanakannya sehingga diperoleh persamaan berikut:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2f'(x_n)f'(y_n)(f'(x_n)+f'(y_n))}\left(\frac{6f'(x_n)f'(y_n)+f'(x_n)^2+f'(y_n)^2}{2} \right). \tag{11}$$

Persamaan (11) dimanipulasi untuk memperoleh persamaan rata-rata aritmatik, dalam bentuk sebagai berikut:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2f'(x_n)f'(y_n)(f'(x_n)+f'(y_n))}\left(\frac{4f'(x_n)f'(y_n)+(f'(x_n)+f'(y_n))^2}{2} \right). \tag{12}$$

Misalkan $a = 4f'(x_n)f'(y_n)$ dan $b = (f'(x_n)+f'(y_n))^2$, sehingga Persamaan (12) dapat diubah kebentuk rata-rata pangkat m_λ yang diberikan oleh:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2f'(x_n)f'(y_n)(f'(x_n)+f'(y_n))}\left(\frac{a^\lambda+b^\lambda}{2} \right)^\lambda. \tag{13}$$

Berdasarkan Persamaan (13), jika dipilih $\lambda = -1$ maka menjadi rata-rata harmonik, yang bentuk persamaannya sebagai berikut:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2f'(x_n)f'(y_n)(f'(x_n)+f'(y_n))}\left(\frac{2ab}{a+b} \right). \tag{14}$$

Substitusikan persamaan a dan b ke Persamaan (14) sehingga diperoleh:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{4f(x_n)(f'(x_n)+f'(y_n))}{4f'(x_n)f'(y_n)+(f'(x_n)+f'(y_n))^2}. \tag{15}$$

Kemudian $f'(y_n)$ diganti dengan penyetaraan varian Super-Halley [3] dengan Newton-Steffensen [11].

Pandang kembali Metode varianSuper-Halley dan Newton-Steffensen sebagai berikut:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)^2}{f'(x_n)(f(x_n)-f(y_n))}, \tag{16}$$

dan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}\left(\frac{3f'(x_n)^2+f'(y_n)^2}{f'(x_n)^2+f'(y_n)^2} \right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{17}$$

Setarakan Persamaan (16) dan Persamaan (17) sehingga diperoleh persamaan berikut:

$$x_n - \frac{f(x_n)^2}{f'(x_n)(f(x_n)-f(y_n))} = x_n - \frac{1}{2}\left(\frac{3f'(x_n)^2 + f'(y_n)^2}{f'(x_n)^2 + f'(y_n)^2}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{18}$$

Penyederhanaan Persamaan (4.10) diberikan oleh:

$$f'(y_n)^2(f(x_n)+f(y_n)) = f'(x_n)^2(f(x_n)-3f(y_n)). \tag{19}$$

Penyelesaian eksplisit dari Persamaan (4.11) diperoleh:

$$f'(y_n) = \pm\sqrt{\frac{f(x_n)-3f(y_n)}{f(x_n)+f(y_n)}}\,f'(x_n), \tag{20}$$

atau

$$f'(y_n) = \pm\sqrt{1-\frac{4f(y_n)}{f(x_n)+f(y_n)}}\,f'(x_n). \tag{21}$$

Ruas kanan Persamaan (21) memuat bentuk akar kuadratik. Oleh karena itu, aproksimasi Persamaan (21) yang berada di dalam akar dilakukan dengan menggunakan deret Taylor disekitar $x_0 = 0$ sehingga diperoleh:

$$\sqrt{1-\frac{4f(y_n)}{f(x_n)+f(y_n)}} \approx 1 - \frac{2f(y_n)}{f(x_n)+f(y_n)} - \frac{2f(x_n)^2}{\left(f(x_n)+f(y_n)\right)^2} + \cdots \tag{22}$$

Selanjutnya, Persamaan (22) dipotong sampai orde satu sehingga diperoleh:

$$\sqrt{1-\frac{4f(y_n)}{f(x_n)+f(y_n)}} \approx \frac{f(x_n)-f(y_n)}{f(x_n)+f(y_n)}. \tag{23}$$

Kemudian substitusikan Persamaan (23) ke Persaman (21) sehingga diperoleh:

$$f'(y_n) = \pm\frac{f(x_n)-f(y_n)}{f(x_n)+f(y_n)}\,f'(x_n). \tag{24}$$

berdasarkan Persamaan (24) apabila diambil nilai negatif maka orde konvergensinya turun. Sehingga penulis menggunakan nilai positif.

Substitusikan Persamaan (24) yang bernilai positif ke Persamaan (15) sehingga diperoleh persamaan berikut ini:

$$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{2(f(x_n)+f(y_n))}{2f(x_n)^2 - f(y_n)^2}\right)\frac{f(x_n)^2}{f'(x_n)} \tag{25}$$

Kemudian, tambahkan parameter riil pada Persamaan (25) sehingga diperoleh:

$$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{2(f(x_n)+f(y_n))}{2f(x_n)^2 - \theta f(y_n)^2}\right)\frac{f(x_n)^2}{f'(x_n)}. \tag{26}$$

Teorema 4.1 Asumsikan bahwa $f : D \subset \Re \rightarrow \Re$ memiliki akar sederhana $\alpha \in D$ dan memiliki turunan diselang D, dengan D merupakan interval terbuka. Jika x_n berada disekitar α maka orde konvergensi Persamaan (26) adalah tiga. Selanjutnya, jika $\theta = 4$ maka orde konvergensinya empat, yang memenuhi galat sebagai berikut:

$$e_{n+1} = (-c_2c_3 + 3c_2^3)e_n^4 + O(e_n^5), \tag{27}$$

dengan $c_j = \dfrac{f^{(j)}(\alpha)}{j!\,f'(\alpha)}$ dan $e_n = x_n - \alpha$.

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 4, No. 2, Juli 2018
ISSN 1693-2390 print/ISSN 2407-0939 online

Bukti. Misalkan α adalah akar sederhana dari persamaan $f(x) = 0$ maka $f'(\alpha) \neq 0$. Selanjutnya dengan melakukan ekspansi Taylor untuk $f(x_n)$ di sekitar $x_n = \alpha$ sehingga diperoleh:

$$f(x_n) = f(\alpha) + f'(\alpha)e_n + \frac{1}{2!}f''(\alpha)e_n{}^2 + \frac{1}{3!}f'''(\alpha)e_n{}^3 + \cdots + O(e_n^7),$$

$$= f'(\alpha)e_n + \frac{1}{2!}f''(\alpha)e_n{}^2 + \frac{1}{3!}f'''(\alpha)e_n{}^3 + \cdots + O(e_n^7),$$

$$= f'(\alpha)\left(e_n + \frac{f''(\alpha)}{2!\,f'(\alpha)}e_n{}^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!\,f'(\alpha)}e_n{}^3 + \cdots + \frac{O(e_n{}^7)}{f'(\alpha)}\right),$$

$$f(x_n) = f'(\alpha)(e_n + c_2e_n{}^2 + c_3e_n{}^3 + c_4e_n^4 + c_5e_n^5 + c_6e_n^6 + O(e_n{}^7)). \tag{28}$$

dengan $c_j = \dfrac{f^{(j)}(\alpha)}{f^{(1)}(\alpha)\,j!}$ dan $j = 2, 3, \ldots, 7$, sehingga diperoleh:

$$f'(x_n) = f'(\alpha)(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n{}^2 + 4c_4e_n^3 + 5c_5e_n^4 + 6c_6e_n^5 + \mathrm{O}(e_n{}^6)). \tag{29}$$

Bagikan Persamaan (28) dengan Persamaan (29) sehingga diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - c_2e_n^2 + (-2c_3 + 2c_2^2)e_n^3 + \cdots + O(e_n^7). \tag{30}$$

Substitusikan Persamaan (30) ke Persamaan (2) sehingga diperoleh

$$y_n = \alpha + c_2e_n^2 + (2c_3 - 2c_2^2)e_n^3 + \cdots + O(e_n^7). \tag{31}$$

Ekspansikan deret Taylor terhadap $f(y_n)$ di sekitar α diberikan oleh:

$$f(y_n) = f'(\alpha)(c_2e_n^2 + (2c_3 - 2c_2^2)e_n^3 + \cdots + O(e_n^7)). \tag{32}$$

Selanjutnya jumlahkan Persamaan (28) dengan Persamaan (32) sehingga diperoleh:

$$f(x_n) + f(y_n) = f'(\alpha)(e_n + 2c_2e_n^2 + (3c_3 - 2c_2^2)e_n^3 + \cdots + O(e_n^7)). \tag{33}$$

Kuadratkan Persamaan (28) dan Persamaan (32) yang diberikan masing-masing oleh:

$$f(x_n)^2 = f'(\alpha)^2(e_n^2 + 2c_2e_n^3 + (2c_3 + c_2^2)e_n^4 + \cdots + O(e_n^7)), \tag{34}$$

dan

$$f(y_n)^2 = f'(\alpha)^2(c_2^2e_n^4 + (4c_2c_3 - 4c_2^3)e_n^5 + \cdots + O(e_n^7)). \tag{35}$$

Kemudian, substitusikan Persamaan (29), Persamaan (33), Persamaan (34) dan Persamaan (35) ke Persamaan (26) sehingga diperoleh:

$$x_{n+1} = \alpha + \left(2 - \frac{1}{2}\theta\right)c_2^2e_n^3 + \left((7 - 2\theta)c_2c_3 - (9 - 3\theta)c_2^3\right)e_n^4 + O(e_n^5). \tag{36}$$

untuk meningkatkan orde konvergensi menjadi empat, konstanta e_n^3 pada Persamaan (36) dinolkan dengan menyelesaikan θ dalam persamaan berikut:

$$2 - \frac{1}{2}\theta = 0,$$

dan diperoleh θ = 4.
Pilih nilai θ = 4 maka Persamaan (36) menjadi:

$$x_{n+1} = \alpha + (-c_2c_3 + 3c_2^3)e_n^4 + O(e_n^5). \tag{37}$$

Oleh karena $x_{n+1} = e_{n+1} + \alpha$ dan $x_n = e_n + \alpha$, sehingga diperoleh:

$$e_{n+1} = (-c_2c_3 + 3c_2^3)e_n^4 + O(e_n^5).$$ ■

Jika diambil θ = 4, θ = 0 dan θ = 2 sehingga Persamaan (26) menjadi metode baru yang memili orde konvergensi empat, Potra-Ptak [1] dan Newton-Steffensen [11] dengan persamaan masing-masing diberikan oleh:

$$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{2(f(x_n) + f(y_n))}{2f(x_n)^2 - 4f(y_n)^2} \right) \frac{f(x_n)^2}{f'(x_n)}, \tag{38}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) + f(y_n)}{f'(x_n)}, \tag{39}$$

dan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)^2}{\big(f(x_n) - f(y_n)\big) f'(x_n)}. \tag{40}$$

Selanjutnya akan dilakukan simulasi numerik untuk membandingkan banyak iterasi dan *COC* (*computational order of convergence*) dari metode Newton (MN), metode klasik Chebyshev-Halley (CH3), metode Homeier (MH), metode double Newton (MDN), dan Persamaan (26) (M2) untuk menghampiri solusi persamaan nonlinear. Simulasi dilakukan menggunakan program Maple 13 dengan 850 digit, kemudian kriteria pemberhentian program jika $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ dan toleransi yang digunakan adalah$\varepsilon = 10^{-95}$.Selanjutnya pilih x_0 cukup dekat dengan α danuntuk melakukan perbandingan ini, ada beberapa persamaan nonlinear yang digunakan yaitu:

$f_1(x) = xe^{-x} - 0{,}1$, $\alpha = 0{,}111832559158962$

$f_2(x) = e^x - 4x^2$, $\alpha = 4{,}306584728220692$,

$f_3(x) = \cos(x) - x$, $\alpha = 0{,}739085133215160$,

$f_4(x) = (x-1)^3 - 1$, , $\alpha = 2{,}000000000000000$

$f_5(x) = x^3 + 4x^2 - 10$, $\alpha = 1{,}365230034140968$,

$f_6(x) = e^{-x^2+x+2} - \cos(x+1) + x^3 + 1$, $\alpha = -1{,}000000000000000$

$f_7(x) = \sin^2(x) - x^2 + 1$, $\alpha = 1{,}404491648215341$

$f_8(x) = \sqrt{x} - x$, $\alpha = 1{,}000000000000000$.

Pada Tabel 1 berikut ini menunjukkan nilai *COC* dan jumlah iterasi dari metode yang dibandingkan dengan ketelitian $\varepsilon = 10^{-95}$.

Tabel 1. Jumlah Iterasi dan *COC* untuk ε = 10 -95.

$f(x)$	x_0	N2	CH3, $(\theta = 1/2)$	MH	M2, $(\theta \neq 4)$	M2, $(\theta = 4)$
$f_1(x)$	– 0,2	8(2,0000)	5(3,0000)	5(3,0000)	5(3,0000)	4(4,0000)
	0,3	8(2,0000)	5(3,0000)	5(3,0000)	5(3,0000)	4(4,0000)
$f_2(x)$	4,0	8(2,0000)	5(3,0000)	4(3,0000)	5(3,0000)	5(4,0000)
	4,5	7(2,0000)	5(3,0000)	5(3,0000)	5(3,0000)	4(4,0000)
$f_3(x)$	– 0,1	8(2,0000)	5(3,0000)	5(3,0000)	5(3,0000)	5(4,0000)
	1,5	7(2,0000)	5(3,0000)	5(3,0000)	5(3,0000)	4(4,0000)
$f_4(x)$	1,8	8(2,0000)	5(3,0000)	4(3,0000)	5(3,0000)	4(4,0000)
	3,0	9(2,0000)	6(3,0000)	5(3,0000)	6(3,0000)	5(4,0000)
$f_5(x)$	1,0	8(2,0000)	5(3,0000)	4(3,0000)	5(3,0000)	4(4,0000)
	2,0	8(2,0000)	5(3,0000)	5(3,0000)	5(3,0000)	4(4,0000)
$f_6(x)$	– 1,5	7(2,0000)	5(3,0000)	5(3,0000)	5(3,0000)	4(4,0000)
	0,0	7(2,0000)	6(3,0000)	5(3,0000)	5(3,0000)	4(4,0000)
$f_7(x)$	1,2	6(2,0000)	5(3,0000)	5(3,0000)	5(3,0000)	4(4,0000)
	2,0	6(2,0000)	5(3,0000)	5(3,0000)	5(3,0000)	4(4,0000)
$f_8(x)$	0,5	8(2,0000)	5(3,0000)	5(3,0000)	5(3,0000)	4(4,0000)
	1,5	7(2,0000)	5(3,0000)	5(3,0000)	5(3,0000)	4(4,0000)

Pada Tabel 1 dapat dilihat bahwa jumlah iterasi M2 dengan θ = 4 secara umum lebih sedikit dibandingkan metode-metode lainnya. Hal ini menunjukkan bahwa M2 dengan θ = 4 lebih cepat

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 4, No. 2, Juli 2018
ISSN 1693-2390 print/ISSN 2407-0939 online

menghampiri akar-akar persamaan nonlinear. Selain itu, Tabel 2 dan 3 menegaskan bahwa *COC* M2 adalah konvergen menuju tiga untuk $\theta \neq 4$ dan konvergen menuju empat untuk $\theta = 4$.

Kemudian, Tabel 2 berikut ini menunjukkan nilai mutlak $| f(x_n) |$ dengan total *TNFE* = 12 dari metode yang dibandingkan yaitu metode N2, CH3, MH, M1 dan M2.

Tabel 2. Nilai $| f(x_n) |$ dengan Total Evaluasi Fungsi Sebesar 12

$f(x)$	x_0	N2	CH3, $(\theta = 1/2)$	MH	M2, $(\theta \neq 4)$	M2, $(\theta = 4)$
$f_1(x)$	–0,2	3,0851 e-36	2,7758 e-55	1,6813 e-62	1,2725 e-45	3,6192 e-121
	0,3	1,0736 e-42	3,5153 e-66	2,3013 e-94	9,0539 e-54	1,1287 e-110
$f_2(x)$	4,0	5,0254 e-33	2,1103 e-53	4,5009 e-98	5,5770 e-42	1,9158 e-58
	4,5	3,1920 e-52	5,2464 e-76	3,7302 e-87	2,4262 e-66	4,0940 e-185
$f_3(x)$	–0,1	1,9402 e-37	2,7096 e-43	3,0532 e-53	1,4120 e-45	5,1896 e-49
	1,5	3,7607 e-64	1,1496 e-51	2,0951 e-68	3,5077 e-80	1,0703 e-193
$f_4(x)$	1,8	2,8660 e-41	1,7287 e-60	1,3884 e-106	4,2366 e-52	3,0358 e-102
	3,0	4,6450 e-16	6,3910 e-24	9,8378 e-34	3,0962 e-20	1,5268 e-49
$f_5(x)$	1,0	3,9823 e-43	2,2350 e-60	1,4375 e-99	9,1053 e-55	4,1907 e-115
	2,0	1,2362 e-37	4,6600 e-52	1,4165 e-71	7,8139 e-48	3,0109 e-128
$f_6(x)$	–1,5	5,7390 e-66	1,5262 e-43	1,6307 e-55	5,1900 e-92	3,0627 e-178
	0,0	1,9261 e-65	6,3918 e-26	1,7987 e-33	9,3636 e-73	6,3316 e-155
$f_7(x)$	1,2	2,0864 e-47	1,5528 e-64	2,0339 e-106	7,4954 e-60	1,4839 e-131
	2,0	2,2623 e-32	8,6200 e-39	1,3726 e-73	8,2994 e-41	4,5789 e-103
$f_8(x)$	0,5	1,5493 e-43	2,9667 e-34	8,6181 e-54	2,2097 e-55	4,4729 e-69
	1,5	1,0650 e-66	2,2128 e-66	6,9629 e-84	2,4094 e-84	4,5813 e-214

Dapat dilihat dari Tabel 2 bahwa nilai desimal $| f(x_n) |$ M2 lebih kecil dibandingkan metode lainnya. Kemudian Tabel 3 berikut menunjukan galat mutlak $| x_n - \alpha |$ dengan total TNFE = 12.

Tabel 3Nilai $| x_n - \alpha |$ dengan Total Evaluasi Fungsi Sebesar 12

$f(x)$	x_0	N2	CH3, $(\theta = 1/2)$	MH	M2, $(\theta \neq 4)$	M2, $(\theta = 4)$
$f_1(x)$	–0,2	3,8845 e-36	3,4951 e-55	2,1170 e-62	1,6023 e-45	4,5571 e-121
	0,3	1,3518 e-42	4,4263 e-66	2,8977 e-94	1,1400 e-53	1,4212 e-110
$f_2(x)$	4,0	1,2647 e-34	5,3111 e-55	1,1328 e-99	1,4036 e-43	4,8216 e-60
	4,5	8,0333 e-54	1,3204 e-77	9,3880 e-89	6,1061 e-68	1,0304 e-186
$f_3(x)$	–0,1	1,1593 e-37	1,6190 e-43	1,8243 e-53	8,4368 e-46	3,1008 e-49
	1,5	2,2471 e-64	6,8693 e-52	1,2518 e-68	2,0959 e-80	6,3954 e-194
$f_4(x)$	1,8	9,5535 e-42	5,7624 e-61	4,6279 e-107	1,4122 e-52	1,0119 e-102
	3,0	1,5483 e-16	2,1303 e-24	3,2792 e-34	1,0321 e-20	5,0894 e-50
$f_5(x)$	1,0	2,4116 e-44	1,3534 e-61	8,7050 e-101	5,5139 e-56	2,5377 e-116
	2,0	7,4858 e-39	2,8220 e-53	8,5780 e-73	4,7319 e-49	1,8233 e-129
$f_6(x)$	–1,5	9,5649 e-67	2,5437 e-44	2,7179 e-56	8,6500 e-93	5,1044 e-179
	0,0	3,2102 e-66	1,0653 e-26	2,9978 e-34	1,5606 e-73	1,0553 e-155
$f_7(x)$	1,2	8,4046 e-48	6,2549 e-65	8,1929 e-107	3,0193 e-60	5,9776 e-132
	2,0	9,1131 e-33	3,4723 e-39	5,5290 e-74	3,3432 e-41	1,8445 e-103
$f_8(x)$	0,5	3,0985 e-43	5,9334 e-34	1,7236 e-53	4,4194 e-55	8,9458 e-69
	1,5	2,1299 e-66	4,4256 e-66	1,3926 e-83	4,8188 e-84	9,1627 e-214

Dapat dilihat dari Tabel 3 bahwa nilai galat mutlak $| x_n - \alpha |$ M2 lebih kecil dibandingkan metode lainnya. Selanjutnya, Tabel 4 berikut menujukkan nilai galat relatif $| x_{n+1} - x_n |$ dengan total TNFE = 12.

Tabel 4 Nilai $| x_{n+1} - x_n |$ dengan Total Evaluasi Fungsi Sebesar 12

$f(x)$	x_0	N2	CH3,	MH	M2, $(\theta \neq 4)$	M2, $(\theta = 4)$

			$(\theta = 1/2)$			
$f_1(x)$	−0,2 0,3	1,9117 e-18 1,1277 e-21	8,4084 e-19 1,9599 e-22	4,2749 e-21 1,0226 e-31	1,1235 e-15 2,1609 e-18	6,2290 e-31 2,6177 e-28
$f_2(x)$	4,0 4,5	1,2323 e-17 3,1057 e-27	1,1156 e-18 3,2561 e-26	1,9381 e-33 8,4501 e-30	5,8707 e-15 4,4484 e-23	1,3448 e-15 2,8915 e-47
$f_3(x)$	−0,1 1,5	7,2459 e-19 3,1901 e-32	1,1181 e-14 1,8100 e-17	8,1629 e-18 7,1998 e-23	2,5865 e-15 7,5472 e-27	1,6018 e-12 1,0794 e-48
$f_4(x)$	1,8 3,0	3,0909 e-21 1,2443 e-08	9,526 e-21 1,4729 e-08	6,5240 e-36 1,2531 e-11	5,2075 e-18 2,1772 e-07	2,4820 e-26 3,7168 e-13
$f_5(x)$	1,0 2,0	2,2179 e-22 1,2357 e-19	9,0968 e-21 5,3942 e-18	1,4219 e-33 3,0485 e-24	6,1217 e-19 1,2533 e-16	1,6732 e-29 8,6626 e-33
$f_6(x)$	−1,5 0,0	2,3956 e-33 4,3888 e-33	4,0291 e-15 3,0145 e-09	5,0717 e-19 1,1290 e-11	6,7781 e-31 1,7777 e-24	5,5056 e-45 3,7124 e-39
$f_7(x)$	1,2 2,0	3,2751 e-24 1,0784 e-16	4,9166 e-22 1,8755 e-13	1,2317 e-35 1,0804 e-24	1,7005 e-20 3,7903 e-14	1,4441 e-33 1,9139 e-26
$f_8(x)$	0,5 1,5	1,1133 e-21 2,9189 e-33	1,4681 e-11 2,8685 e-22	6,5091 e-18 6,0624 e-28	1,9194 e-18 4,2562 e-28	1,8395 e-17 1,0407 e-53

Dapat dilihat dari Tabel 4 bahwa nilai galat relatif $| x_{n+1} - x_n |$ M2 lebih kecil dari metode lainnya.

Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan maka metode iterasi baru (M2) yang didiskusikan memiliki orde konvergensi empat dengan θ = 4 dan melibatkan tiga evaluasi fungsi yaitu$f(x_n)$, $f(y_n)$ dan $f'(x_n)$. Dengan demikian, metode ini memiliki indeks efisiensi $4^{\frac{1}{3}} \approx 1{,}5874$ lebih baik jika dibandingan metode Newton $2^{\frac{1}{2}} \approx 1{,}4142$, metode Chebyshev-Halley $3^{\frac{1}{3}} \approx 1{,}4422$, dan metode Homeier $3^{1/3} \approx 1{,}4422$. Hal ini menunjukkan bahwa metode iterasi baru lebih efektif dalam menyelesaikan persamaan nonlinear.

Daftar Pustaka

[1] Azadegan, E., dan Ezzati,R, A Simple iterative method with fifth-order convergence by using Potra and Ptak's Method, *Mathematical Sciences*, 2, 2009, 191– 200.
[2] Betounes, D., dan Redfern, M. *Mahtematical Computing an Introduction to Programming using Maple.* Halaman 59. Spring-Verlag, New York. 2000.
[3] Chun, C. A Simply Constructed Third-Order Modification of Newton's Method, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 219, 2008, 81–89.
[4] Dukkipati, R. V. *Numerical Methods*. New Age International (P) Ltd, New Delhi. 2010.
[5] Epperson, J. F., *Numerical Method and Analysis.* John Wiley & Sons, New Jersey. 2013.
[6] Ezzati, R., dan Saleki, F., On the Construction of New Iterative Methods with Four-Order Convergence by Combining Previos Methods, *International Mathematical Form*, 6(27), 2011, 1319–1326.
[7] Guitierrez, J. M., dan Hernandes, M. A., A Family of Chebyshev-Halley Type Methods in Banach Space, *Bulletin of Australian Mathematical Society*, 55, 1997, 113–130.
[8] Homeier, H. H. H. On Newton-Type Method with Cubic Convergence, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 176, 2005, 425–432.
[9] Jisheng, K., Yitian, L, dan Xiuhua, W., A Composite Fourt-Order Iterative Method for Solving Non-Linear Equation, *Applied Mathematics and Computation*, 184, 2007, 471–475.
[10] Kanwar, V., dan Tomar, S. K., Note On Super-Halley Method and Its Variants, *Tamsui Oxford Journal of Information and Mathematical Sciences*, 28(2), 2011, 191–216.
[11] Sharma, J. R. A Composite Third Orde Newton-Steffensen Methode for Solving Nonlinear Equation. *Applied Mathematics and Computation*, 169, 2005, 242–246.
[12] Sharma, J.R., Guha, R., K., dan Sharma, R., Some Modified Newton's Methods with Fourth-Order Convergence, *Advances in Applied Science Research*, 2(1), 2011, 240–247.
[13] Wait, R. *The Numerical Solution of Algebraic Equation*, JohnWiley & Sons, New York. 1979.
[14] Weerakoon, S., dan Fernando, T. G. I., A Variant of Newton Method with Accelerated Third-Orde Convergence, *Applied Mathematics Letters*, 13, 2000, 87–93.