Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 4, No. 2, Juli 2018
ISSN 1693-2390 print/ISSN 2407-0939 online

Analisis Kestabilan Model Seirs Pada Penyebaran Penyakit Flu Singapura (*Hand, Foot And Mouth Disease*) Dengan *Saturated Incidence Rate*

Irma Suryani[1], Febby Ariad[2]
[1,2]Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru
Email: *irma.suryani@uin-suska.ac.id*, *febbyariad@gmail.com*

ABSTRAK

Artikel ini membahas tentang penyebaran penyakit Flu Singapura (*Hand, Foot and Mouth Disease*) menggunakan model SEIRS dengan *Saturated Incidence Rate*. Model SEIRS mempunyai dua titikekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik penyakit. Titik kestabilan ditentukan dengan menyelesaikan persamaan pada model SEIRS dan diuji kestabilannya dengan kriteria nilai eigen dan Routh Hurwitz. Hasil yang diperoleh yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik jika $R_0 < 1$ dan titik ekuilibrium endemik penyakit stabil asimtotik jika syarat dan kondisi terpenuhi.

Katakunci: *Model SEIRS, Routh-Hurwitz, Saturated incidence rate, Stabil asimtotik, Titik ekuilibrium.*

ABSTRACT

This article discusses about hand, foot and mouth disease used SEIRS model with saturated incidence rate. Model of SEIRS have two equilibrium that is disease-free equilibrium and endemic equilibrium. Equilibrium points is determinedby solving theequationsinthe model SEIRS and testedstabilitycriteriaeigenvalues and Routh-Hurwitz. The result obtained that disease-free equilibriumasymptotically stableif $R_0 < 1$ *and endemic equilibrium asymptotically stable if under condition.*

Keyword : *SEIRS model, Routh-Hurwitz, Saturated incidence rate, Asymptotically stable, Equilibrium point.*

Pendahuluan

Penyakit Flu Singapura atau dalam bahasa kedokteran disebut sebagai penyakit *Hand, Foot and Mouth Disease* (HFMD) merupakan penyakit infeksi yang seringkali menyerang anak-anak usia 2 minggu sampai 5 tahun (bahkan hingga 10 tahun). Orang dewasa umumnya kebal terhadap penyakit yang mempunyai masa inkubasi 2-5 hari ini. HFMD disebabkan oleh *Coxsackievirus* A type 16 (CV A16) dengan bermacam-macam strain, yaitu *Coxsackievirus* A5, A7, A9, A10, B2 dan B5[6].

Penelitian tentang model epidemik tentang penyebaran penyakit telah banyak dilakukan guna mencegah penyebaran penyakit menular, salah satunya adalah Wang dan Sung (2007) yang telah menganalisa penyakit HFMD berdasarkan model SIR. Dalam penelitian nya, belum dijelaskan mengenai populasi individu yang sebenarnya telah terinfeksi penyakit namun belum menunjukkan gejala-gejala penyakit. Penelitian tentang model epidemik juga dilakukan oleh Roy[6] dimana jurnalnya menjelaskan tentang *modelling of Hand Foot and Mouth Disease: Quarantine as a control Measure.* Selanjutnya Sari[7] dalam jurnalnya menganalisa penyakit HFMD berdasarkan model SEIRS dengan penelitiannya, populasi individu yang sebenarnya telah terinfeksi penyakit tetapi belum menunjukkan gejala-gejala penyakit akan berada pada kelas tersendiri yaitu kelas E. Kemudian, penderita yang telah sembuh dapat kembali rentan terhadap penyakit HFMD.

Ketiga penelitian di atas menggunakan laju infeksi bilinier βSI pada proses penularan individu *susceptible* menjadi individu *infected* dalam suatu populasi, dalam kita ketahui bahwa proses penularan suatu penyakit tidak hanya laju infeksi bilinier saja, ada juga laju infeksi jenuh (*saturated incidence rate*) $\frac{\beta SI}{1+\alpha_1 S}$ atau $\frac{\beta SI}{1+\alpha_2 I}$, dengan $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ adalah efek dari faktor kejenuhan atau *crowded*, yaitu pada saat jumlah individu yang terinfeksi sangat banyak atau mencapai titik jenuh maka laju infeksi semakin menurun. Berdasarkan latar belakang tersebut penulis tertarik untuk mengambil judul **"Analisis Kestabilan Model SEIRS pada Penyebaran Penyakit Flu Singapura (*Hand, Foot and Mouth Disease*) dengan *Saturated Incidence Rate*"**.

Metodologi Penelitian

Adapun lagkah-langkah dalam penulisan artikel ini adalah:

1. Mendefinisikan variabel dan parameter yang digunakan dalam model.
   Variabel dan parameter yang digunakan adalah sebagai berikut:
   a. S : kompartemen *susceptible.*
   b. E : kompartemen *exposed.*
   c. I : kompartemen *infected.*
   d. R : kompartemen *recovered.*
   e. α : laju kelahiran dan kematian alami untuk tiap kompartemen.
   f. γ : laju individu yang sembuh
   g. δ : laju individu yang terinfeksi
   h. β : laju individu laten
   i. μ : laju kematian karna penyakit HFMD
   j. λ : laju individu yang rentan
2. Diberikan persamaan diferensial model epidemik tipe SEIRS sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \alpha - \beta SI - \alpha S + \lambda R \qquad S(0) > 0\\
\frac{dE}{dt} &= \beta SI - \alpha E - \delta E \quad E(0) \geq 0\\
\frac{dI}{dt} &= \delta E - \alpha I - \gamma I \qquad I(0) \geq 0 \qquad (1)\\
\frac{dR}{dt} &= \gamma I - \lambda R - \alpha R \qquad R(0) \geq 0
\end{aligned}$$

3. Mengubah laju infeksi bilinier βSIpada proses penularannya menjadi laju infeksi jenuh (*saturated incidence rate*) pada transisi dari kompartemen *susceptible* ke *exposed* $\frac{\beta SI}{1+\alpha_2 I}$.
4. Membuat model matematika dari langkah (3), model matematika ini akan membentuk sistem persamaan diferensial.

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \alpha - \frac{\beta SI}{1+\alpha_2 I} - \alpha S + \lambda R \qquad S(0) > 0\\
\frac{dE}{dt} &= \frac{\beta SI}{1+\alpha_2 I} - \alpha E - \delta E \qquad E(0) \geq 0\\
\frac{dI}{dt} &= \delta E - \alpha I - \gamma I \qquad I(0) \geq 0\\
\frac{dR}{dt} &= \gamma I - \lambda R - \alpha R \qquad R(0) \geq 0\\
&\alpha > 0, \delta > 0, \beta > 0, \lambda > 0, \gamma > 0, \alpha_2 > 0
\end{aligned} \tag{2}$$

5. Menentukan titik ekuilibrium dari sistem persamaan diferensial yang telah di peroleh pada langkah (4), baik itu titik ekuilibrium bebas penyakit $(\bar{S}, \bar{E}, \bar{I}, \bar{R})$ maupun titik ekuilibrium endemik (S^*, E^*, I^*, R^*) penyakit dengan cara mengubah sistem persamaan diferensial pada langkah (4) menjadi $\frac{dS}{dt} = 0, \frac{dE}{dt} = 0, \frac{dI}{dt} = 0$ dan $\frac{dR}{dt} = 0$.
6. Menganalisa kestabilan titik ekuilibrium apakah stabil asimtotik atau tidak. Kestabilan dari titik ekuilibrium dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks Jacobian.
7. Melakukan simulasi numerik kestabilan titik ekuilibrium menggunakan sofware maple.
8. Menyimpulkan hasil dari analisis kestabilan di titik ekuilibrium yang diperoleh secara keseluruhan.

Hasil dan Pembahasan

1. Flu Singapura

Penyakit Flu Singapura atau dalam bahasa kedokteran disebut sebagai penyakit *Hand, Foot and Mouth Disease* (HFMD) merupakan penyakit infeksi yang seringkali menyerang anak-anak usia 2 minggu sampai 5 tahun (bahkan hingga 10 tahun). Orang dewasa umumnya kebal terhadap penyakit yang mempunyai masa inkubasi 2-5 hari ini. HFMD disebabkan oleh *Coxsackievirus* A type 16 (CV A16) dengan bermacam-macam strain, yaitu *Coxsackievirus* A5, A7, A9, A10, B2 dan B5 [6].

Gejala-gejala yang timbul untuk terserang penyakit Flu Singapura (*Hand, Foot and Mouth Disease*) antara lain, demam selama 2-3 hari, disertai tidak ada nafsu makan, pilek dan gejala seperti flu pada umumnya. Selanjutnya, akan muncul sariawan (pada lidah, gusi, pipi sebelah dalam) dan timbul ruam ditangan dan kaki [7].

2. Model Epidemi SIR

Model SIR pertama kali diperkenalkan oleh Kermack dan Kendrick dalam makalahnya yang berjudul "*A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics*", yang kemudian muncul dalam Proceeding Royal Society London halaman 700-721 tahun 1927, dan kemudian menjadi peranan penting dalam perkembangan matematika epidemi. Model SIR menggambarkan tiga kompartemen yaitu kompartemen populasi rentan (*susceptible*), kompartemen populasi terinfeksi (*infected*) dan kompartemen populasi sembuh (*recovered*). Total jumlah populasi N diasumsikan konstan karena pengaruh kelahiran, kematian maupun migrasi tidak diperhatikan. Oleh karena itu, $S+I+R=N$. Sehingga model matematika untuk model SIR adalah:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \beta SI \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \alpha I \\ \frac{dR}{dt} &= \alpha I \end{aligned} \tag{3}$$

a. Sistem Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas, sedangkan sistem persamaan diferensial terdiri dari beberapa persamaan diferensial.

Contoh 1:

1. $\dfrac{dy}{dx} = 2x-1$
2. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x^2 y$

b. Nilai Eigen

Definisi 1. [1] Jika A adalah matriks $n \ x \ n$, maka vektor tak nol $\boldsymbol{x}$ di dalam R^n dinamakan vektor eigen *(eigenvector)* dari A jika $A\boldsymbol{x}$ adalah kelipatan skalar dari $\boldsymbol{x}$ yakni:

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}, \tag{4}$$

untuk suatu skalar λ. Skalar λ dinamakan nilai eigen *(eigenvalue)* dari A dan $\boldsymbol{x}$ dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.

Untuk mencari nilai eigen matriks A yang berukuran $n \ x \ n$ maka kita menuliskan kembali $A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ sebagai berikut:

$$A\boldsymbol{x} = \lambda I \boldsymbol{x},$$

atau secara ekivalen:

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = 0$$

Supaya λ menjadi nilai eigen, maka harus ada pemecahan taknol dari persamaan ini. Persamaan di atas akan mempunyai pemecahan taknol jika dan hanya jika:

$$\det(A-\lambda I)=0 \tag{5}$$

Persamaan (5) dinamakan persamaan karakteristik A.

c. Matriks Jacobi

Defenisi 2. [5] Matriks Jacobian J dari sistem persamaan:

$$\begin{aligned}
y_1 &= f_1(x_1, x_2, \cdots x_n) \\
y_2 &= f_2(x_1, x_2, \cdots x_n) \\
y_3 &= f_3(x_1, x_2, \cdots x_n) \\
&\vdots \\
y_m &= f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)
\end{aligned}$$

adalah:

$$J(f(x)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \tag{6}$$

yaitu matriks yang berukuran $m\ x\ n$. Matriks ini sering kali juga ditulis sebagai matriks x:

$$\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{i,j} \tag{7}$$

dan disebut matriks Jacobian.

d. Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan Reproduksi Dasar (R_0) merupakan suatu ukuran potensi penyebaran penyakit dalam populasi. Menurut Rost dan Wu (2008), teorema tentang bilangan reproduksi dasar sebagai berikut:

1. Titik ekuilibrium bebas penyakit (*disease free equilibrium*) stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$ dan tidak stabil jika $R_0 > 1$
2. Jika $R_0 < 1$ maka semua solusi konvergen ketitik ekuilibrium bebas penyakit (*disease free equilibrium)*
3. Titik ekuilibrium endemic (*endemic equilibrium)* stabil asimtotik lokal jika $R_0 > 1$
4. Jika $R_0 > 1$ maka penyakit tersebut endemik.

e. Titik Ekuilibrium dan Kestabilan

Secara umum, titik ekuilibrium mempunyai dua titik tetap yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik. Titik ekuilibrium bebas penyakit artinya dalam populasi tidak ada individu yang terinfeksi penyakit, sedangkan titik ekuilibrium endemik artinya selalu ada individu yang terinfeksi penyakit.

Teorema 1. [2]

a. Jika semua nilai eigen dari matriks jacobian $J(f(x))$ mempunyai bagian real negative, maka titik ekuilibrium x^* dari Persamaan (2) stabil asimtotik.
b. Jika terdapat nilai eigen dari matriks jacobian $J(f(x))$ mempunyai bagian real positif, maka titik ekuilibrium x^* dari Persamaan (2) tidak stabil.

f. Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz untuk k=2,3,4, disebut bahwa titik ekuilibrium stabil jika dan hanya jika:

$k = 2$ $\quad a_1 > 0, a_2 > 0,$
$k = 3$ $\quad a_1 > 0, a_3 > 0, a_1 a_2 > a_3,$
$k = 4$ $\quad a_1 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0, a_1 a_2 a_3 > {a_3}^2 + {a_1}^2 a_4.$

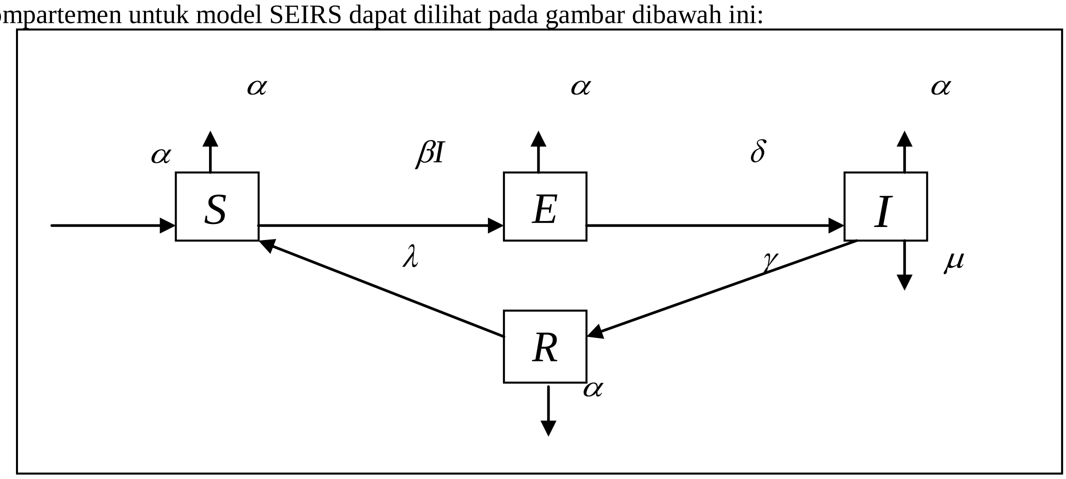
Jika kriteria Routh-Hurwitz terpenuhi, maka titik ekuilibrium stabil asimtotik lokal.

g. Model Epidemi SEIRS

Untuk model SEIRS penyebaran penyakit flu singapura diperlukan asumsi-asumsi sebagai berikut:

a. Populasi bersifat tertutup, artinya tidak terjadi migrasi pada populasi.
b. Laju kelahiran sama dengan laju kematian.
c. Jumlah populasi konstan.
d. Laju kematian alami untuk tiap kompartemen α .
e. Laju transisi dari kompartemen *susceptible* ke *exposed* β .
f. Laju transisi dari kompartemen *exposed* ke *infected* δ .
g. Laju transisi dari kompartemen *infected* ke *recovered* γ .
h. Laju transisi dari kompartemen *recovered* ke *exposed* λ .
i.

Kompartemen untuk model SEIRS dapat dilihat pada gambar dibawah ini:



Gambar 1. Kompartemen Model SEIRS Penyebaran Penyakit FluSingapura

Berdasarkan Gambar (1) maka model matematika untuk model dapat dituliskan seperti Persamaan (1) dengan jumlah keseluruhan populasi:

$$S(t) + E(t) + I(t) + R(t) = 1, \alpha > 0, \delta > 0, \beta > 0, \lambda > 0, \gamma > 0 \cdot$$

Tabel 1. Keterangan Parameter Variabel

Parameter Variabel	**Keterangan**
S	Jumlah individu yang rentan terhadap penyakit
E	Jumlah individu yang sudah terinfeksi tapi belum menunjukkan gejala penyakit
I	Jumlah individu yang terinfeksi dan menularkan penyakit
R	Jumlah individu yang sembuh dan rentan terkena penyakit
β	Laju individu yang terinfeksi namun belum menunjukkan gejala
α	Laju kelahiran dan kematian alami untuk tiap kompartemen
γ	Laju individu yang sembuh
δ	Laju individu yang terinfeksi
μ	Laju kematian karna penyakit

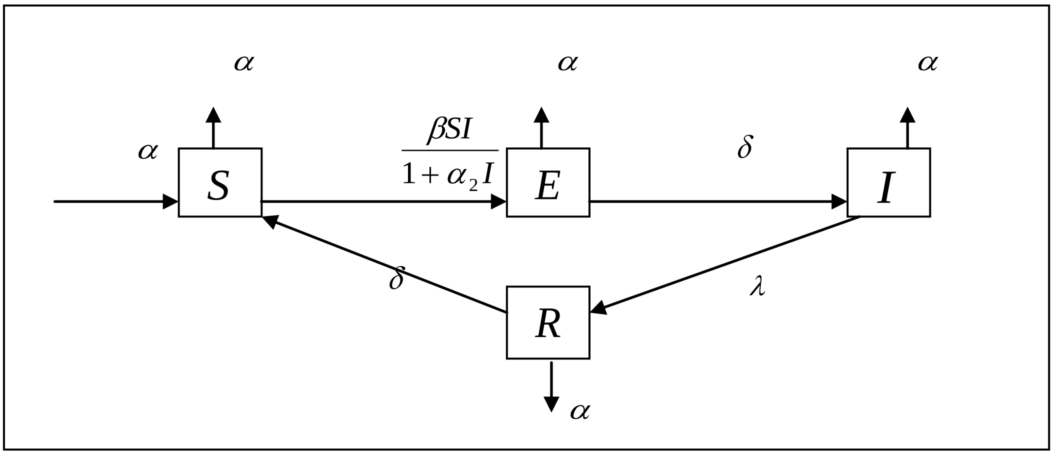
λ	Laju individu yang sembuh namun rentan terhadap penyakit

h. Hasil

Adapun asumsi-asumsi yang digunakan pada model SEIRS adalah sebagai berikut:

1. Populasi bersifat tertutup, artinya tidak terjadi migrasi pada populasi.
2. Laju kelahiran sama dengan laju kematian.
3. Jumlah populasi konstan.
4. Laju kematian alami untuk tiap kompartemen α .
5. Laju transisi dari kompartemen *susceptible* ke *expose* β .
6. Laju transisi dari kompartemen *exposed* ke *infected* δ .
7. Laju transisi dari kompartemen *infected* ke *recovered* γ .
8. Laju transisi dari kompartemen*recovered* ke *susceptible* λ .
9. Laju infeksi jenuh pada proses penularan individu dari kompartemen *susceptible* ke *expose* $\dfrac{\beta SI}{1+\alpha_2 I}$.

Berdasarkan asumsi-asumsi di atas, maka dapat dibentuk kompartemen model SEIRS penyakit *Hand, Foot and Mouth Disease* (HFMD) dengan *Saturated Incidence Rate* sebagai berikut:



Gambar 2. Kompartemen Model SEIRS Penyebaran Penyakit Flu Singapura dengan *Saturated Incidence rate*

Dengan demikian, Sistem persamaan diferensial untuk model SEIRSseperti Persamaan (2) yang telah ditulis sebelumnya pada Metodologi Penelitian dengan $S(t)+E(t)+I(t)+R(t)=1$ merupakan jumlah populasi keseluruhan.

i. Titik Ekuilibrium

Titik ekuilibrium dari Persamaan (2) dapat ditentukan dalam dua keadaan yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik penyakit. Titik ekuilibrium bebas penyakit diperoleh: $(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{R}=1{,}0{,}0{,}0)$ dan titik ekuilibrium endemik penyakit: (S^*,E^*,I^*,R^*)dengan

$$\left(S^*,E^*,I^*,R^*\right)=\left(\frac{\left(1+\alpha_2 I^*\right)(\alpha+\delta)(\alpha+\gamma)}{\delta\beta},\frac{(\alpha+\mu+\gamma)}{\delta}I^*,\frac{\alpha\beta\delta-\alpha\left((\alpha+\delta)(\alpha+\gamma)\right)\left(1+\alpha_2 I^*\right)}{\beta}.\frac{(\lambda+\alpha)}{(\lambda+\alpha)(\alpha+\delta)(\alpha+\gamma)-\delta\lambda\gamma},\frac{\gamma}{(\lambda+\alpha)}I^*\right)$$

i. Kestabilan Titik Ekuilibrium

Untuk mengetahui tingkat penyebaran penyakit flu singapura, diperlukan parameter tertentu. Parameter yang biasa digunakan dalam penyebaran penyakit adalah bilangan reproduksi dasar dan dinotasikan dengan (R_0). Nilai (R_0) diperoleh dengan cara berikut:

$I>0$

$$\frac{\alpha\beta\delta-\alpha((\alpha+\delta)(\alpha+\gamma)(1+\alpha_2 I)}{\beta}\cdot\frac{(\lambda+\alpha)}{(\lambda+\alpha)(\alpha+\delta)(\alpha+\gamma)-\delta\lambda\gamma}>0$$
$$\frac{\alpha\beta\delta(\lambda+\alpha)-\alpha((\alpha+\delta)(\alpha+\gamma)(1+\alpha_2 I)(\lambda+\alpha)}{\beta[(\lambda+\alpha)(\alpha+\delta)(\alpha+\gamma)-\delta\lambda\gamma]}>0$$
$$\alpha\beta\delta(\lambda+\alpha)-\alpha((\alpha+\delta)(\alpha+\gamma)(1+\alpha_2 I)(\lambda+\alpha)>0$$
$$\alpha\beta\delta(\lambda+\alpha)>\alpha((\alpha+\delta)(\alpha+\gamma)(1+\alpha_2 I)(\lambda+\alpha)$$

Karena $\alpha\beta\delta(\lambda+\alpha)>\alpha((\alpha+\delta)(\alpha+\gamma)(1+\alpha_2 I)(\lambda+\alpha)$ maka dapat didefinisikan bilangan reproduksi dasar (R_0) sebagai berikut:

$$R_0=\frac{\beta\delta}{(\alpha+\delta)(\alpha+\gamma)(1+\alpha_2 I)} \tag{8}$$

Selanjutnya, akan dicari kestabilan dari titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik dari Persamaan (2).

Teorema 2. Jika $R_0<1$ maka titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik lokal.
Bukti:

Kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit dapat diselidiki dengan cara substitusikan titik ekuilibrium bebas penyakit model SEIR, $(\bar{S},\bar{E},\bar{I},\bar{R})=(1,0,0,0)$, ke dalam matriks Jacobian sehingga diperoleh:

$$J_2=\begin{bmatrix} -\frac{\beta(0)}{1+\alpha_2(0)}-\alpha & 0 & -\frac{\beta(1)}{1+\alpha_2(0)}+\frac{\beta(1)\alpha_2(0)}{(1+\alpha_2(0))^2} & \lambda \\ \frac{\beta(0)}{1+\alpha_2(0)} & -(\alpha+\delta) & \frac{\beta(1)}{1+\alpha_2(0)}-\frac{\beta(1)\alpha_2(0)}{(1+\alpha_2(0))^2} & 0 \\ 0 & \delta & -(\alpha+\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -(\lambda+\alpha)\end{bmatrix}.$$

$$J_2=\begin{bmatrix} -\alpha & 0 & -\beta & \lambda \\ 0 & -(\alpha+\delta) & \beta & 0 \\ 0 & \delta & -(\alpha+\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -(\lambda+\alpha)\end{bmatrix}$$

Kemudian akan dicari nilai eigen dari matriks di atas dengan:

$$\det(kI-J_2)=0$$
$$\det\left(\begin{vmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k\end{vmatrix}-\begin{bmatrix} -\alpha & 0 & -\beta & \lambda \\ 0 & -(\alpha+\delta) & \beta & 0 \\ 0 & \delta & -(\alpha+\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -(\lambda+\alpha)\end{bmatrix}\right)=0$$
$$\begin{vmatrix} k+\alpha & 0 & \beta & -\lambda \\ 0 & k+(\alpha+\delta) & -\beta & 0 \\ 0 & -\delta & k+(\alpha+\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma & k+(\lambda+\alpha)\end{vmatrix}=0$$
$$(k+\alpha)\begin{vmatrix} k+(\alpha+\delta) & -\beta & 0 \\ -\delta & k+(\alpha+\gamma) & 0 \\ 0 & -\gamma & k+(\lambda+\alpha)\end{vmatrix}=0$$
$$(k+\alpha)(k+\lambda+\alpha)\begin{vmatrix} k+(\alpha+\delta) & -\beta \\ -\delta & k+(\alpha+\gamma)\end{vmatrix}=0$$

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 4, No. 2, Juli 2018
ISSN 1693-2390 print/ISSN 2407-0939 online

$$(k+\alpha)(k+(\lambda+\alpha))[(k+(\alpha+\delta))(k+(\alpha+\gamma))-\beta\delta]=0$$

diperoleh $k_1 = -\alpha$, $k_2 = -(\lambda+\alpha)$. Dan dapat dilihat bahwa persamaan karakteristik untuk nilai eigen lainnya sebagai berikut

$$k^2 + (2\alpha+\delta+\gamma)k + (\alpha+\delta)(\alpha+\gamma) - \beta\delta = 0$$

jadi didapat persamaan karakteristik yaitu

$$k^2 + Ak + B = 0$$

dengan

$$A = 2\alpha+\delta+\gamma$$
$$B = (\alpha+\delta)(\alpha+\gamma)-\beta\delta.$$

Selanjutnya, didefinisikan $R_0 = \dfrac{\beta\delta}{(1+\alpha_2 I^*)(\alpha+\delta)(\alpha+\gamma)}$, untuk mengetahui akar-akar negatif maka akan dibuktikan:

1) $A.B > 0$
2) $A+B < 0$

$R_0 = \dfrac{\beta\delta}{(\alpha+\delta)(\alpha+\gamma)(1+\alpha_2 I^*)}$ dengan $I^* = 0$ sehingga $R_0 = \dfrac{\beta\delta}{(\alpha+\delta)(\alpha+\gamma)}$

1) $$A.B = \frac{c}{a} = \frac{(\alpha+\delta)(\alpha+\gamma)-\beta\delta}{1}$$
$$= \frac{(\alpha+\delta)(\alpha+\gamma)-\beta\delta}{(\alpha+\delta)(\alpha+\gamma)} \times (\alpha+\delta)(\alpha+\gamma)$$
$$= 1 - \frac{\beta\delta}{(\alpha+\delta)(\alpha+\gamma)} \times (\alpha+\delta)(\alpha+\gamma)$$
$$= (1-R_0) \times (\alpha+\delta)(\alpha+\gamma) > 0$$

karena $R_0 < 1$ maka $(1-R_0) > 0$ atau $(1-R_0)\times(\alpha+\delta)(\alpha+\gamma) > 0$

2) $$A+B = \frac{-b}{2} = \frac{-(2\alpha+\delta+\gamma)}{2}$$

karena $\dfrac{-b}{2} = \dfrac{-(2\alpha+\delta+\gamma)}{2} = \dfrac{-2\alpha-\delta-\gamma}{2}$, maka menghasilkan $\dfrac{-b}{2} < 0$ jadi terbukti $A+B<0$. Jadi, nilai eigen untuk persamaan karakteristik $k^2 + Ak + B = 0$ sebagai berikut:

$$k_3 = \frac{-A-\sqrt{A^2-4B}}{2} \qquad k_4 = \frac{-A+\sqrt{A^2-4B}}{2}$$

dengan

$$A = 2\alpha+\delta+\gamma$$
$$B = (\alpha+\delta)(\alpha+\gamma)-\beta\delta.$$

Teorema 3. Jika

$$(3\alpha+\gamma+\delta)+\left(\frac{\beta I^*}{1+\alpha_2 I^*}\right)>0, \left(\frac{\delta\beta S^* I^* \alpha\alpha_2}{(1+\alpha_2 I^*)^2}+\alpha(\alpha+\delta)(\alpha+\gamma)+\frac{\beta I^*}{1+\alpha_2 I^*}(\alpha+\delta)(\alpha+\gamma)\right)>\left(\frac{\delta\alpha\beta S^*}{1+\alpha_2 I^*}\right) \text{dan}$$

$$\left(8\alpha^2(\alpha+\delta+\gamma)+2\delta\gamma(3\alpha+\delta\gamma)+\delta\gamma(\delta+\gamma)+\frac{\beta I^*}{1+\alpha_2 I^*}(2\alpha(4\alpha+3\delta+3\gamma))+(\delta+\gamma^2)+\frac{\beta S^*\alpha_2 I^*\delta}{(1+\alpha_2 I^*)^2}(2\alpha+\delta+\gamma)\right)$$

$$>\left(\left(\frac{\beta S^*\delta}{1+\alpha_2 I^*}+\frac{\beta^2}{(1+\alpha_2 I^*)^2}\right)(2\alpha+\delta+\gamma)+\frac{\beta^2 S^* I^*\delta}{(1+\alpha_2 I^*)^2}+\frac{\beta^2 S^*\alpha_2\delta}{(1+\alpha_2 I^*)^3}\right)$$ maka titik ekuilibrium endemik penyakit stabil asimtotik.

Bukti:

Kestabilan titik ekuilbrium endemik penyakit dapat dilihat dengan cara substitusikan titik ekuilibrium endemik penyakit:

$$(S^*,E^*,I^*,R^*)=\left(\frac{(1+\alpha_2 I^*)(\alpha+\delta)(\alpha+\gamma)}{\delta\beta},\frac{(\alpha+\gamma)}{\delta}I^*,\frac{\alpha\beta\delta-\alpha((\alpha+\delta)(\alpha+\gamma))(1+\alpha_2 I^*)}{\beta}.\frac{(\lambda+\alpha)}{(\lambda+\alpha)(\alpha+\delta)(\alpha+\gamma)-\delta\lambda\gamma},\frac{\gamma}{(\lambda+\alpha)}I^*\right)$$

dalam matrik Jacobian, sehingga diperoleh:

$$J_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\beta I^*}{1+\alpha_2 I^*}-\alpha & 0 & -\frac{\beta S^*}{1+\alpha_2 I^*}+\frac{\beta S^*\alpha_2 I^*}{(1+\alpha_2 I^*)^2} & \lambda \\ \frac{\beta I^*}{1+\alpha_2 I^*} & -(\alpha+\delta) & \frac{\beta S^*}{1+\alpha_2 I^*}-\frac{\beta S^*\alpha_2 I^*}{(1+\alpha_2 I^*)^2} & 0 \\ 0 & \delta & -(\alpha+\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -(\lambda+\alpha) \end{bmatrix}$$

Kemudian akan dicari nilai eigen dari matriks di atas dengan:

$$\det(kI - J_2) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{\beta I^*}{1+\alpha_2 I^*}-\alpha & 0 & -\frac{\beta S^*}{1+\alpha_2 I^*}+\frac{\beta S^*\alpha_2 I^*}{(1+\alpha_2 I^*)^2} & \lambda \\ \frac{\beta I^*}{1+\alpha_2 I^*} & -(\alpha+\delta) & \frac{\beta S^*}{1+\alpha_2 I^*}-\frac{\beta S^*\alpha_2 I^*}{(1+\alpha_2 I^*)^2} & 0 \\ 0 & \delta & -(\alpha+\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -(\lambda+\alpha) \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$k+(\lambda+\alpha)\begin{vmatrix} k+\frac{\beta I^*}{1+\alpha_2 I^*}+\alpha & 0 & \frac{\beta S^*}{1+\alpha_2 I^*}-\frac{\beta S^*\alpha_2 I^*}{(1+\alpha_2 I^*)^2} \\ -\frac{\beta I^*}{1+\alpha_2 I^*} & k+(\alpha+\delta) & -\frac{\beta S^*}{1+\alpha_2 I^*}+\frac{\beta S^*\alpha_2 I^*}{(1+\alpha_2 I^*)^2} \\ 0 & -\delta & k+(\alpha+\gamma) \end{vmatrix} = 0$$

Sehingga diperoleh: $k_1 = -(\lambda+\alpha)$

Untuk k_2, k_3 dan k_4 diperoleh dengan menggunakan metode Sarrus.Dengan demikian, persamaan karakteristik yang diperoleh:

$$a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$$

Berdasarkan Kriteria kestabilan Routh Hurwitz, titik ekuilibriumendemik (S^*, E^*, I^*, R^*) stabil asimtotik lokal jika $a_3 > 0$, $a_1 > 0$, $a_1a_2 > a_3$ jika dan hanya jika $a_1a_2 - a_3 > 0$.

Dari kasus di atas diperoleh $a_1 > 0$, $a_3 > 0$ dan $a_1a_2 > a_3$, sehingga terpenuhi $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 < 0$, dan $\lambda_4 < 0$.Berdasarkan Teorema 1., maka titik ekuilibrium endemik penyakit adalah stabil asimtotik lokal

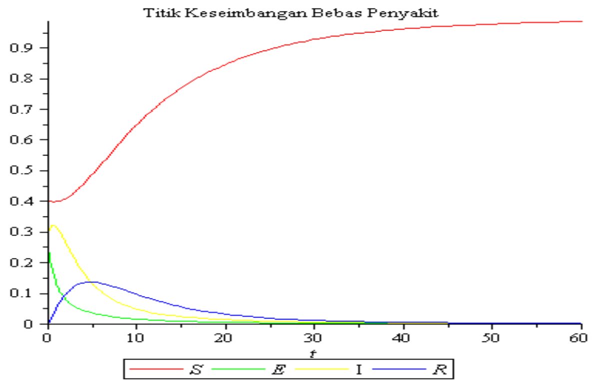
j. Simulasi

Ambil sebarang nilai parameter seperti terlihat pada Tabel 2., di bawah ini:

Tabel2. Nilai Parameter pada Titik EkuilibriumBebas Penyakit

Parameter	Nilai Parameter
α	0.1
δ	0.98
β	0.5
λ	0.1
γ	0.2
α_2	0.01

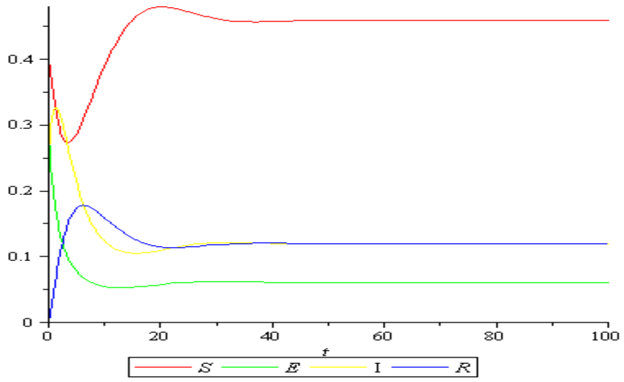
Dimisalkan nilai awal: $(0) = 0.4$, $E(0) = 0.3$, $I(0) = 0.25$ dan $R(0) = 0$ sehingga dinamika populasi bebas penyakit dapat dilihat pada Gambar 3 berikut ini :



Gambar3.Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Berdasarkan Gambar 3, terlihat bahwa populasi S terjadi peningkatan karena adanya individu yang lahir berkurangnya populasi pada kompartemen$I$. Sementara itu populasi pada kompartemen Eterus turun menuju angka nol. Penurunan populasi pada kompartemen E disebabkan karena adanya laju kontak antara populasi yang rentan dan populasi terinfeksi, adanya kematian alami dan laju perubahan individu yang terjangkit menjadi terinfeksi. Sementara itu populasi pada kompartemen I mengalami penurunan secara signifikan menuju nol yang disebabkan karena populasi berada dalam kondisi bebas penyakit sehingga penyakit tidak dapat bertahan didalam populasi, artinya dalam waktu tertentu individu yang terinfeksi berkurang dan akan hilang dari populasi.Begitu juga pada kompartemen R yang terjadi penurunan dikarenakan oleh laju kesembuhan pada populasi yang terinfeksi dan laju kematian alami pada kompartemen R.

Selanjutnya, akan diberikan simulasi untuk titik ekuilibrium endemik sebagai berikut:



Gambar 4.Titik Ekuilibrium Endemik Penyakit

Berdasarkan Gambar 4 terlihat Populasi S mengalami penurunan karena adanya kontak dengan individu *infected* dan terjadinya kematian alami. Sementara populasi *exposed* dan *infected*mengalami kenaikan yang mengakibatkan jumlah individu yang terinfeksi bertambah dan tidak pernah hilang karena populasi berada dalam kondisi endemik.

Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan, maka dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Model SEIRS penyebaran penyakit flu singapura dengan *saturated incidence rate* adalah seperti yang telah diberikan pada Persamaan (2) dan dituliskan kembali,

$$\frac{dS}{dt} = \alpha - \frac{\beta SI}{1+\alpha_2 I} - \alpha S + \lambda R \quad S(0) > 0$$
$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta SI}{1+\alpha_2 I} - \alpha E - \delta E \qquad E(0) \geq 0$$

$$\frac{dI}{dt} = \delta E - \alpha I - \gamma I \qquad I(0) \geq 0$$
$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \lambda R - \alpha R \qquad R(0) \geq 0$$
$$\alpha > 0, \delta > 0, \beta > 0, \lambda > 0, \mu > 0, \gamma > 0, \alpha_2 > 0$$

dengan $S(t) + E(t) + I(t) + R(t) = 1$ merupakan jumlah populasi keseluruhan.

2. Ada dua titik ekuilibriumyang diperoleh pada model SEIRS dengan *saturated incidence rate* yaitu:
   a. Titik ekuilibrium bebas penyakit,$(\bar{S}, \bar{E}, \bar{I}, \bar{R}) = (1,0,0,0)$.
   b. Titik ekuilibrium endemik penyakit,

$$\left(S^*, E^*, I^*, R^*\right) = \left(\frac{\left(1+\alpha_2 I^*\right)(\alpha+\delta)(\alpha+\gamma)}{\delta\beta}, \frac{(\alpha+\gamma)}{\delta} I^*, \frac{\alpha\beta\delta - \alpha\left((\alpha+\delta)(\alpha+\gamma)\right)\left(1+\alpha_2 I^*\right)}{\beta} . \frac{(\lambda+\alpha)}{(\lambda+\alpha)(\alpha+\delta)(\alpha+\gamma) - \delta\lambda\gamma}, \frac{\gamma}{(\lambda+\alpha)} I^*\right)$$

3. Ada dua kestabilan titik ekuilibrium pada model SEIRS yaitu kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit dan kestabilan titik ekuilibrium endemik penyakit. Titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$, maka nilai parameter bernilai real negatif, sehingga $k_1 < 0$, $k_2 < 0$, $k_3 < 0$, dan $k_4 < 0$. Artinya, dalam waktu yang cukup lama penyakit akan hilang dari populasi. Dan titik ekuilibrium endemik penyakit akan selalu stabil asimtotik lokal jika

$$(3\alpha + \gamma + \delta) + \left(\frac{\beta I^*}{1 + \alpha_2 I^*}\right) > 0, \left(\frac{\delta\beta S^* I^* \alpha\alpha_2}{\left(1 + \alpha_2 I^*\right)^2} + \alpha(\alpha + \delta)(\alpha + \gamma) + \frac{\beta I^*}{1 + \alpha_2 I^*}(\alpha + \delta)(\alpha + \gamma)\right) > \left(\frac{\delta\alpha\beta S^*}{1 + \alpha_2 I^*}\right)$$ dan

$$\left(8\alpha^2(\alpha + \delta + \gamma) + 2\delta\gamma(3\alpha + \delta\gamma) + \delta\gamma(\delta + \gamma) + \frac{\beta I^*}{1 + \alpha_2 I^*}\left(2\alpha(4\alpha + 3\delta + 3\gamma)\right) + \left(\delta + \gamma^2\right) + \frac{\beta S^* \alpha_2 I^* \delta}{\left(1 + \alpha_2 I^*\right)^2}(2\alpha + \delta + \gamma)\right)$$
$$> \left(\left(\frac{\beta S^* \delta}{1 + \alpha_2 I^*} + \frac{\beta^2}{\left(1 + \alpha_2 I^*\right)^2}\right)(2\alpha + \delta + \gamma) + \frac{\beta^2 S^* I^* \delta}{\left(1 + \alpha_2 I^*\right)^2} + \frac{\beta^2 S^* \alpha_2 \delta}{\left(1 + \alpha_2 I^*\right)^3}\right),$$ berarti dalam waktu yang cukup lama penyakit akan akan terus ada dalam populasi.

Daftar Pustaka

[1] Anton, Rorres, *Aljabar Linear Elementer*, Versi Aplikasi, Jakarta: Erlangga, 2004.

[2] Hale, J. K and H. Kocak, *Dynamic Bifurcation*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[3] Perko, L., *Differensial Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[4] Purcell, E. J danVarberg, D. *Kalkulus dan Geometri Analitis*, Jilid 1 Edisi ke 5- Bandung, 1994.

[5] Kelley, Walter. G, Peterson, Alan. C., *The Theory OfDifferential Equations*, Springer, 2010

[6] Roy, N., Compartmental Modeling Of Hand, Foot and Mouth Infectious Disease (HFMD). *Research Journal Of Applied Sciences*. 5(3) : 2010, 177-182.

[7] Sari, E.R., Kestabilan Global Bebas Penyakit Flu Singapura (Hand, Foot and Mouth Disease) Berdasarkan Model SEIRS, *Research Journal Of Applied Sciences*, Vol. 7(1) : 2012.

[8] Zhang, Jinhong, Jianwen Jia and Xinyu Song, Analysis Of An SEIR Epidemic Model With Saturated Incidence Rate And Saturated Treatment Function, *Research Journal Of Applied Sciences*, Vol. 2014.