Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 4, No. 2, Juli 2018
ISSN 1693-2390 print/ISSN 2407-0939 online

Nilai Total Ketakteraturan Titik dari Graf Hasil Kali Korona P_m dan P_2

Corry Corazon Marzuki[1], Susiyanti[2], Lolyta Yudianti[3]
[1,2,3] Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: corrazon_m@yahoo.co.id

ABSTRAK

Pelabelan-k total tak teratur titik dari suatu graf G adalah suatu pemetaan dari himpunan titik dan sisi ke himpunan bilangan bulat positif $\{1, 2, \dots, k\}$ sedemikian sehingga bobot setiap titiknya berbeda. Nilai total ketakteraturan titik dari graf Gyang dinotasikan dengan *tvs(G)* adalah label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan total tak teratur titik, yang dinotasikan dengan *tvs(G)*.Pada makalah ini diperoleh nilai total ketakteraturan titik dari graf hasil kali koronaP_m dan P_2 yang dinotasikan dengan$P_m \odot P_2$, yaitu$tvs(P_m \odot P_2) = \left\lceil \frac{2m+2}{3} \right\rceil$.

Kata kunci: *Graf hasil kali korona, Pelabelan total tak teratur titik, Nilai total ketakteraturan titik*

ABSTRACT

A vertex irregular total k-labelling of a graph $G$is a mapping of the set of vertices and edges into positive integer number $\{1,2, \dots k\}$ such that the weight of every vertices is different. Total vertex irregularity strength of graph G denoted by $tvs(G)$ is the minimum k for which the graph G has a vertexirregular total labeling. In this paper we find the total vertex irregularity strength ofcorona product ofP_m and P_2 which denoted by $P_m \odot P_2$, that is $tvs(P_m \odot P_2) = \left\lceil \frac{2m+2}{3} \right\rceil$.

Keywords: *Corona product, Totally vertex irregular total labeling, Total vertex irregularity strength*

Pendahuluan

Graf merupakan pasangan himpunan titik dan himpunan sisi. Pengaitan titik-titik pada graf membentuk sisi dan dapat direpresentasikan pada gambar sehingga membentuk polagraf tertentu. Daya tarik teori graf adalah penerapannya yang sangat luas, mulai dari ilmu komputer, kimia, fisika, biologi, sosiologi, teknik kelistrikan, linguistik, ekonomi, manajemen, pemasaran, hingga pemecahan teka-teki dan permainan asah otak. Salah satu yang paling menarik dari teori graf yaitu tentang pelabelan graf.

Pelabelan graf merupakan suatu topic dalam teori graf. Objek kajiannya berupa graf yang secara umum direpresentasikan oleh titik dan sisi serta himpunan bagian bilangan asli yang disebut label. Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sadlacek (1964), kemudian Stewart (1966), Kotzigdan Rosa (1970). Hingga saat ini pemanfaatan teori pelabelan graf sangat dirasakan peranannya, terutama pada sector system komunikasi dan transportasi, navigasi geografis, radar, penyimpanan data computer dan desain *integrated circuit* pada komponen elektronik.

Pelabelan pada suatu graf adalah pemetaan bijektif yang memasangkan unsur-unsur graf (titik atau sisi) dengan bilangan bulat positif. Jika domain dari fungsi (pemetaan) adalah titik, maka pelabelan disebut pelabelan titik (*vertex labeling*), jika domainnya adalah sisi maka disebut pelabelan sisi (*edge labeling*), jika domainnya titik dan sisi maka disebut pelabelan total (*total labeling*). Hingga kini dikenal beberapa jenis pelabelan pada graf, antara lain pelabelan *gracefull*, pelabelan harmoni, pelabelan total tak teratur, pelabelan ajaib dan pelabelan anti ajaib (Gallian, 1998).

Baca, Jendrol, Miller dan Ryan pada tahun 2001 memperkenalkan duajenis pelabelan total tak teratur, yaitupelabelan total tak teratur titikdan pelabelan total tak teratur sisi. Nilai total ketakteraturan sisi dari graf hasil kali korona P_m dan $P_n (P_m \odot P_n)$ telah didapatkan oleh Nurdin dkk. pada [8], dimana $tes(P_m \odot P_n) = \left\lceil \frac{2mn+1}{3} \right\rceil$. Sedangkan nilai total ketakteraturan titiknya belum didapatkan sebelumnya. Oleh karena itu, pada makalah ini akan ditentukan nilai total ketakteraturan titik dari dari graf hasil kali korona$P_m$dan P_2, dimana$P_m$adalah graf lintasan dengan m titik dan P_2 adalah graf lintasan dengan dua titik.

Ada beberapa hasil penelitian sebelumnya mengenai nilai total ketakteraturan titik. Diantaranya penelitian Nurdin, dkk. berjudul ”*On Total Vertex Irregularity Strength of Trees*” [9],penelitian Ali Ahmad, dkk. dengan judul ”*Total Vertex Irregularity Strength of Wheel Related Graphs*” [1] dan ”*Total Vertex Irregularity Strength of Certain Classes of Unicyclic Graphs*” [2].Selain itu, penelitian Indra Rajasingh, dkk. dengan judul ”*On Total Vertex Irregularity Strength of Triangle Related Graphs*” [5] dan ”*On The Total Vertex Irregularity Strengths of Cycle Related Graphs and H Graphs*” [6]. Kemudian penelitian Ashfaq Ahmad, dkk. dengan judul ”*Total Vertex Irregularity Strength of Ladder Related Graphs*” [3].

Metode Penelitian

Banyak masalah yang dapat direpresentasikan dengan sebuah graf. Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada Tahun 1736 melalui tulisannya yang berisi tentang upaya pemecahan masalah jembatan Konigsberg. Pada masalah tersebut, daratan (titik-titik yang dihubungkan oleh jembatan) dinyatakannya sebagai titik (noktah) yang disebut simpul (*vertex*) dan jembatan sebagai garis yang disebut sisi (*edge*).Berikut dinyatakan definisi graf.

Definisi 1. [7] Graf G didefinisikan sebagai pasangan terurut himpunan Vdan E, yang dinotasikan dengan $G = (V, E)$ yang dalam hal ini V adalah himpunan tak kosong dari titik-titik (*vertices*atau*nodes*) dan$E$ adalah himpunan sisi (*edges*atau*arcs*).

Ada banyak jenis graf, salah satunya adalah graf lintasan (*path graph*). Graf lintasan merupakan suatu graf yang terdiri dari titik-titik yang terhubung dan hanya dilewati oleh satu sisi saja. Graf lintasan dengan *n* titik dinotasikan dengan P_n, yaitu graf yang terdiri dari lintasan tunggal. P_n memiliki *n*-1 sisi.

Operasi pada graf juga ada beberapa macam, diantaranya adalah hasil kali korona (*corona product*).
Hasil kali korona $G_1 \odot G_2$ dari dua graf G_1 dan G_2 didefinisikan oleh Frucht dan Harary (Harary, 1996), sebagai graf *G* yang diperoleh dengan membuat satu penggandaan dari graf G_1 yang mempunyai P_1 titik dan menggandakan graf G_2 sebanyak P_1 kemudian menghubungkan titik ke-*i* graf G_1 ke setiap titik hasil penggandaan graf G_2 ke-*i*.

1. Pelabelan Graf

Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh matematikawan Sedlacek pada tahun 1964. Pelabelan graf merupakan pemberian label yang berupa bilangan bulat positif pada elemen-elemen dalam graf berupa sisi atau titik.

Pelabelan suatu graf adalah suatu pemetaan yang membawa elemen-elemen graf ke bilangan-bilangan bulat positif atau non negatif. Pada umumnya domain dari pemetaan ini adalah himpunan semua titik dan sisi (pelabelan ini disebut pelabelan total), himpunan titik saja (pelabelan titik), atau himpunan sisi saja (pelabelan sisi).

Salah satu jenis pelabelan yang belakangan ini menjadi perbincangan yang cukup hangat yaitu pelabelan total tak teratur. Pelabelan total tak teratur terdiri dari pelabelan total tak teratur titik, pelabelan total tak teratur sisi, dan pelabelan total tak teratur total. Berikut ini akan diberikan definisi tentang pelabelan total tak teratur titik. Pelabelan-k total tak teratur titik pertama kali diperkenalkan oleh Bača, dkk., pada Tahun 2007, dalam jurnal yang berjudul “*On Irregular Total Labellings*”[4].

2. Pelabelan Total Tak Teratur Titik

Misalkan *G* = (*V*,*E*), pelabelan-*k* total didefinisikan sebagai pemetaan$\lambda: \mathrm{V} \cup \mathrm{E} \rightarrow \{1,2, \ldots, k\}$.

Definisi 1. [4]Pelabelan-*k* total merupakan pelabelan-*k* total tak teratur titik dari graf *G* jika untuk setiap titik *x* dan *y* yang berbeda maka $wt(x) \neq wt(y)$. $wt(x)$ merupakan bobot titik *x* yang dinyatakan sebagai:

$$wt(x) = \lambda(x) + \sum_{ux \in E} \lambda(ux).$$

Nilai total ketakteraturan titik graf *G* (*total vertex irregularity strength*) dinotasikan dengan *tvs*(*G*) adalah nilai *k* minimum atau label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf *G* dengan pelabelan total tak teratur titik.

Baca dkk.[4] menunjukkan batas bawah dan batas atas nilai total ketakteraturan titik untuk sebarang graf, sepertidinyatakanpadaTeorema 1.

Teorema 1. Misalkan G adalah graf (p,q) dengan titik $p = p(G)$ dan sisi $q = q(G)$, derajat minimum $\delta = \delta(G)$ dan derajat maksimum $\Delta = \Delta(G)$, maka $\left\lceil \frac{p+\delta}{\Delta+1} \right\rceil \leq tvs(G) \leq p + \Delta - 2\delta + 1$.

Beberapa jenis graf tertentu sudah ditemukan *tvs*-nya, hasil lengkap dapat dilihat di jurnal (Gallian, 2013). Namun nilai total ketakteraturan titik dari graf hasil kali koronaP_m dan P_2 belum ditentukan. Hal inilah yang akan ditentukan pada makalah ini.

3. MetodePenelitian

Berikut diuraikan langkah-langkah menentukan nilai total ketakteraturan titik dari graf hasil kali korona $P_m$dan P_2.

1. Diberikan graf hasil kali korona P_m dan P_2 yang dinotasikan dengan$P_m \odot P_2$.
2. Menentukan batas bawah dari $tvs(P_m \odot P_2)$ menggunakan Teorema 1, yaitu:
$$\left\lceil \frac{p+\delta}{\Delta+1} \right\rceil \leq tvs(G) \leq p + \Delta - 2\delta + 1$$
3. Menentukan pelabelan-*k* total tak teratur titik dari graf$P_m \odot P_2$ untuk $m = 1,2,3,...,10$ dengan menggunakan label terbesar sebesar batas bawah yang diperoleh pada Langkah 2.
4. Menentukan rumus untuk pelabelan titik dari graf $P_m \odot P_2$ dengan mengacu pada pola pelabelan yang terdapat pada Langkah 3.
5. Menentukan rumus untuk pelabelan sisi dari graf $P_m \odot P_2$ dengan mengacu pada pola pelabelan yang terdapat pada Langkah 3.
6. Menentukan rumus bobot titik dari graf $P_m \odot P_2$ dengan mengacu pada Langkah 4 dan Langkah 5.
7. Membuktikan bahwa λ merupakan pelabelan total tak teratur titik pada graf $P_m \odot P_2$.

Hasil dan Pembahasan

Graf hasil kali korona $P_m \odot P_2$ adalah graf yang diperoleh dengan menggandakan graf P_2 sebanyak n, selanjutnya titik ke-*i* pada graf P_m dihubungkan ke setiap titik P_2, dimana $1 \leq i \leq n$. Graf hasil kali korona $P_m \odot P_2$ merupakan graf sederhana dengan graf lintasan sebagai graf bagiannya. Jika m adalah banyaknya titik pada graf P_m, maka banyaknya titik dan sisi pada graf hasil kali korona $P_m \odot P_2$masing-masing adalah $|V(P_m \odot P_2)| = 3m$ dan $|E(P_m \odot P_2)| = 4m - 1$. Nilai total ketakteraturan titik dari graf $P_m \odot P_2$, disajikan dalam teorema berikut:

Teorema 2. Misalkan$P_m \odot P_2$ adalah graf hasil kali korona dari$P_m$dan$\odot P_2$, maka:

$$tvs(P_m \odot P_2) = \left\lceil \frac{2m+2}{3} \right\rceil.$$

Bukti:

Derajat titik terkecil dari graf $P_m \odot P_2$ adalah 2. Perhatikan bahwa jumlah titik yang berderajat dua pada $P_m \odot P_2$ adalah $2m$. Supaya mendapatkan pelabelan optimal, titik-titik yang berderajat terkecil dilabeli sedemikian sehingga bobot untuk titik-titik berderajat 2 tersebut dimulai dari $3, 4, 5, \ldots, 2m + 2$. Sementara bobot titik graf $P_m \odot P_2$ yang berderajat 2 adalah jumlah dari 3 buah bilangan bulat positif yang disebut label, yaitu 1 label titik itu sendiri dan 2 label sisi yang bersisian dengan titik tersebut. Oleh karena itu, kita dapatkan label terbesar minimum yang digunakan yaitu $\left\lceil \frac{2m+2}{3} \right\rceil$ dan tidak mungkin lebih kecil dari $\left\lceil \frac{2m+2}{3} \right\rceil$. Jadi, kita dapatkan bahwa $tvs(P_m \odot P_2) \geq \left\lceil \frac{2m+2}{3} \right\rceil$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $tvs(P_m \odot P_2) \leq \left\lceil \frac{2m+2}{3} \right\rceil$.

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 4, No. 2, Juli 2018
ISSN 1693-2390 print/ISSN 2407-0939 online

Untuk$m \geq 2$ dan m bilangan genap, maka ikuti aturan pemberian nama titik-titik pada graf $P_m \odot P_2$ berikut:

a. Pemberian nama titik-titik pada graf P_m
Beri nama titik-titik ke $\frac{m+2}{2}, \frac{m}{2}, \frac{m-2}{2}, \frac{m-4}{2}, \dots, 2, \frac{m+4}{2}, \frac{m+6}{2}, \dots, m, 1$ pada graf P_m secara berurutan dengan label $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_m$.

b. Pemberian nama titik-titik pada graf P_2
Titik-titik pada graf P_2 yang terkait dengan titik x_i dengan $i = 1, 2, 3, \dots, m-1$ diberi nama dengan ${y_i}^k$ dengan $k = 1$ untuk titik ke 2 dari P_2 dan $k = 2$ untuk titik ke 1 dari P_2. Sedangkan titik-titik pada graf P_2 yang terkait dengan titik x_i dengan $i = \frac{m+2}{2}, \frac{m+4}{2}, \dots, m$ diberi nama dengan ${y_i}^k$ dengan $k = 1$ untuk titik ke 1 dari P_2 dan $k = 2$ untuk titik ke 2 dari P_2.

Sedangkan untuk $m \geq 3$ dan m bilangan ganjil, maka ikuti aturan pemberian nama titik-titik pada graf $P_m \odot P_2$ berikut:

a. Pemberian nama titik-titik pada graf P_m
Beri nama titik-titik ke $\frac{m+1}{2}, \frac{m-1}{2}, \frac{m-3}{2}, \frac{m-5}{2}, \dots, 2, \frac{m+3}{2}, \frac{m+5}{2}, \dots, m, 1$ pada graf P_m secara berurutan dengan label $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_m$.

b. Pemberian nama titik-titik pada graf P_2
Titik-titik pada graf P_2 yang terkait dengan titik x_i dengan $i = 1, 2, 3, \dots, \frac{m-1}{2}$diberi nama dengan ${y_i}^k$ dengan $k = 1$ untuk titik ke 2 dari P_2 dan $k = 2$ untuk titik ke 1 dari P_2. Sedangkan titik-titik pada graf P_2 yang terkait dengan titik x_i dengan $i = \frac{m+1}{2}, \frac{m+3}{2}, \dots, m$diberi nama dengan ${y_i}^k$ dengan $k = 1$ untuk titik ke 1 dari P_2 dan $k = 2$ untuk titik ke 2 dari P_2.

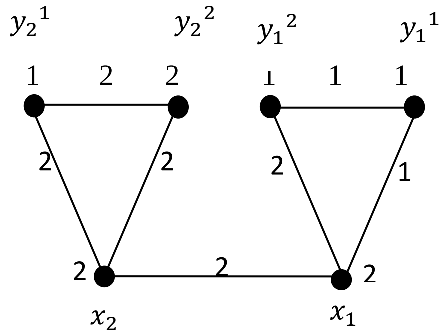
Misalkan himpunan titik dari graf $P_m \odot P_2$ adalah $V(P_m \odot P_2) = \{x_i, {y_i}^k \mid 1 \leq i \leq m$ dan $1 \leq k \leq 2\}$,

dan himpunan sisi dari graf $P_m \odot P_2$ adalah:$E(P_m \odot P_2) = \{x_i {y_i}^k \mid 1 \leq i \leq m$ dan $k = 1\} \cup \{{y_i}^k {y_i}^{k+1} \mid 1 \leq i \leq m$ dan $k = 1\} \cup \{x_i x_j \mid 1 \leq i \leq m-1 \; dan \; 2 \leq j \leq m$.

Didefinisikan$r_i = \left\lceil \frac{2i+2}{3} \right\rceil$untuk $1 \leq i \leq m$.

Pelabelan r_m total tak teratur titik dengan pelabelan λ sebagai berikut:

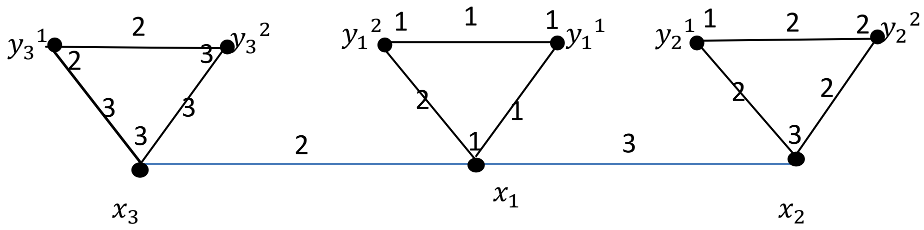
1. Untuk $m = 2$
Jika $m = 2$ maka didapatkan $tvs(P_2 \odot P_2) \geq \left\lceil \frac{2(2)+2}{3} \right\rceil = 2$. Pelabelan graf $P_2 \odot P_2$ pada Gambar 1 berikut merupakan pelabelan yang optimal.



Gambar 1. Pelabelan Total Tak Teratur Titik pada $P_2 \odot P_2$

Dari Gambar1 dapat dilihat bahwa pelabelan label terbesar yang digunakan adalah 2 dan pelabelan tersebut mengakibatkan bobot setiap titiknya berbeda, sehingga pelabelan ini adalah pelabelan-2 total tak teratur titik pada $P_2 \odot P_2$.

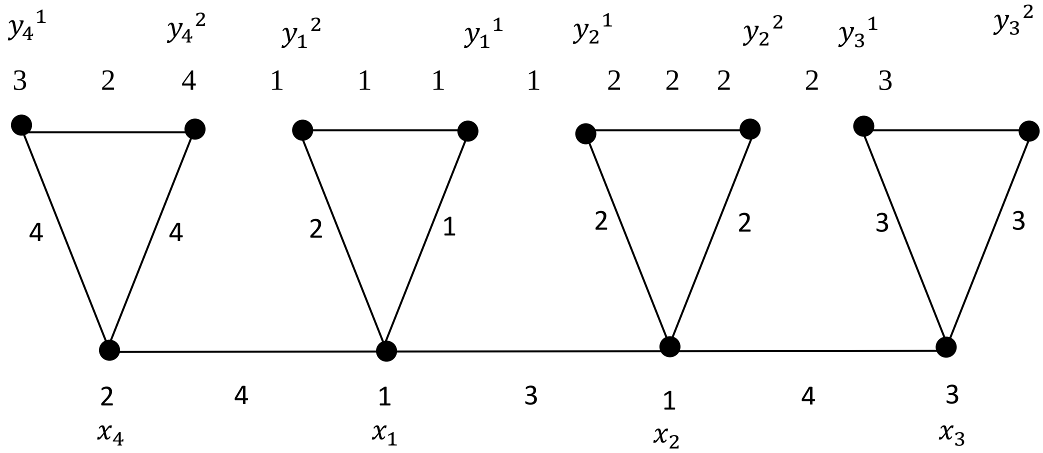
2. Untuk $m = 3$
Jika $m = 3$ maka didapatkan $tvs(P_3 \odot P_2) \geq \left\lceil \frac{2(3)+2}{3} \right\rceil = 3$. Pelabelan graf $P_3 \odot P_2$ pada Gambar 2 berikut merupakan pelabelan yang optimal.



Gambar 2. Pelabelan Total Tak Teratur Titik pada $P_3 \odot P_2$

Dari Gambar 2 dapat dilihat bahwa pelabelan label terbesar yang digunakan adalah 3 dan pelabelan tersebut mengakibatkan bobot setiap titiknya berbeda, sehingga pelabelan ini adalah pelabelan-3 total tak teratur titik pada $P_3 \odot P_2$.

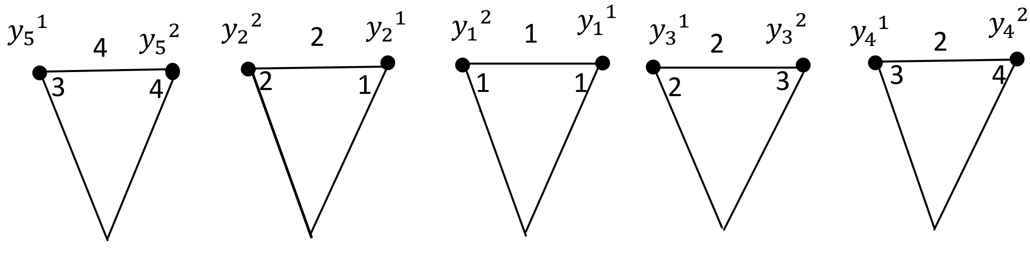
3. Untuk $m = 4$
Jika $m = 4$ maka didapatkan $tvs(P_4 \odot P_2) \geq \left\lceil \frac{2(4)+2}{3} \right\rceil = 4$. Pelabelan graf $P_4 \odot P_2$ pada Gambar 3 berikut merupakan pelabelan yang optimal

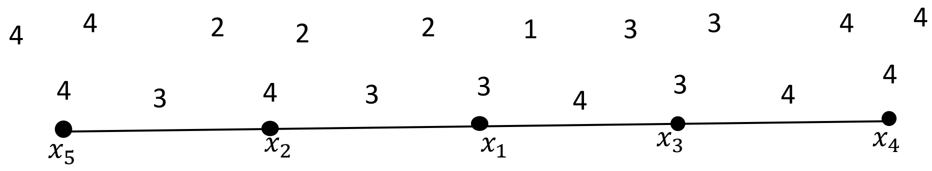


Gambar 3. Pelabelan Total Tak Teratur Titik pada $P_4 \odot P_2$

Dari Gambar 3 dapat dilihat bahwa pelabelan label terbesar yang digunakan adalah 4 dan pelabelan tersebut mengakibatkan bobot setiap titiknya berbeda, sehingga pelabelan ini adalah pelabelan-4 total tak teratur titik pada $P_4 \odot P_2$.

4. Untuk $m = 5$
Jika $m = 5$ maka didapatkan $tvs(P_5 \odot P_2) \geq \left\lceil \frac{2(5)+2}{3} \right\rceil = 4$. Pelabelan graf $P_5 \odot P_2$ pada Gambar 4 berikut merupakan pelabelan yang optimal.





Gambar 4 Pelabelan Total Tak Teratur Titik pada $P_5 \odot P_2$

Dari Gambar 4 dapat dilihat bahwa pelabelan label terbesar yang digunakan adalah 4 dan pelabelan tersebut mengakibatkan bobot setiap titiknya berbeda, sehingga pelabelan ini pelabelan-4 total tak teratur titik pada $P_5 \odot P_2$.

5. Untuk $m \geq 6$

a. Pelabelan titiknya adalah:

$$\lambda(x_i) = \begin{cases} 2m - 2r_m + 1 & ; \text{jika } i = 1 \\ 2m + i - 2r_i - 2r_m + 2 & ; \text{jika } 2 \leq i \leq \dfrac{m-2}{2} \\ \dfrac{5m+4}{2} - 2r_i - r_m & ; \text{jika } i = m \\ 2m + i - 2r_i - 2r_m + 5 & ; \text{jika } i = \dfrac{m}{2} \\ 2m + i - 2r_m + 4 - 2r_i & ; \text{jika } \dfrac{m+2}{2} \leq i \leq m-2 \\ \dfrac{3m+2i+8}{2} - 2r_i - r_m & ; \text{jika } i = m-1, \end{cases}$$

$$\lambda({y_i}^k) = \begin{cases} 1 & ; \text{jika } i = 1 \text{ dan } 1 \leq k \leq 2 \\ r_i + k - 2 & ; \text{jika } 2 \leq i \leq m \text{ dan } 1 \leq k \leq 2. \end{cases}$$

b. Pelabelan sisinya adalah:

$$\lambda(x_i {y_i}^k) = \begin{cases} k & ; \text{jika } i = 1 \text{ dan } 1 \leq k \leq 2 \\ r_i & ; \text{jika } 2 \leq i \leq m \text{ dan } 1 \leq k \leq 2, \end{cases}$$

$$\lambda({y_i}^k {y_i}^{k+1}) = \begin{cases} \left\lceil \dfrac{i+2}{3} \right\rceil & ; \text{jika } 1 \leq i \leq 4 \text{ dan } k = 1 \\ \left\lceil \dfrac{2i-1}{3} \right\rceil & ; \text{jika } 5 \leq i \leq m \text{ dan } i \ (mod\ 3) = 0 \text{ dan } k = 1 \\ \left\lceil \dfrac{2i-2}{3} \right\rceil & ; \text{jika } 5 \leq i \leq m \text{ dan } i \ (mod\ 3) = 1 \text{ dan } k = 1 \\ \left\lceil \dfrac{2i}{3} \right\rceil & ; \text{jika } 5 \leq i \leq m \text{ dan } i \ (mod\ 3) = 2 \text{ dan } k = 1, \end{cases}$$

$$\lambda(x_i x_j) = \begin{cases} r_m - 1 & ; \text{jika } i = 1 \text{ dan } j = \dfrac{m}{2} \\ r_m & ; \text{ jika } 1 \leq i \leq \dfrac{m-2}{2} \text{ dan } j = i+1 \\ r_m & ; \text{ jika } \dfrac{m}{2} \leq i \leq m-2 \text{ dan } j = i+1 \\ r_m & ; \text{jika } i = \dfrac{m-2}{2} \text{ dan } j = m. \end{cases}$$

Dilihat dari definisi bahwa fungsi λ adalah suatu pemetaan dari

$V(P_m \odot P_n) \cup E(P_m \odot P_n)$ke $\{1, 2, \dots, \left\lceil \frac{2m+2}{3} \right\rceil\}$.

Adapun bobot titik x_i adalah:

$$wt(x_i) = \begin{cases} 2m+3 & ; \text{jika } i = 1 \\ 2m+i+2 & ; \text{jika } 2 \le i \le \dfrac{m-2}{2} \\ \dfrac{5m+4}{2} & ; \text{jika } i = m \\ 2m+i+4 & ; \text{jika } \dfrac{m}{2} \le i \le m-2 \\ \dfrac{3m+2\text{i}+8}{2} & ; \text{jika } i = m-1. \end{cases}$$

Sedangkan bobot titik $y_i{}^k$ adalah:

$$wt(y_i{}^k) = \begin{cases} k+2 & ; \text{jika } i = 1 \text{ dan } 1 \le k \le 2 \\ 2r_i + k + \left\lceil \dfrac{i+2}{3} \right\rceil - 2 & ; \text{jika } 2 \le i \le 4 \text{ dan } 1 \le k \le 2 \\ 2r_i + k + \left\lceil \dfrac{2i-1}{3} \right\rceil - 2 & ; \text{jika } 5 \le i \le m \text{ dan } i \ (mod\ 3) = 0 \text{ dan } 1 \le k \le 2 \\ 2r_i + k + \left\lceil \dfrac{2i-2}{3} \right\rceil - 2 & ; \text{jika } 5 \le i \le m \text{ dan } i \ (mod\ 3) = 1 \text{ dan } 1 \le k \le 2 \\ 2r_i + k + \left\lceil \dfrac{2i}{3} \right\rceil - 2 & ; \text{jika } 5 \le i \le m \text{ dan } i \ (mod\ 3) = 2 \text{ dan } 1 \le k \le 2. \end{cases}$$

Bobot titik $y_i{}^k$ yang dinotasikan dengan $wt(y_i{}^k)$ adalah bilangan bulat positif berurutan mulai dari 3 sampai ke $2m+2$. Sedangkan bobot titik x_i yang dinotasikan dengan $wt(x_i)$ adalah bilangan bulat positif berurutan yang dimulai dari $2m+3$ sampai ke $3m+2$. Hal ini menunjukkan bahwa setiap titik dalam pelabelan total tak teratur titik dari graf$P_m \odot P_2$ memiliki bobot yang berbeda. Dapat disimpulkan bahwa $tvs(P_m \odot P_2) \le \left\lceil \frac{2m+2}{3} \right\rceil$.

6. Untuk $m \ge 7$

   a. Pelabelan titiknya adalah:

$$\lambda(x_i) = \begin{cases} 2m - 2r_m + 1 & ; \text{jika} i = 1 \\ 2m + i - 2r_i - 2r_m + 2 & ; \text{jika } 2 \le i \le \dfrac{m-1}{2} \\ \dfrac{5m+5}{2} - 2r_i - r_m & ; \text{jika} i = m \\ 2m + i - 2r_i - 2r_m + 5 & ; \text{jika } \ i = \dfrac{m+1}{2} \\ 2m + i - 2r_m + 4 - 2r_i & ; \text{jika} \dfrac{m+3}{2} \le i \le m-2 \\ \dfrac{3m+2i+9}{2} - 2r_i - r_m & ; \text{jika } i = m-1, \end{cases}$$

$$\lambda(y_i{}^k) = \begin{cases} 1 & ; \text{jika } i = 1 \text{ dan } 1 \le k \le 2 \\ r_i + k - 2 & ; \text{jika } 2 \le i \le m \text{ dan} 1 \le k \le 2. \end{cases}$$

   b. Pelabelan sisinya adalah:

$$\lambda(x_i y_i{}^k) = \begin{cases} k & ; \text{jika } \ i = 1 \text{ dan } 1 \le k \le 2 \\ r_i & ; \text{jika } 2 \le i \le m \text{ dan} 1 \le k \le 2, \end{cases}$$

$$\lambda(y_i{}^k y_i{}^{k+1}) = \begin{cases} \left\lceil \dfrac{i+2}{3} \right\rceil & ; \text{jika} 1 \le i \le 4 \text{ dan } k = 1 \\ \left\lceil \dfrac{2i-1}{3} \right\rceil & ; \text{jika } 5 \le i \le m \text{ dan } i \ (mod\ 3) = 0 \text{ dan} k = 1 \\ \left\lceil \dfrac{2i-2}{3} \right\rceil & ; \text{jika } 5 \le i \le m \text{ dan } i \ (mod\ 3) = 1 \text{ dan} k = 1 \\ \left\lceil \dfrac{2i}{3} \right\rceil & ; \text{jika } 5 \le i \le m \text{ dan } i \ (mod\ 3) = 2 \text{ dan} k = 1, \end{cases}$$

$$\lambda(x_i x_j) = \begin{cases} r_m - 1 & ;\text{jika} i = 1 \text{ dan} j = \dfrac{m+1}{2} \\ r_m & ;\ \text{jika} 1 \leq i \leq \dfrac{m-3}{2} \text{dan } j = i+1 \\ r_m & ;\ \text{jika} \dfrac{m+1}{2} \leq i \leq m-2 \text{ dan} j = i+1 \\ r_m & ;\text{jika } i = \dfrac{m-1}{2} \text{dan } j = m. \end{cases}$$

Dilihat dari definisi bahwa fungsi λ adalah suatu pemetaan dari

$V(P_m \odot P_n) \cup E(P_m \odot P_n)$ ke $\{1, 2, \ldots, \lceil \frac{2m+2}{3} \rceil\}$.

Sehingga kita peroleh bobot titik $x_i(wt(x_i))$ yaitu:

$$wt(x_i) = \begin{cases} 2m+3 & ;\text{jika} i = 1 \\ 2m+i+2 & ;\text{jika} 2 \leq i \leq \dfrac{m-1}{2} \\ \dfrac{5m+5}{2} & ;\text{jika} i = m \\ 2m+i+4 & ;\text{jika } \dfrac{m+1}{2} \leq i \leq m-2 \\ \dfrac{3m+2\text{i}+9}{2} & ;\text{jika } i = m-1. \end{cases}$$

Sedangkan bobot titik $y_i{}^k(wt(y_i{}^k))$ adalah:

$$wt(y_i{}^k) = \begin{cases} k+2 & ;\text{jika} i = 1 \text{ dan } 1 \leq k \leq 2 \\ 2r_i + k + \left\lceil \dfrac{i\ +2}{3} \right\rceil - 2 & ;\text{jika} 2 \leq i \leq 4 \text{dan } 1 \leq k \leq 2 \\ 2r_i + k + \left\lceil \dfrac{2i-1}{3} \right\rceil - 2 & ;\text{jika } 5 \leq i \leq m \text{ dan } i\ (mod\ 3) = 0 \text{ dan } 1 \leq k \leq 2 \\ 2r_i + k + \left\lceil \dfrac{2i-2}{3} \right\rceil - 2 & ;\text{jika} 5 \leq i \leq m \text{ dan } i\ (mod\ 3) = 1 \text{ dan } 1 \leq k \leq 2 \\ 2r_i + k + \left\lceil \dfrac{2i}{3} \right\rceil - 2 & ;\text{jika } 5 \leq i \leq m \text{dan } i\ (mod\ 3) = 2 \text{ dan } 1 \leq k \leq 2. \end{cases}$$

Bobot titik dari graf $P_m \odot P_2$ pada $wt(y_i{}^k)$ adalah urutan bilangan bulat positif dimulai dari 3 sampai ke $2m+2$. Sedangkan pada $wt(x_i)$ yaitu urutan bilangan bulat positif yang dimulai dari $2m+3$ sampai ke $3m+2$. Hal ini menunjukkan bahwa setiap titik dalam pelabelan total tak teratur titik dari graf $P_m \odot P_2$ memiliki bobot yang berbeda. Dapat disimpulkan bahwa $tvs(P_m \odot P_2) \leq \lceil \frac{2m+2}{3} \rceil$. ∎

Kesimpulan

Misalkan $P_m \odot P_2$ adalah graf hasil kali korona dari $P_m$dan P_2, maka nilai total ketakteraturan titik dari graf $P_m \odot P_2$ (*total vertex irregularity strength*) adalah $tvs(P_m \odot P_2) = \lceil \frac{2m+2}{3} \rceil$.

Daftar Pustaka

[1] Ahmad, A., Awan, K.M., Javaid, I., dan Slamin. "Total Vertex Irregularity Strength of Wheel Related Graphs".*Australasian Journal of Combinatorics*. Vol. 51 (2011) 147-156.

[2] Ahmad, A., Bača, M., dan Bashir, Y. "Total Vertex Irregularity Strength of Certain Classes of Unicyclic Graphs". *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie*. Vol.57 (105) No. 2 (2014) 147-152.

[3] Ahmad, A., Bokhary, S.A.H., Hasni, R., danSlamin. "Total Vertex Irregularity Strength of Ladder Related Graphs". *Sci. Int(Lahore)* 26(1) (2014) 1-5.

[4] Bača, M., Jendrol J., Miller, M., dan Ryan, J. "On Irregular Total Labellings," *Discrete Math*. Vol. 307 (2007) 1378-1388.

[5] Rajasingh, I., Rajan, B., danAnnamma,V. "On Total Vertex Irregularity Strength of Triangle Related Graphs". *Annals of Pure and Applied Mathematics* Vol.1 No.2 (2012) 108-116.

[6] Rajasingh, I., Rajan, B., danAnnamma,V. "On The Total Vertex Irregularity Strengths of Cycle Related Graphs and H Graphs". *International Journal of Computer Applications* 52 (19) (2012) 32-37.

[7] Munir, R. " *MatematikaDiskrit".* EdisiTiga, halaman 353. Informatika Bandung, Bandung. 2007.

[8] Nurdin, A. N. M. Salman, E. T. Baskoro, The Total Edge-Irregular Strengths of The Corona Product of Paths with Some Graphs, *J. Combin. Math. Combin. Comput.* 65 (2008), 163-175.

[9] Nurdin, Baskoro, E.T., Salman, A.N.M., Gaos, N.N. "On Total Vertex IrregularityStrength ofTrees". *Discrete Math.* 233 (2010) 3043-3048.