Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 4, No. 2, Juli 2018
ISSN 1693-2390 print/ISSN 2407-0939 online

Menentukan Panjang Jari-Jari Lingkaran Sawayama-Thebault

Surlina[1], Mashadi[2], Sri Gemawati[3]
[1,2,3]Jurusan Matematika, Fakultas MIPA Universitas Riau
Jl. HR Subantas KM 12,5, Kampus BinaWidya
Simpang Baru, Pekanbaru, Riau 28293
e-mail: surlinamathedu@gmail.com

ABSTRAK

Pada teorema Sawayama-Thebault terdapat lingkaran yang menyinggung sisi segitiga dan lingkaran luar segitiga. Pada makalah ini dibahas cara menentukan panjang jari-jari lingkaran Sawayama-Thebault menggunakan aturan trigonometri dan konsep luas segitiga.

Kata Kunci: Teorema Sawayama-Thebault, Trigonometri, Jari-jari

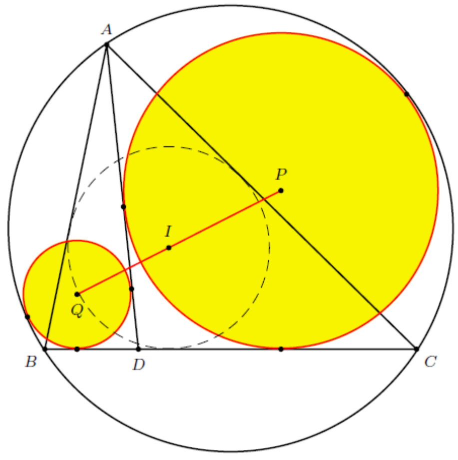
ABSTRACT

On the theorem of Sawayama-Thebault there is a circle that offends the triangle and triangle outer cirlce. This paper discusses how to determine the radians of Sawayama-Thebault using trigonometry and area of triangle.

Keywords: *Sawayama-Thebault's theorem, Trigonometry, Radians*

Pendahuluan

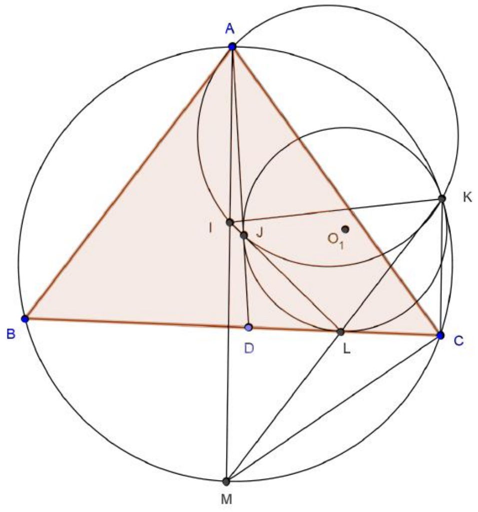
Teorema Sawayama-Thebault dikemukakan oleh matematikawan Perancis yang bernama Victor Thebault tahun 1938. Kemudian teorema Sawayama-Thebault dibuktikan oleh Ayme [1]. Teorema Sawayama-Thebault menyatakan tentang kolinearitas tiga buah titik. Titik-titik ini dikonstruksi pada suatu ΔABC. Titik D terletak pada sisi BC. Jika P titik pusat lingkaran yang menyinggung sisi AD, DC dan lingkaran luar ΔABC. Kemudian Q titik pusat lingkaran yang menyinggung sisi AD, DB dan lingkaran luar ΔABC, sehingga titik P, I dan Q segaris.



Gambar 1: Ilustrasi Teorema Sawayama-Thebault

Kemudian teorema Sawayama-Thebault dikembangkan oleh Farhangi [2]. Pada tahun 1996, Farhangi menambahkan akibat teorema Sawayama-Thebault dengan menyatakan bahwa titik I, J dan L kolinear. Titik I adalah *incenter* ΔABC, titik J adalah titik singgung lingkaran Sawayama-Thebault dengan garis AD. Kemudian titik L adalah titik singgung lingkaran Sawayama-Thebault dengan garis BC.

Ilustrasi pengembangan teorema Sawayama-Thebault yang dikemukakan oleh Farhangi disajikan seperti pada Gambar 2.



Gambar 2: Titik I, J dan L segaris

Pada makalah ini dibahas mengenai cara menentukan panjang jari-jari lingkaran Sawayama-Thebault menggunakan aturan trigonometri dan konsep geometri sederhana lainnya yang mudah dipahami oleh siswa sekolah menengah.

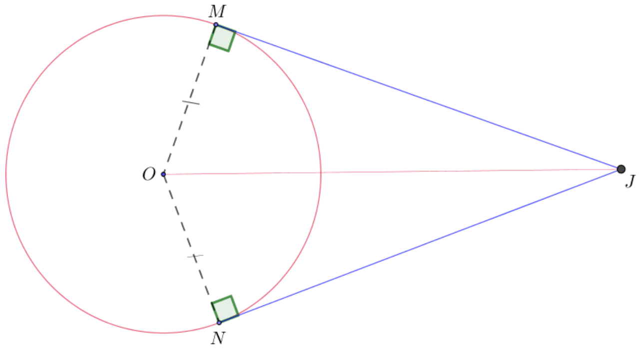
Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini yaitu menggunakan perbandingan trigonometri, kesebangunan dan konsep geometri sederhana lainnya.

1. Lingkaran Singgung pada Segitiga

Pada sebarang ΔABC dapat dibuat beberapa jenis lingkaran, yaitu lingkaran singgung dalam segitiga, lingkaran singgung luar segitiga, dan lingkaran luar segitiga. Mashadi [5] memberikan beberapa definisi dan teorema yang berkaitan dengan lingkaran singgung segitiga. Garis singgung lingkaran adalah garis yang menyinggung lingkaran tepat di satu titik dan tegak lurus dengan diameter lingkaran yang melalui titik singgungnya. Melalui sebuah titik pada lingkaran dapat dibentuk sebuah garis singgung. Sedangkan melalui sebuah titik di luar lingkaran dapat dibentuk dua garis singgung lingkaran. Dari garis singgung lingkaran dapat ditentukan hubungan garis singgung dengan jari-jari lingkaran. Berikut diberikan beberapa definisi dan teorema yang berkaitan dengan
lingkaran singgung pada segitiga.

Teorema 1 Kedua garis singgung lingkaran yang ditarik dari sebuah titik di luar lingkaran mempunyai panjang yang sama.



Gambar 3: JM dan JN adalah garis singgung lingkaran

Bukti. Pada Gambar 2.1, diketahui lingkaran dengan titik pusat *O* dan titik *J* berada di luar lingkaran. Jika *JM* dan *JN* adalah garis singgung terhadap lingkaran pada titik *M* dan *N*, maka akan ditunjukkan bahwa *JM* = *JN*.
Perhatikan ΔOMJ siku-siku di *M*, sehingga

$$(JM)^2 = (JO)^2 - (OM)^2 \quad (1)$$

Sedangkan pada ΔONJ siku-siku di *N*, sehingga

$$(JN)^2 = (JO)^2 - (ON)^2 \quad (2)$$

Karena *OM* dan *ON* merupakan garis yang ditarik dari titik pusat tegak lurus terhadap garis singgung lingkaran, maka $OM = ON = r$.
Dari persamaan (1) dan (2), diperoleh

$$(JM)^2 = (JN)^2$$
$$JM = JN$$

Terbukti bahwa kedua garis singgung lingkaran yang ditarik dari sebuah titik di luar lingkaran mempunyai panjang yang sama.

2. Luas Segitiga dan Jari-jari Lingkaran Dalam Suatu Segitiga

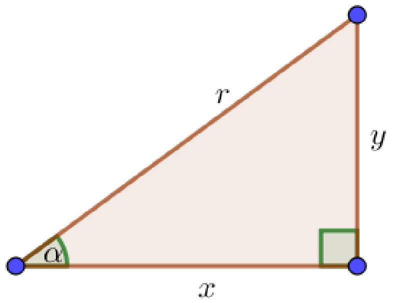
Dalam Mashadi [5], pada sebarang segitiga berlaku rumus : $L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ dengan *a*, *b*, dan *c* adalah panjang sisi pada segitiga ABC, serta *s* menyatakan setengah dari keliling segitiga yaitu s = $1/_2\,(a+b+c)$.

Jari-jari lingkaran dalam pada segitiga ABC dapat ditentukan dengan rumus berikut :

$$r = \frac{L}{s} = \frac{1}{s}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

3. Perbandingan Trigonometri

Pada suatu segitiga siku-siku berlaku perbandingan sisi berikut :



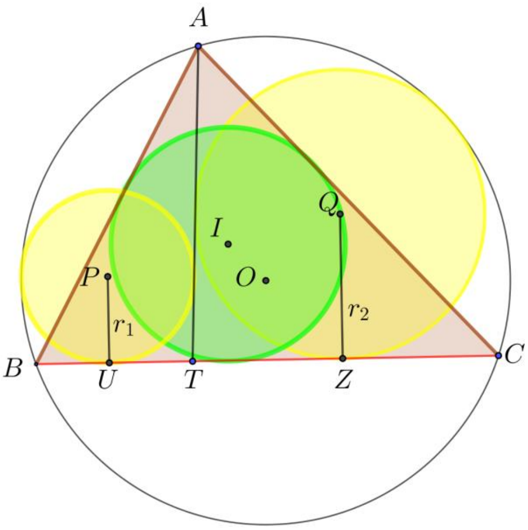
Gambar 4: Segitiga siku-siku

1. sin α = $\frac{y}{r}$
2. cos α = $\frac{x}{r}$
3. tan α = $\frac{y}{x}$
4. ctg α = $\frac{x}{y}$
5. sec α = $\frac{r}{x}$
6. cosec α = $\frac{r}{y}$

Hasil dan Pembahasan

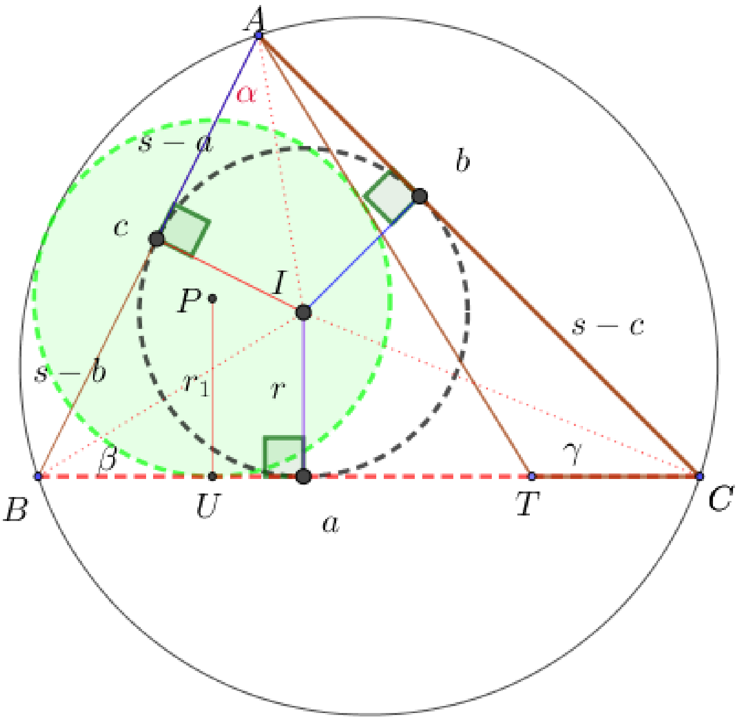
Diberikan sebarang ΔABC. Selanjutnya titik *O* adalah *circumcenter* dan titik *I* adalah *incenter* ΔABC. Titik *T* terletak di sisi *BC*. Lingkaran *P* adalah lingkaran yang menyinggung sisi *BT*, *AT* dan lingkaran luar ΔABC. Sedangkan lingkaran *Q* adalah lingkaran yang menyinggung sisi *AT*, *TC* dan lingkaran luar ΔABC.

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 4, No. 2, Juli 2018
ISSN 1693-2390 print/ISSN 2407-0939 online



Gambar 5: Jari-jari lingkaran P dan lingkaran Q

Akan ditentukan panjang $PU = r_1$ dan $QZ = r_2$ dengan menggunakan aturan trigonometri dan konsep luas segitiga.



Gambar 6: Jari-jari r_1 lingkaran

Pada gambar 6, akan ditentukan panjang jari-jari lingkaran Sawayama-Thebault. Misalkan $PU = r_1$ jari-jari lingkaran yang berpusat di P . Jari-jari lingkaran dalam segitiga adalah r.
Misalkan panjang sisi $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ dan

$$s = \frac{(a+b+c)}{2}$$

Misalkan Luas ΔABC = L. Menurut Formula Heron,

$$L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = rs$$

Selanjutnya misalkan

$$\alpha = \tan\frac{1}{2}A,$$
$$\beta = \tan\frac{1}{2}B,$$
$$\gamma = \tan\frac{1}{2}C.$$

Berdasarkan teorema jari-jari lingkaran dalam segitiga, diperoleh:

$$\alpha = \frac{r}{s-a},$$
$$\beta = \frac{r}{s-b},$$
$$\gamma = \frac{r}{s-c}.$$

Jika $\beta\gamma$ dikalikan, maka didapat

$$\beta\gamma = \frac{r}{s-b}.\frac{r}{s-c}$$
$$\beta\gamma = \frac{r^2}{(s-b)(s-c)}$$
$$\beta\gamma = \frac{\left(\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}\right)^2}{(s-b)(s-c)}$$
$$\beta\gamma = \frac{\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2}}{(s-b)(s-c)}$$
$$\beta\gamma = \frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2(s-b)(s-c)}$$
$$\beta\gamma = \frac{s-a}{s}.$$

Selanjutnya,

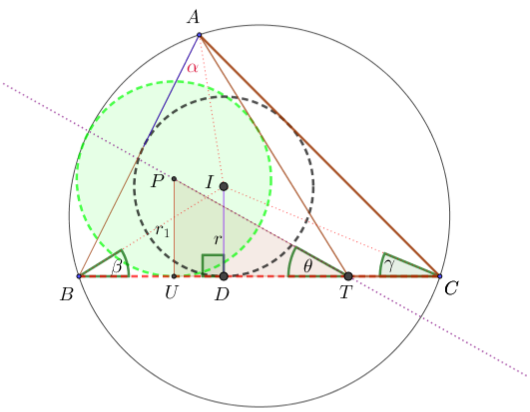
$$\alpha\beta\gamma = \frac{r}{s-a}.\frac{s-a}{s} = \frac{r}{s}$$
$$\alpha\beta\gamma = \frac{r}{s}$$

Diketahui bahwa $r = \frac{L}{s}$, sehingga diperoleh

$$\alpha\beta\gamma = \frac{r^2}{L} \qquad (3)$$

Kemudian akan ditentukan panjang r_1 menggunakan garis AT seperti pada gambar 7.

Misalkan $\tau = tan\theta,\ 2\theta = \angle ATB$. Titik D adalah titik potong sisi BC dengan garis yang ditarik tegak lurus dari I ke sisi BC. Garis ID = r , dengan r jari-jari lingkaran dalam ΔABC.



Gambar 7 : Misalkan τ = tanθ

Berdasarkan Gambar 5 terlihat bahwa $BU = BD - UD$
Perhatikan bahwa $\angle IUD = \angle PUT = \theta$
Kemudian diperoleh bahwa

$$UD = r\tau \tag{4}$$

$$BD = r\cot\tfrac{1}{2}B = \tfrac{r}{\beta} \tag{5}$$

$$DC = \tfrac{r}{\gamma} \tag{6}$$

Dari persamaan (4), (5) dan (6) diperoleh bahwa

$$BU = \frac{r}{\beta} - r\tau$$

$$BU = \frac{r}{\beta}(1 - \beta\tau)$$

Dan dari $UC = UD + DC$ diperoleh

$$UC = r\tau + \frac{r}{\gamma}$$

$$UC = \frac{r}{\gamma}(1 + \gamma\tau)$$

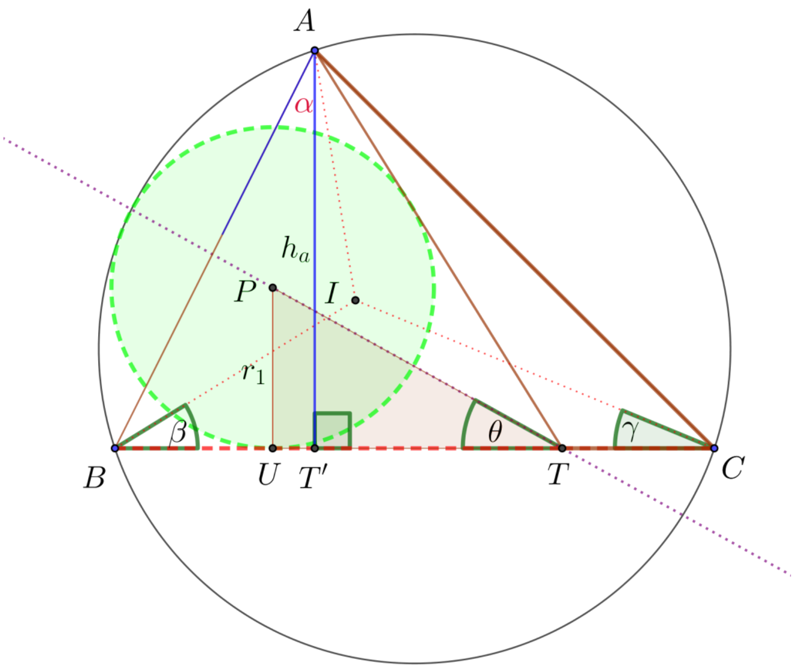
Jika BU dikalikan UC, maka didapat

$$BU.UC = \left(\frac{r}{\beta}(1 - \beta\tau)\right)\left(\frac{r}{\gamma}(1 + \gamma\tau)\right)$$

$$BU.UC = \frac{r^2}{\beta\gamma}(1 - \beta\tau)(1 + \gamma\tau)$$

$$BU.UC = L\alpha(1 - \beta\tau)(1 + \gamma\tau) \tag{7}$$

Selanjutnya akan ditentukan panjang jari-jari lingkaran menggunakan tinggi segitiga.



Gambar 8: Garis h_a = tinggi ΔABC yang ditarik dari A

Pada gambar 8, misalkan h_a = tinggi ΔABC yang ditarik dari A

$$\tan B = \frac{h_a}{BT'}$$

$$BT' = \frac{h_a}{\tan B}$$

$$BT' = h_a \cot B$$

$$\cot B = \frac{BT}{h_a}$$

Selanjutnya dengan cara yang sama diperoleh

$$\tan 2\theta = \frac{h_a}{TT'}$$
$$TT' = \frac{h_a}{\tan 2\theta}$$
$$TT' = h_a \cot 2\theta$$
$$\cot 2\theta = \frac{TT'}{h_a}$$

Kemudian pada gambar 5 terlihat bahwa $BT = BT' + TT'$

$$BT = h_a cotB + h_a cot2\theta$$

Dengan mensubstitusi nilai cot B dan cot $\cot 2\theta$ diperoleh

$$BT = h_a(cotB + cot2\theta)$$
$$BT = \frac{2L}{a}\left(\frac{1-\beta^2}{2\beta} + \frac{1-\tau^2}{2\tau}\right)$$
$$BT = \frac{2L}{a}\left(\frac{2\tau-2\tau\beta^2+2\beta-2\beta\tau}{4\beta\tau}\right)$$
$$BT = \frac{rs}{a\beta\tau}(\tau - \tau\beta^2 + \beta - \beta\tau)$$
$$BT = \frac{rs}{a\beta\tau}(\tau + \beta)(1 - \beta\tau)$$

Jadi , nilai

$$BT = \frac{rs}{a\beta\tau}(\tau + \beta)(1 - \beta\tau) \qquad (8)$$

Selanjutnya dari gambar 8 terlihat bahwa $UT = BT - BU$

Kemudian ditentukan panjang UT dengan mensubstitusikan nilai BT dan nilai BU. Secara aljabar diuraikan sebagai berikut.

$$UT = \frac{rs}{a\beta\tau}(\tau + \beta)(1 - \beta\tau) - \frac{r}{\beta}(1 - \beta\tau)$$
$$UT = \frac{rs}{a\beta\tau}(1 - \beta\tau)\left(\tau + \beta - \frac{a}{s}\tau\right)$$
$$UT = \frac{L}{s}\frac{s}{a\beta\tau}(1 - \beta\tau)\left(\frac{s-a}{s}\tau + \beta\right)$$
$$UT = \frac{L}{a\beta\tau}(1 - \beta\tau)(\beta\gamma\tau + \beta)$$
$$UT = \frac{L}{a\beta\tau}(1 - \beta\tau)(\beta(1 + \gamma\tau))$$
$$UT = \frac{L}{a\tau}(1 - \beta\tau)(1 + \gamma\tau)$$

Karena $r_{1=}UT.\tan\theta = UT.\tau$. Dengan mensubstitusi nilai UT diperoleh

$$r_1 = \frac{L}{a\tau}(1 - \beta\tau)(1 + \gamma\tau).\tau$$
$$r_1 = \frac{L}{a}(1 - \beta\tau)(1 + \gamma\tau) \qquad (9)$$

Persamaan (9) adalah panjang jari-jari lingkaran r_1 Sawayama-Thebault.

Dengan cara yang sama dapat diperoleh panjang jari-jari lingkaran r_2 Sawayama-Thebault. Substitusi $\beta = \gamma$ dan $= \frac{1}{\tau}$, sehingga dari persamaan (7) diperoleh

$$r_2 = \frac{L}{a\tau}\left(1 - \frac{\gamma}{\tau}\right)\left(1 + \frac{\beta}{\tau}\right)$$
$$r_2 = \frac{L}{a\tau^2}(\tau + \beta)(\tau - \gamma)$$

Jadi, panjang jari-jari r_2 lingkaran sawayama-Thebault adalah

$$r_2 = \frac{L}{a\tau^2}(\tau + \beta)(\tau - \gamma)$$

Kesimpulan

Jari-jari lingkaran Sawayama-Thebault ditentukan menggunakan konsep-konsep sederhana yang mudah dipahami oleh siswa sekolah menengah. Antara lain aturan trigonometri, konsep luas segitiga dan perhitungan aljabar sederhana. Dari pembahasan diperoleh panjang jari-jari lingkaran r_1 Sawayama-Thebault adalah $r_1 = \frac{L}{\alpha}(1-\beta\tau)(1+\gamma\tau)$ dan panjang jari-jari r_2 lingkaran Sawayama-Thebault adalah $r_2 = \frac{L}{\alpha\tau^2}(\tau+\beta)(\tau-\gamma)$.

Daftar Pustaka

[1] J.L. Ayme, *Sawayama and Thebault's theorem,* Forum Geometricorum, 3 (2003), 225-229
[2] S. Farhangi, *Sawayama Thebaults theorem*, The Ohio State University,Columbus, 2016.
[3] P. Fitriasari, *Pemanfaatan Software Geogebra dalam Pembelajaran Matematika*, Prosiding Semnas Pendidikan, Palembang, (2016), 57-69.
[4] D. Kodokostas, *A really elementary proof of Thebaults theorem*, National Honorary Mathematics Society, 12 (2004), 405-412.
[5] Mashadi, *Geometri Lanjut*, UR Press, Pekanbaru, 2015.