Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 4, No. 1, Januari 2018
ISSN 2460-4542

Nilai Total Ketakteraturan Titik dari *m-Copy* Graf Lingkaran

Corry Corazon Marzuki[1], **Milla Lestari**[2]
[1,2] Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: corrazon_m@yahoo.co.id, millalestari215@gmail.com

ABSTRAK

Pelabelan-k total pada graf $G(V,E)$ dengan himpunan titik tak kosong V dan himpunan sisi E adalah suatu pelabelan $\lambda: V \cup E \to \{1,2,\ldots k\}$. Suatu pelabelan-$k$ total dikatakan tak teratur titik, jika bobot setiap titik berbeda. Bobot suatu titik v dengan pelabelan λ adalah jumlah label titik dan label semua sisi uv yang terkait dengan titik v. Nilai total ketakteraturan titik dari graf *G* (*total vertex irregularity strength*) dinotasikan dengan $tvs(G)$ adalah nilai k minimum atau label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf *G* dengan pelabelan total tak teratur titik. Pada makalah ini ditentukan nilai total ketakteraturan titik dari m-*copy* graf lingkaran yang dinotasikan dengan mC_n dengan $m \geq 1$ dan $n \equiv 2(mod\ 3)$.

Kata Kunci: *m-copy* graf lingkaran, nilai total ketakteraturan titik, pelabelan total tak teratur titik.

ABSTRACT

A total k-labelling of a graph $G(V,E)$ with a non empty set V of vertices and a set E of edges, is a labeling $\lambda: V \cup E \to \{1,2,\ldots k\}$. A total k-labeling is called vertex irregular total labeling if the weight of two distinct vertices are different. The weight of a vertex v, under a labeling λ, is the sum of label of vertex v and all labels of edges that adjacent with v. Total vertex irregularity strength of graph G denoted by $tvs(G)$ is the minimum k for which the graph G has a vertex irregular total labeling. In this paper we determine the total vertex irregularity strength of m-copies of cycles with $m \geq 1$ and $n \equiv 2(mod\ 3)$.

Keywords: *m-copy graph cycles, total vertex irregularity strength, totally vertex irregular total labeling.*

Pendahuluan

Graf merupakan salah satu cabang penting dalam ilmu Matematika yang terus dikembangkan terutama dalam ilmu komputer dimana dengan graf dapat mempresentasikan banyak sekali model persoalan. Dalam kehidupan sehari-hari, graf digunakan untuk menggambarkan berbagai macam struktur yang ada. Tujuannya adalah sebagai visualisasi objek-objek agar lebih mudah dimengerti [10].

Teori graf merupakan pokok bahasan yang sudah tua usianya namun memiliki banyak terapan sampai saat ini. Graf digunakan untuk mempresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Graf didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V,E) ditulis dengan notasi $G=(V,E)$, yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak kosong dari simpul-simpul (*vertices* atau *nodes*) dinotasikan dengan $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dan E adalah himpunan sisi-sisi (*edges* atau *arcs*) yang menghubungkan sepasang simpul dinotasikan dengan $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ [7].

Pelabelan total tak teratur pertama kali diperkenalkan oleh Martin Baca, dkk pada Tahun 2001 [4]. Pelabelan-k total didefinisikan sebagai pemetaan yang memasangkan unsur-unsur graf (titik dan sisi) dengan bilangan bulat positif yang dinotasikan dengan $\lambda: V \cup E \to \{1,2,\ldots,k\}$. Suatu pelabelan-$k$ total dikatakan tak teratur titik, jika bobot setiap titik berbeda. Nilai total ketakteraturan titik (*total vertex irregularity strength*) dari graf G, yang dinotasikan dengan $tvs(G)$ adalah label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan total tak teratur titik.

Terdapat beberapa jenis graf, salah satunya adalah graf lingkaran (*cycle*). Graf lingkaran adalah graf sederhana yang dimulai dan diakhiri pada titik yang sama dan setiap simpulnya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n simpul dilambangkan dengan C_n. Beberapa peneliti yang membahas tentang nilai total ketakteraturan titik adalah Nurdin, dkk dengan judul "*On The Total Vertex Irregular Strength of A Disjoint Union of t Copies of A Path*" [11], hasil dari penelitian ini diperoleh $tvs(tP_n) = t$ untuk $n = 1$, $tvs(tP_n) = t + 1$ untuk $2 \le n \le 3$, dan $tvs(tP_n) = \left\lceil \frac{nt+1}{3} \right\rceil$ untuk $n \ge 4$.

Penelitian selanjutnya oleh Nurdin, dkk. berjudul "*On Total Vertex Irregularity Strength of Trees*" [9]. Penelitian oleh Ali Ahmad, dkk. dengan judul "*Total Vertex Irregularity Strength of Wheel Related Graphs*" [1] dan "*Total Vertex Irregularity Strength of Certain Classes of Unicyclic Graphs*" [2]. Penelitian oleh Indra Rajasingh, dkk. dengan judul "*On Total Vertex Irregularity Strength of Triangle Related Graphs*" [5] dan "*On The Total Vertex Irregularity Strengths of Cycle Related Graphs and H Graphs*" [6]. Penelitian oleh Ashfaq Ahmad, dkk. dengan judul "*Total Vertex Irregularity Strength of Ladder Related Graphs*" [3]. Berdasarkan keterangan di atas, maka peneliti tertarik untuk membahas mengenai nilai total ketakteraturan titik (tvs) dari $m-copy$ graf lingkaran.

Metode dan Bahan Penelitian

Banyak sekali struktur yang bisa direpresentasikan dengan graf, dan banyak masalah yang bisa diselesaikan dengan graf. Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada Tahun 1736 melalui tulisannya yang berisi tentang upaya pemecahan masalah jembatan Konigsberg.

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) ditulis dengan notasi $G = (V, E)$, yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak kosong dari simpul-simpul (*vertices atau nodes*) dan E adalah himpunan sisi-sisi (*edges atau arcs*) yang menghubungkan sepasang simpul.

Definisi di atas menyatakan bahwa V tidak boleh kosong, sedangkan E boleh kosong. Jadi, sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buah pun, tetapi simpulnya harus ada, minimal satu. Graf yang hanya mempunyai satu buah simpul tanpa sebuah sisi pun dinamakan graf trivial [2].

Pelabelan pada suatu graf adalah pemetaan yang memasangkan unsur graf yaitu titik atau sisi dengan bilangan bulat positif. Berdasarkan elemen-elemen yang dilabeli maka pelabelan dibagi ke dalam tiga jenis, yaitu pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total. Jika domain dari pemetaan adalah titik, maka pelabelan disebut pelabelan titik (*vertex labeling*). Jika domainnya adalah sisi, maka disebut pelabelan sisi (*edge labeling*), dan jika domainnya titik dan sisi, maka disebut pelabelan total (*total labeling*).

Salah satu jenis pelabelan yang belakangan ini menjadi perbincangan yang cukup hangat yaitu pelabelan total tak teratur. Pelabelan total tak teratur terdiri dari pelabelan total tak teratur titik, pelabelan total tak teratur sisi, dan pelabelan total tak teratur total. Berikut ini akan diberikan definisi tentang pelabelan total tak teratur titik dan pelabelan total tak teratur total. Pelabelan-k total tak teratur titik pertama kali diperkenalkan oleh Bača, dkk., pada Tahun 2007, dalam jurnal yang berjudul "*On Irregular Total Labellings*"[4].

Definisi 1. [4] Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf. Pelabelan $\lambda : V \cup E \to \{1, 2, \ldots, k\}$ dikatakan pelabelan-k total tak teratur titik di G, jika setiap dua titik berbeda x dan y di G memenuhi $wt(x) \ne wt(y)$. Bobot titik x yaitu: $wt(x) = \lambda(x) + \sum_{xy \in E} \lambda(xy)$. Nilai total ketakteraturan titik dari graf G yaitu label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan-k total tak teratur titik, yang dinotasikan dengan $tvs(G)$. bobot titik x yaitu: $wt(x) = \lambda(x) + \sum_{xy \in E} \lambda(xy)$.

Bača, dkk. juga memperoleh batas bawah dan batas atas nilai total ketakteraturan titik dari suatu graf G , yang dapat dilihat pada Teorema 2.

Teorema 2. [4] Misalkan G adalah graf (p,q) dengan derajat minimum $\delta = \delta(G)$ dan derajat maksimum $\Delta = \Delta(G)$, maka:

$$\left\lceil \frac{p+\delta}{\Delta+1} \right\rceil \le tvs(G) \le p + \Delta - 2\delta + 1$$

Adapun langkah-langkah yang digunakan dalam menentukan nilai total ketakteraturan titik dari m -*copy* graf lingkaran sebagai berikut :

1. Diberikan graf mC_n
2. Menentukan batas bawah dari $tvs(mC_n)$ untuk $m \ge 1$ dan $n \equiv 2(\bmod 3)$ dengan menggunakan Teorema 2, yaitu:
$$\left\lceil \frac{p+\delta}{\Delta+1} \right\rceil \le tvs(G) \le p + \Delta - 2\delta + 1$$
3. Menentukan pelabelan-*k* total tak teratur titik dari graf mC_n untuk $m = 1,2,3,...,10$ dan $n = 5,8,11$ dengan menggunakan label terbesar sebesar batas bawah yang diperoleh pada Langkah 2.
4. Menentukan rumus untuk pelabelan titik dari graf mC_n untuk $m \ge 1$ dan $n \equiv 2(\bmod 3)$ dengan mengacu pada pola pelabelan yang terdapat pada Langkah 3.
5. Menentukan rumus untuk pelabelan sisi dari graf mC_n untuk $m \ge 1$ dan $n \equiv 2(\bmod 3)$ dengan mengacu pada pola pelabelan yang terdapat pada Langkah 3.
6. Menentukan rumus bobot titik dari graf mC_n untuk $m \ge 1$ dan $n \equiv 2(\bmod 3)$ dengan mengacu pada Langkah 4 dan Langkah 5.
7. Membuktikan bahwa λ merupakan pelabelan total tak teratur titik pada graf mC_n untuk $m \ge 1$ dan $n \equiv 2(\bmod 3)$.
8. Mengaplikasikan rumus nilai total ketakteraturan titik dari graf mC_n yang diperoleh untuk $m = 15$ dan $n = 5$.

Hasil dan Pembahasan

Graf mC_n merupakan sebuah graf yang diperoleh dengan menggandakan graf C_n sebanyak *m*, dimana untuk setiap himpunan titik dari graf penggandaan tidak ada yang beririsan. Adapun pemberian nama titik dan sisi pada graf mC_n sebagai berikut:

a. Pemberian nama titik dan sisi pada graf mC_n untuk *n* ganjil.
   Graf C_n hasil penggandaan ke-*i* adalah
   $v_{(i-1)n+1}e_{(i-1)n+2}v_{(i-1)n+3}e_{(i-1)n+4}...e_{in-1}v_{in}e_{in}v_{in-1}e_{in-2}v_{in-3}e_{in-4}...e_{(i-1)n+3}v_{(i-1)n+2}e_{(i-1)n+1}v_{(i-1)n+1}$
   dengan $1 \le i \le m$.
b. Pemberian nama graf mC_n untuk *n* genap.
   Graf C_n hasil penggandaan ke-*i* adalah
   $v_{(i-1)n+1}e_{(i-1)n+2}v_{(i-1)n+3}e_{(i-1)n+4}...e_{in}v_{in}e_{in-1}v_{in-2}e_{in-3}v_{in-4}...e_{(i-1)n+3}v_{(i-1)n+2}e_{(i-1)n+1}v_{(i-1)n+1}$
   dengan $1 \le i \le m$.

Hasil penelitian tentang $tvs(mC_n)$ untuk $m \geq 1$ dan $n \equiv 2(\mathrm{mod}\, 3)$, diberikan dalam teorema berikut ini:

Teorema 3. Untuk $m \geq 1$ dan $n \equiv 2(\mathrm{mod}\, 3)$ berlaku:

$$tvs(mC_n) = \left\lceil \frac{nm+2}{3} \right\rceil$$

Bukti:

Berdasarkan Teorema 1, $\left\lceil \frac{p+\delta}{\Delta+1} \right\rceil \leq tvs(mC_n) \leq p + \Delta - 2\delta + 1$. Oleh karena $p = n \cdot m$ dan $\delta = \Delta = 2$ maka diperoleh $\left\lceil \frac{nm+2}{3} \right\rceil \leq tvs(mC_n) \leq nm - 1$. Jadi terbukti bahwa $tvs(mC_n) \geq \left\lceil \frac{nm+2}{3} \right\rceil$.

Selanjutnya akan dibuktikan $tvs(mC_n) \leq \left\lceil \frac{nm+2}{3} \right\rceil$. Hal ini akan dibuktikan dengan cara menunjukkan adanya pelabelan-$\left\lceil \frac{nm+2}{3} \right\rceil$ total tak teratur titik pada graf mC_n, yaitu:

a. Pelabelan titik pada graf mC_n, untuk $m \geq 1$ dan $n \equiv 2(\mathrm{mod}\, 3)$ adalah sebagai berikut:

$$\lambda(v_i) = \begin{cases} \left\lceil \frac{i+2}{3} \right\rceil & \text{untuk } i \equiv n(\mathrm{mod}\, 3n), \\ \left\lceil \frac{i}{3} \right\rceil & \text{untuk } i \equiv n+1(\mathrm{mod}\, 3n), \\ \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil & \text{untuk } i \text{ lainnya.} \end{cases}$$

b. Pelabelan sisi pada graf mC_n, untuk $m \geq 1$ dan $n \equiv 2(\mathrm{mod}\, 3)$ adalah sebagai berikut:

$$\lambda(e_i) = \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil \qquad \text{untuk } 1 \leq i \leq nm.$$

Berdasarkan pelabelan diatas, dapat dihitung bobot titik pada graf mC_n, untuk $m \geq 1$ dan $n \equiv 2(\mathrm{mod}\, 3)$ sebagai berikut:

1. Untuk $i \equiv n+1(\mathrm{mod}\, 3n)$

$$\begin{aligned} wt(v_i) &= \lambda(v_i) + \lambda(e_i) + \lambda(e_{i+1}) \\ &= \left\lceil \frac{i}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+1+1}{3} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{i}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{3} \right\rceil \end{aligned}$$

2. Untuk $i \equiv 1(\mathrm{mod}\, 3n)$ dan $i \equiv 2n+1(\mathrm{mod}\, 3n)$

$$\begin{aligned} wt(v_i) &= \lambda(v_i) + \lambda(e_i) + \lambda(e_{i+1}) \\ &= \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+1+1}{3} \right\rceil \\ &= 2\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{3} \right\rceil \end{aligned}$$

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 4, No. 1, Januari 2018
ISSN 2460-4542

3. Untuk $i \equiv n(\bmod 3n)$

$$\begin{aligned} wt(v_i) &= \lambda(v_i) + \lambda(e_{i-1}) + \lambda(e_i) \\ &= \left\lceil \frac{i+2}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i-1+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{i+2}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil \end{aligned}$$

4. Untuk $i \equiv 2n(\bmod 3n)$ dan $i = 0(\bmod 3n)$

$$\begin{aligned} wt(v_i) &= \lambda(v_i) + \lambda(e_{i-1}) + \lambda(e_i) \\ &= \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i-1+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil \\ &= 2\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i}{3} \right\rceil \end{aligned}$$

5. Untuk i lainnya

$$\begin{aligned} wt(v_i) &= \lambda(v_i) + \lambda(e_{i-1}) + \lambda(e_{i+1}) \\ &= \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i-1+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+1+1}{3} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{3} \right\rceil \end{aligned}$$

Adapun rumus umum untuk bobot titik dari graf mC_n, untuk $m \geq 1$ dan $n \equiv 2(\bmod 3)$ sebagai berikut:

$$wt(v_i) = \begin{cases} 2\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{3} \right\rceil & \text{untuk } i \equiv 1(\bmod 3n) \text{ dan } i \equiv 2n+1(\bmod 3n), \\ 2\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i}{3} \right\rceil & \text{untuk } i \equiv 2n(\bmod 3n) \text{ dan } i \equiv 0(\bmod 3n), \\ \left\lceil \frac{i}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{3} \right\rceil & \text{untuk } i \text{ lainnya.} \end{cases}$$

Bobot titik dari graf mC_n dimana $m \geq 1$ dan $n \equiv 2(\bmod 3)$ adalah bilangan bulat positif berurutan yaitu $i+2$, dengan $i = 1,2,3,\ldots nm$, atau dengan kata lain bobot titik dari graf mC_n adalah bilangan bulat positif berurutan mulai dari 3 sampai dengan $nm+2$, sehingga bobot setiap titiknya berbeda semua. Jadi nilai $tvs(mC_n) \leq \left\lceil \frac{nm+2}{3} \right\rceil$.

Oleh karena itu $tvs(mC_n) \geq \left\lceil \frac{nm+2}{3} \right\rceil$ dan $tvs(mC_n) \leq \left\lceil \frac{nm+2}{3} \right\rceil$ terbukti $tvs(mC_n) = \left\lceil \frac{nm+2}{3} \right\rceil$.

Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan tentang nilai total ketakteraturan titik dari $m-copy$ graf lingkaran, dapat disimpulkan bahwa nilai total ketakteraturan titik dari $m-copy$ graf lingkaran adalah $tvs(mC_n)=\left\lceil \frac{nm+2}{3} \right\rceil$ untuk $m \geq 1$ dan $n \equiv 2(\mathrm{mod}\, 3)$.

Daftar Pustaka

[1] Ahmad, A., Awan, K.M., Javaid, I., dan Slamin. “Total Vertex Irregularity Strength of Wheel Related Graphs”. *Australasian Journal of Combinatorics*. Vol. 51 (2011) 147-156.

[2] Ahmad, A., Bača, M., dan Bashir, Y. “Total Vertex Irregularity Strength of Certain Classes of Unicyclic Graphs”. *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie.* Vol.57 (105) No. 2 (2014) 147-152.

[3] Ahmad, A., Bokhary, S.A.H., Hasni, R., dan Slamin. “Total Vertex Irregularity Strength of Ladder Related Graphs”. *Sci. Int(Lahore)* 26(1) (2014) 1-5.

[4] Bača, M., Jendrol J., Miller, M., dan Ryan, J. “On Irregular Total Labellings,” *Discrete Math*. Vol. 307 (2007) 1378-1388.

[5] Rajasingh, I., Rajan, B., dan Annamma,V. “On Total Vertex Irregularity Strength of Triangle Related Graphs”. *Annals of Pure and Applied Mathematics* Vol.1 No.2 (2012) 108-116.

[6] Rajasingh, I., Rajan, B., dan Annamma,V. “On The Total Vertex Irregularity Strengths of Cycle Related Graphs and H Graphs”. *International Journal of Computer Applications* 52 (19) (2012) 32-37.

[7] Munir, R. “ *Matematika Diskrit”.* Edisi Tiga, halaman 353. Informatika Bandung, Bandung. 2007.

[8] Nurdin, Salman, A.N.M., Gaos, N.N., Baskoro, E.T. “On the Total Vertex Irregular Strength of a Disjoint Union of t Copies of a Path”. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing* 71 (2009) 227-233.

[9] Nurdin, Baskoro, E.T., Salman, A.N.M., Gaos, N.N. “On Total Vertex Irregularity Strength of Trees”. *Discrete Math.* 233 (2010) 3043-3048.

[10] Siang, J.J. “*Matematika Diskrit dan Aplikasinya Pada Ilmu Komputer”*. Edisi Empat, halaman 217. Andi, Yogyakarta. 2009.