Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 4, No. 1, Januari 2018
ISSN 2460-4542

Determinan Matriks Tidak Bujur Sangkar Berbentuk Khusus $3 \times n$ Menggunakan Metode Radic

FitriAryani[1], Hanita[2]
[1,2] Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: khodijah_fitri@uin-suska.ac.id, nitahany75@gmail.com

ABSTRAK

Determinan suatu matriks hanya diperoleh apabila matriks tersebut bujur sangkar. Tetapi ternyata nilai determinan dari matriks tidak bujur sangkar juga dapat ditentukan. Makalah ini bertujuan mendapatkan bentuk umum determinan matriks tidak bujur sangkar berbentuk khusus dengan ukuran $3 \times n$ menggunakan metode Radic. Terdapat tiga langkah yang harus dilakukan. Pertama, menentukan determinan matriks dari ordo 3×4 sampai 3×11. Kedua, menduga bentuk umum determinan yang diperoleh dari pola rekursifnya dan ketiga membuktikan bentuk umum determinan matriks menggunakan pembuktian langsung. Hasil yang diperoleh terdiri dari dua bentuk umum determinan matriks tidak bujur sangkar berbentuk khusus $3 \times n$ untuk n genap dan n ganjil. Juga akan dibahas aplikasi bentuk umum determinan matriks yang diperoleh.

Kata Kunci: *Determinan Radic, matriks tidak bujur sangkar, pola rekursif.*

ABSTRACT

Determinant of a matrix is obtained only when the matrix is square. However, the determinant value of the non-square matrix can also be determined. This paper aim to get the general form of determinant of non-square matrix with special form $3 \times n$ size using Radic method. There are three steps that must be done. First, determine the value of the determinant of a matrix for 3×4 size to 3×11 size. Second, suspect the general form of the determinant obtained from it's recursive pattern and the third step is proves a general form of determinant matrix using direct proof. The result obtained consist of two general forms of determinant of the $3 \times n$ non-square matrix with special form for n even and n odd. Also will be discussed application of general form determinant of matrix that already obtained.

Keywords: *Non-square matrix, radic's determinant, recursive pattern.*

Pendahuluan

Determinan matriks biasanya digunakan mencari invers dari suatu matriks, untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dan menentukan persamaan karakteristik suatu permasalahan dalam menentukan nilai eigen. Terdapat beberapa metode yang dapat digunakan untuk menentukan nilai determinan matriks, diantara metode tersebut adalah metode Sarrus, reduksi baris dan ekspansi kofaktor. Metode Sarrus digunakan untuk matriks ordo 2×2 dan 3×3. Sedangkan untuk ordo yang lebih besar, kita dapat menggunakan beberapa metode, diantara metode tersebut adalah metode reduksi baris dan metode ekspansi kofaktor.

Selama ini perhitungan determinan matriks hanya berlaku untuk matriks bujur sangkar. Permasalahan selanjutnya adalah bagaimana jika matriks tersebut adalah matriks tidak bujur sangkar, adakah metode yang dapat kita gunakan untuk mencari nilai determinannya? Ternyata nilai determinan dari matriks tidak bujur sangkar juga dapat ditentukan. Hal tersebut dapat dilihat pada penelitian Radic [4] dengan judul "*About a Determinant of Rectangular $2 \times n$ Matrix and its*

Geometric Interpretation", yang membahas tentang determinan Radic untuk matriks tidak bujur sangkar khusus untuk matriks ordo $2 \times n$.

Selanjutnya, penelitian Amiri [1] dengan judul *"Generalization of some Determinantal Identities for Non-Square Matrices Based on Radic's Definition"*, yang membahas tentang determinan Radic untuk matriks tidak bujur sangkar dan beserta sifat-sifat determinan untuk matriks tidak bujur sangkar tersebut. Dan juga penelitian Makarewicz [3] dengan judul *"Properties of the Determinant of a Rectangular Matrix"*, yang membahas tentang identitas baru untuk determinan Radic dari matriks tidak bujur sangkar.

Berdasarkan hasil-hasil penelitian yang sudah dipaparkan di atas, belum ditemukan rumus umum untuk menghitung nilai determinan dari matriks tidak bujur sangkar berbentuk khusus $3 \times n$. Dengan latar belakang itulah, penulis tertarik untuk meneliti tentang determinan dari suatu matriks berbentuk khusus $3 \times n$.

Metode dan Bahan Penelitian

Berikut diberikan langkah-langkah untuk mendapatkan bentuk umum determinan matriks tidak bujur sangkar berbentuk khusus $3 \times n$:

1. Diberikan matriks tidak bujur sangkar berbentuk khusus $3 \times n$
$$A_{3\times n} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \tag{1}$$
2. Menentukan determinan matriks tidak bujur sangkar berbentuk khusus dari ordo 3×4 sampai 3×11.
3. Menduga bentuk umum determinan matriks tidak bujur sangkar berbentuk khusus $3 \times n$ dari pola rekursifnya.
4. Membuktikan bentuk umum determinan matriks tidak bujur sangkar berbentuk khusus $3 \times n$ dengan menggunakan pembuktian langsung.
5. Mengaplikasikan rumus umum determinan matriks tidak bujur sangkar berbentuk khusus $3 \times n$.

Ada beberapa bahan yang digunakan dalam penelitian ini yaitu sebagai berikut:

Definisi 1 [2] Misalkan A adalah matriks bujur sangkar. *Fungsi determinan* **(***determinant function)* dinotasikan dengan *det* dan kita mendefinisikan $\det(A)$ sebagai jumlah dari semua hasil kali elementer bertanda dari A. Angka $\det(A)$ disebut *determinan dari A (determinant of* A).

Definisi 2 [1] Jika $A = (a_{i,j})$ adalah matriks $m \times n$ dengan $m < n$, maka determinan dari matriks A sebagai berikut:

$$\det(A) = \sum_{1\le j1<j2<\cdots<jm\le n} (-1)^{r+s} det \begin{bmatrix} a_{1j1} & a_{1j2} & \cdots & a_{1jm} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{ij1} & a_{ij2} & \cdots & a_{ijm} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{mj1} & a_{mj2} & \cdots & a_{mjm} \end{bmatrix}$$

Dengan $j_1, j_2, \ldots, j_m \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $r = 1 + 2 + \cdots + m$ dan $s = j_1 + j_2 + \cdots + j_m$. Jika $m > n$, maka $\det(A) = 0$.

Contoh 1.

Diketahui matriks tidak bujur sangkar dengan ukuran 3×4 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

maka

$$\det(A) = (-1)^{(1+2+3)+(1+2+3)} \begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(1+2+4)} \begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{(1+2+3)+(1+3+4)} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} (-1)^{(1+2+3)+(2+3+4)} \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & 5 \\ 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{matrix} \right) - \left(\begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & 5 \\ 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{matrix} \right)$$

$$+ \left(\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & 3 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{matrix} \right) - \left(\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 & 3 \\ 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{matrix} \right)$$

$$= \big((12 + 0 + 15) - (27 + 0 + 5)\big) - \big((0 + 15 + 0) - (0 + 20 + 0)\big)$$

$$+\big((0 + 9 + 0) - (0 + 4 + 0)\big) - \big((0 + 15 + 0) - (0 + 5 + 0)\big)$$

$$= (27 - 32) - (15 - 20) + (9 - 4) - (15 - 5) = -6$$

Hasil dan Pembahasan

Langkah pertama yang dilakukan dalam makalah ini adalah menentukan determinan matriks tidak bujur sangkar berbentuk khusus dari ordo 3×4 sampai 3×11 pada Persamaan (1) dengan menggunakan metode Radic pada Definisi (2), sehingga diperoleh:

$$\det(A_{3\times4}) = 0 \tag{2}$$
$$\det(A_{3\times5}) = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \tag{3}$$
$$\det(A_{3\times6}) = 0 \tag{4}$$
$$\det(A_{3\times7}) = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 \tag{5}$$
$$\det(A_{3\times8}) = 0 \tag{6}$$
$$\det(A_{3\times9}) = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 - a_8 \tag{7}$$
$$\det(A_{3\times10}) = 0 \tag{8}$$
$$\det(A_{3\times11}) = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 - a_8 + a_9 - a_{10} \tag{9}$$

Dengan melihat kembali Persamaaan (2) sampai (9), maka bentuk umum determinan matriks tidak bujur sangkar berbentuk khusus $3 \times n$ mempunyai dua bentuk umum, yaitu untuk n genap dan n ganjil. Dengan melihat Persamaan (2), (4), (6), dan (8), maka diduga Persamaan umum $|A_{3\times n}|$ untuk n genap sebagai berikut:

$$|A_{3\times n}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (10)$$

dan dengan melihat Persamaan (3), (5), (7), dan (9), maka diduga Persamaan umum $|A_{3\times n}|$ untuk n ganjil sebagai berikut:

$$|A_{3\times n}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_i \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}a_i \qquad (11)$$

Selanjutnya, bentuk umum $|A_{3\times n}|$ dari Persamaan (10) dan (11) dinyatakan dalam teorema sebagai berikut:

Teorema 1. Diberikan matriks tidak bujur sangkar berbentuk khusus $3 \times n$

$$A_{3\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_i \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, n > 3, a_i \in R, \forall\, i = 1,2,\cdots,n-1,$$

maka

$$|A_{3\times n}| = \begin{cases} 0 & \text{, untuk } n \text{ genap} \\ \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}a_i & \text{, untuk } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

Bukti. Pembuktian untuk n genap menggunakan pembuktian langsung maka diperoleh

$$A_{3\times n} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{(1+2+3)+(1+2+3)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(1+2+4)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$(-1)^{(1+2+3)+(1+2+(n-2))} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_{n-3} \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{(1+2+3)+(1+2+(n-1))} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_{n-2} \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(1+2+n)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_{n-1} \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$\cdots + (-1)^{(1+2+3)+(1+(n-2)+(n-1))} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-3} & a_{n-2} \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{(1+2+3)+(1+(n-2)+n)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-3} & a_{n-1} \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{(1+2+3)+(1+(n-1)+n)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$(-1)^{(1+2+3)+((n-2)+(n-1)+n)} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a_1 - a_1 + a_1 - \cdots - a_1 + a_1 - a_1) + (-a_2 + a_2 - a_2 + \cdots + a_2 - a_2 + a_2) + \cdots$$
$$+(a_{n-3} - a_{n-3} + a_{n-3} - \cdots - a_{n-3} + a_{n-3} - a_{n-3}) + (-a_{n-2} + a_{n-2} - a_{n-2} +$$
$$\cdots + an-2-an-2+an-2+(an-1-an-1+an-1- \cdots -an-1+an-1-an-1)$$
$$= 0 \qquad \blacksquare$$

Selanjutnya pembuktian untuk n ganjil sebagai berikut:

$$A_{3\times n} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{(1+2+3)+(1+2+3)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(1+2+4)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+(-1)^{(1+2+3)+(1+2+(n-2))} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_{n-3} \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(1+2+(n-1))} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_{n-2} \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{(1+2+3)+(1+2+n)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_{n-1} \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+(-1)^{(1+2+3)+(1+(n-2)+(n-1))} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-3} & a_{n-2} \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{(1+2+3)+(1+(n-2)+n)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-3} & a_{n-1} \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(-1)^{(1+2+3)+(1+(n-1)+n)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+(-1)^{(1+2+3)+((n-2)+(n-1)+n)} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a_1 - a_1 + a_1 - \cdots + a_1 - a_1 + a_1) + (-a_2 + a_2 - a_2 + \cdots - a_2 + a_2 - a_2) + \cdots$$
$$+(-a_{n-3} + a_{n-3} - a_{n-3} + \cdots - a_{n-3} + a_{n-3} - a_{n-3})$$
$$+ \cdots - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-1}) = a_1 - a_2 + \cdots - a_{n-3} + a_{n-2} - a_{n-1}$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} a_i \qquad \blacksquare$$

Selanjutnya, diberikan beberapa contoh matriks tidak bujur sangkar berbentuk khusus $3 \times n$ beserta penyelesaian dalam menentukan nilai determinan dari matriks tersebut sebagai berikut:

Contoh 2.

Diberikan matriks tidak bujur sangkar dengan ukuran 3×17 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 3 & 6 & 8 & 5 & -2 & 4 & 7 & 7 & 3 & 1 & 9 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

maka, dengan menggunakan Teorema 1 diperoleh:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} a_i$$

$$= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 - a_8 + a_9 - a_{10} + a_{11} - a_{12} + a_{13} - a_{14} + a_{15} - a_{16}$$

$$= 2 - 0 + 4 - 3 + 6 - 8 + 5 - (-2) + 4 - 7 + 7 - 3 + 1 - 9 + 3 - 1 = 3$$

Contoh 3.

Diberikan matriks tidak bujur sangkar dengan ukuran 3×19 sebagai berikut:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -2 & 4 & 7 & 1 & 0 & 5 & 6 & 7 & 3 & 8 & -2 & 1 & 0 & 9 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

maka, dengan menggunakan Teorema 1 diperoleh

$$\det(B) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} a_i$$

$$= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 - a_8 + a_9 - a_{10} + a_{11} - a_{12} + a_{13} - a_{14} + a_{15} - a_{16} + a_{17} - a_{18}$$

$$= 2 - 3 + (-2) - 4 + 7 - 1 + 0 - 5 + 6 - 7 + 3 - 8 + (-2) - 1 + 0 - 9 + 7 - 1$$

$$= -18.$$

Kesimpulan

Selama ini perhitungan determinan matriks hanya berlaku untuk matriks bujur sangkar. Tetapi ternyata, determinan matriks tidak bujur sangkar juga dapat ditentukan dengan menggunakan metode Radic. Pada makalah ini dibahas tentang perhitungan determinan matriks tidak bujur sangkar berbentuk khusus $3 \times n$. Berdasarkan pembahasan sebelumnya, dengan menggunakan matriks tidak bujur sangkar berbentuk khusus sebagai berikut:

$$A_{3\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_i \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, n > 3\,, a_i \in R, \forall\, i = 1,2,\cdots,n-1$$

maka diperoleh

$$|A_{3\times n}| = \begin{cases} 0 & , \text{untuk } n \text{ genap} \\ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} a_i & , \text{untuk } n \text{ ganjil} \end{cases}.$$

Saran

Makalah ini membahas tentang determinan matriks tidak bujur sangkar berukuran $3 \times n$ menggunakan metode Radic. Adapun matriks tidak bujur sangkar yang dibahas memiliki suatu bentuk khusus tertentu. Bagi pembaca yang tertarik dengan matriks tidak bujur sangkar ini, maka disarankan untuk membahas bentuk-bentuk khusus lainnya. Serta membahas aplikasi dari matriks tidak bujur sangkar ini.

Daftar Pustaka

[1] Amiri, A., Mahmood, F., and Morteza, B., Generalization of Some Determinantal Identities for Non-Square Matrices Based on Radic's Definition, *Journal Pure Application Mathematics*, 1 (2), 2010.

[2] Anton, H., dan Rorres, C,. *Dasar-Dasar Aljabar Linear Versi Aplikasi*. Edisi kedelapan, Erlangga, Jakarta, 2004.

[3] Makarewicz, A., and Dominik, S., Properties of the Determinant of a Rectangular Matrix, *Mathematics Subject Classification,* Vol. LXVIII, No. 1. 2014.

[4] Radic, M., About a Determinant of Rectangular $2 \times n$ Matrix and its Geometric Interpretation, *Beitrage zur Algebra und Geometrie Contributions to Algebra and Gometry*. Vol. 46. No. 1. 2005.