Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 4, No. 1, Januari 2018
ISSN 2460-4542

Metode Iterasi Tiga Langkah dengan Konvergensi Orde Enam untuk Menyelesaikan Persamaan Nonlinear

M. N. Muhaijir[1], Aljarizi[2]
[1, 2] Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: *nizam_ys86@yahoo.com*

ABSTRAK

Penelitian ini mengembangkan metode satu langkah Abbasbandy menjadi metode tiga langkah bebas turunan kedua. Turunan kedua pada metode diaproksimasi menggunakan deret Taylor dan turunan pertama diaproksimasi menggunakan interpolasi Lagrange dan interpolasi Hermite. Secara analitik, metode baru ini mempunyai konvergensi orde enam dengan melibatkan empat evaluasi fungsi sehingga indeks efisiensi $6^{\frac{1}{4}} \approx 1.5651$. Komputasi numerik yang dilakukan untuk beberapa fungsi menunjukkan metode yang diperoleh lebih unggul dibandingkan metode lain.

Kata Kunci: Metode Abbasbandy, deret Taylor, interpolasi Hermite, interpolasi Lagrange, orde konvergensi

ABSTRACT

This research developed the Abbasbandy one-step method being three-step method the second derivative free. The second derivative on the method is approximated using Taylor series and first derivative approximated using Langrange interpolation and Hermite interpolation. Analytically, this new method has six-order convergence with four evaluations function, so that index efficiency $6^{\frac{1}{4}} \approx 1.5651$. *Numerical computations performed for some functions show that the methods obtained are superior to other methods*.

Keywords: *Abbasbandy method, Taylor series, Hermite interpolation, Lagrange interpolation, order of convergence*

Pendahuluan

Banyak masalah dalam aplikasi matematika dan bidang teknik yang dapat dimodelkan dalam model matematika yang berbentuk persamaan nonlinear $f(x)=0$ dan seringkali hanya dapat diselesaikan dengan metode iterasi. Penelitian ini membahas metode iterasi untuk menemukan akar sederhana untuk $f(x)=0$ dan $f'(x)\neq 0$. Banyak metode iterasi yang dapat digunakan untuk menemukan akar sederhana tersebut, seperti metode Newton dan variannya [7–11,15,23], metode Secant [14], metode Halley [2, 13], dan metode Chebyshev [3, 6, 17]. Diantara metode-metode ini, metode Newton merupakan metode klasik yang sangat populer dengan bentuk iterasi diberikan oleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \text{ dan } f'(x) \neq 0, \tag{1}$$

dengan x_0 adalah aproksimasi awal yang cukup dekat ke akar sebenarnya α. Metode Newton memiliki orde konvergensi dua [10].

Banyak peneliti mengembangkan metode iterasi dengan memodifikasi metode-metode iterasi yang sudah ada. Modifikasi ini bertujuan untuk mendapatkan metode dengan orde konvergensi yang lebih tinggi dan metode mempunyai jumlah evaluasi fungsi yang lebih sedikit, sehingga memiliki indeks efisiensi yang lebih besar. Salah satu cara untuk menaikkan orde konvergensi dari sebuah metode iterasi adalah dengan penambahan langkah. Beberapa modifikasi metode iterasi dengan penambahan langkah dapat dilihat pada [4, 17–21]. Pada artikel ini, penulis menkontruksi metode iterasi baru yang merupakan pengembangan dari metode Abbasbandy. Metode iterasi

Abbasbandy merupakan metode iterasi yang diperoleh dari pengembangan metode dekomposisi Adomian dengan bentuk iterasi diberikan oleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f(x_n)^2 f''(x_n)}{2(f'(x_n))^3} - \frac{(f(x_n))^3 (f''(x_n))^2}{2(f'(x_n))^5}, \tag{2}$$

dengan orde konvergensi tiga [1]. Penelitian ini menemukan metode iterasi tiga langkah dengan mengkombinasikan persamaan (1) sebagai langkah pertama dan ketiga dan persamaan (2) sebagai langkah ke dua serta menghindari beberapa turunan yang muncul pad metode yang dikemukakan. Selanjutnya, orde konvergensi metode iterasi yang diperoleh ditunjukkan secara analitik menggunakan deret Taylor. Terakhir, uji komputasi dilakukan pada metode iterasi baru untuk melihat orde konvergensi secara numerik serta untuk melihat keunggulan metode dengan beberapa metode yang digunakan sebagai pembanding.

Metode dan Bahan Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini merupakan studi literatur dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Mendefinisikan kembali deret Taylor orde dua yan melalui titik $(x_n, f'(x_n))$ dan $(y_n, f'(y_n))$ untuk mengaproksimasi $f(x)$ disekitar $x = y_n$.
2. Mendapatkan nilai $f''(x_n)$ melalui penyederhanaan proses yang dilakukan pada langkah 1. Selanjutnya, nilai yang diperoleh disubstitusikan ke metode Abbasbandy persamaan (2) sehingga diperoleh metode iterasi dua langkah bebas turunan kedua.
3. Metode iterasi yang diperoleh pada langkah kedua dijadikan metode iterasi tiga langkah dengan penambahan metode Newton pada langkah ketiga.
4. Selanjutnya, $f'(y_n)$ yang ada pada metode tersebut ditaksir mengggunakan interpolasi Hermite orde dua melalui titik-titik $(x_n, f'(x_n))$, $(y_n, f'(y_n))$, dan $(x_n, f'(x_n))$, sedangkan untuk $f'(z_n)$ ditaksir menggunakan interpolasi Lagrange orde dua melalui titik-titik $(x_n, f'(x_n))$ dan $(y_n, f'(y_n))$ sehingga diperoleh metode iterasi baru tiga langkah.
5. Menentukan orde konvergensi seacara analitik dan indeks efisiensi dari metode iterasi yang diperoleh serta melakukan simulasi numerik untuk beberapa persamaan yang digunakan menggunakan bantuan program Maple 13.

Selanjutnya, bagian ini juga memuat beberapa definisi dan teorema dasar yang dapat digunakan sebagai landasan matematis untuk uraian-uraian pada bagian selanjutnya yang disajikan berikut ini.

Definisi 1 (Orde Konvergensi) [5] Sebuah barisan iterasi $\{x_n \mid n \geq 0\}$ dikatakan konvergen dengan orde $p \geq 1$ ke α jika

$$|\alpha - x_{n+1}| \leq c|\alpha - x_n|^p, \quad n \geq 0,$$

untuk suatu konstanta $c > 0$. Jika $p = 1$, maka barisan disebut konvergen linear ke α.

Definisi 2 (*COC*) [23] Misalkan α adalah akar persamaan nonlinear $f(x)$, dan andaikan x_{n-1}, x_n, x_{n+1} adalah tiga iterasi berturut-turut yang cukup dekat ke akar α. Maka *computational order of convergence* (*COC*) dapat diaproksimasi menggunakan rumus

$$COC \approx \frac{\ln|(x_{n+1} - \alpha)/(x_n - \alpha)|}{\ln|(x_n - \alpha)/(x_{n-1}) - \alpha|}.$$

Definisi 3 (Indeks Efisiensi) [12] Misalkan q adalah banyak evaluasi fungsi yang dibutuhkan oleh suatu metode iterasi. Efisiensi dari metode tersebut dihitung dengan indeks efisiensi yang didefinisikan sebagai $p^{1/q}$, dengan p adalah orde konvergensi dari metode tersebut.

Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini, metode persamaan (2) dikembangkan menjadi metode iterasi tiga langkah dengan bentuk iterasi sebagai berikut:

$$\left.\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ z_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f(x_n)^2 f''(x_n)}{2(f'(x_n))^3} - \frac{(f(x_n))^3 (f''(x_n))^2}{2(f'(x_n))^5}, \\ x_{n+1} &= z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Fungsi turunan kedua $f''(x_n)$ pada persamaan (3) diaproksimasi menggunakan deret Taylor seperti yang dilakukan oleh Li *et al.* [16] dengan bentuk

$$f(y_n) \approx f(x_n) + (y_n - x_n) f'(x_n) + \frac{(y_n - x_n)^2}{2} f''(x_n). \tag{4}$$

Jika nilai pada persamaan (3) disubstitusikan ke persamaan (4), maka persamaan (4) dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$f''(x_n) \approx \frac{2 f(y_n)(f'(x_n))^2}{(f(x_n))^2}. \tag{5}$$

Selanjutnya, pertimbangkan interpolasi Lagrange melalui titik-titik $(x_n, f'(x_n))$ dan $(y_n, f'(y_n))$, sehingga diperoleh bentuk

$$f(x) \approx \frac{x - x_n}{y_n - x_n} f'(y_n) + \frac{x - y_n}{x_n - y_n} f'(x_n). \tag{6}$$

Berdasarka persamaan (7), Jika $x = z_n$ maka diperoleh

$$f'(z_n) \approx \frac{2(f(y_n))^2 f'(x_n) + f(y_n) f'(x_n) f(x_n) - 2 f'(y_n)(f(y_n))^2 - f'(y_n) f(y_n) f(x_n) - f(y_n)(f(x_n))^2}{(f(x_n))^2}. \tag{7}$$

Kemudian, $f'(y_n)$ pada persamaan (7) diaproksimasi dengan mempertimbangkan interpolasi Hermite orde dua yang titik-titik $(x_n, f'(x_n))$, $(y_n, f'(y_n))$, dan $(x_n, f'(x_n))$, sehingga diperoleh bentuk

$$f'(y_n) \approx 2\left(\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}\right) - f'(x_n). \tag{8}$$

Jika persamaan (8) disubstitusikan ke persamaan (7), maka diperoleh

$$f'(z_n) \approx \frac{(f(x_n))^3 - 2(f(x_n))^2 f(y_n) - 2 f(x_n)(f(y_n))^2 - 4(f(y_n))^3}{(f(x_n))^2}. \tag{9}$$

Selanjutnya, persamaan (5) dan persamaan (9) disubstitusikan ke persamaan (3) diperoleh

$$\left.\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ z_n &= y_n - \left(1 + \frac{2f(y_n)}{f(x_n)}\right)\frac{f(y_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= z_n - \frac{f(z_n)(f(x_n))^2}{(f(x_n))^3 - 2(f(x_n))^2 f(y_n) - 2f(x_n)(f(y_n))^2 - 4(f(y_n))^3}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Persamaan (10) merupakan metode iterasi baru tiga langkah yang merupakan pengembangan dari metode Abbasandy [1]. Berikut ini ditunjukkan orde konvergensi metode iterasi persamaan (10) yang disajikan pada Teorema 4.

Teorema 4 (Kekonvergenan Metode Iterasi) Misalkan $f : I \subset R \to R$ fungsi yang mempunyai turunan pada interval terbuka D. Selanjutnya asumsikan bahwa α adalah akar sederhana dari persamaan $f(x) = 0$. Misalkan diberikan tebakan awal x_0 cukup dekat ke α, maka metode iterasi persamaan (10) mempunyai orde konvergensi enam dan memenuhi persamaan *error*:

$$e_{n+1} = \left(c_2 c_3^2 - 5c_2^3 c_3\right)e_n^6 + O(e_n^7),$$

dengan $c_j = \dfrac{f^{(j)}(\alpha)}{j!\, f'(\alpha)}$, $j \geq 1$ dan $e_n = x_n - \alpha$.

Bukti. Untuk menganalisis konvergensi persamaan (10), Misalkan α adalah akar sederhana dari persamaan $f(x) = 0$ dan e_n adalah *error* pada iterasi ke-*n*, maka $e_n = x_n - \alpha$ dan $f(\alpha) = 0$. Dengan menggunankan ekspansi Taylor untuk $f(x_n)$ di sekitar $x_n = \alpha$ dan mengabaikan suku yang memuat $(x_n - \alpha)^j$, dengan $j \geq 7$ diperoleh

$$f(x_n) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{1}{2} f''(\alpha)(x_n - \alpha)^2 + \cdots + O((x_n - \alpha)^7). \tag{11}$$

Oleh karena $c_j = \dfrac{f^{(j)}(\alpha)}{j!\, f'(\alpha)}$ dengan $j = 1, 2, \ldots, 8$ dan $e_n = x_n - \alpha$, sehingga setelah penyederhanaan persamaan (11) dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$f(x_n) = f'(\alpha)(e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + \cdots + O(e_n^7), \tag{12}$$

dan

$$f'(x_n) = f'(\alpha)(1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + \cdots + O(e_n^6). \tag{13}$$

Persamaan (12) dibagi oleh persamaan (13) diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - c_2 e_n^2 + \left(2c_2^2 - 2c_3\right)e_n^3 + \cdots + O(e_n^7). \tag{14}$$

Persamaan (14) disubstitusikan ke langkah pertama persamaan (10), setelah disederhanakan diperoleh

$$y_n = \alpha + c_2 e_n^2 + \left(2c_2^2 - 2c_3\right)e_n^3 + \cdots + O(e_n^7). \tag{15}$$

Kemudian, $f(y_n)$ diperoleh menggunakan ekspansi deret Taylor di sekitar $y_n = \alpha$ dan setelah disederhanakan menjadi

$$f(y_n) = f'(\alpha)\left(c_2 e_n^2 + (2c_3 - 2c_2^2)e_n^3 + \cdots + O(e_n^7)\right). \tag{16}$$

Berdasarkan persamaan (12), (13), dan (16) diperoleh

$$\frac{2f(y_n)}{f(x_n)} = f'(\alpha)\left(2c_2 e_n + \left(4c_3 - 6c_2^2\right)e_n^2 + \cdots + O(e_n^7)\right), \tag{17}$$

dan

$$\frac{f(y_n)}{f'(x_n)} = f'(\alpha)\left(c_2 e_n^2 + \left(2c_3 - 4c_2^2\right)e_n^3 + \cdots + O(e_n^7)\right). \tag{18}$$

Selanjutnya, persamaan (17) dan (18) disubstitusikan ke langkah kedua persamaan (10) menghasilkan

$$z_n = \alpha + \left(5c_2^3 - c_2 c_3\right)e_n^4 + \cdots + O(e_n^7). \tag{19}$$

Untuk $f(z_n)$ dapat diperoleh menggunakan ekspansi deret Taylor di sekitar $z_n = \alpha$ dan setelah disederhanakan diperoleh

$$f(z_n) = f'(\alpha)\left(\left(5c_2^3 - c_2 c_3\right)e_n^4 + \cdots + O(e_n^7)\right). \tag{20}$$

Berdasarkan persamaan (12), (16), dan (20) diperoleh

$$f(z_n)(f(x_n))^2 = (f'(\alpha))^3\left(\left(5c_2^3 - c_2 c_3\right)e_n^6 + O(e_n^7)\right), \tag{21}$$

dan

$$(f(x_n))^3 - 2(f(x_n))^2 f(y_n) - 2f(x_n)(f(y_n))^2 - 4(f(y_n))^3 = (f'(\alpha))^3\left(e_n^3 + c_2 e_n^4 + \cdots + O(e_n^7)\right). \tag{22}$$

Jika persamaan (21) dibagi oleh persamaan (22), maka diperoleh

$$\frac{f(z_n)(f(x_n))^2}{(f(x_n))^3 - 2(f(x_n))^2 f(y_n) - 2f(x_n)(f(y_n))^2 - 4(f(y_n))^3} = \left(5c_2^5 - c_2 c_3\right)e_n^4 + \cdots + O(e_n^9). \tag{23}$$

Kemudian, persamaan (13) disubstitusikan ke langkah ketiga persamaan (10) dan setelah disederhanakan diperoleh

$$x_{n+1} = \alpha + \left(c_2 c_3^2 - 5c_2^3 c_3\right)e_n^6 + O(e_n^7). \tag{24}$$

Oleh karena $e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha$, berdasarkan persamaan (24) diperoleh

$$e_{n+1} = \left(c_2 c_3^2 - 5c_2^3 c_3\right)e_n^6 + O(e_n^7). \tag{25}$$

Berdasarkan Definisi 1 dan persamaan (25) dapat dilihat bahwa orde konvergensi orde enam, sehingga Teorema 4 terbukti. ■

Selanjutnya, dilakukan simulasi numerik untuk membandingkan banyak iterasi berbagai metode, seperti metode Newton (MN), metode Abbasbandy (MA) [1], metode Rafiullah-Haleem (MRH) [22], metode Arif-Muhaijir (MAM) [4], dan metode pada persamaan (10) (MMA) dalam menemukan akar persamaan nonlinear $f(x) = 0$. Simulasi dilakukan menggunakan program Maple 13 dengan kriteria pemberhentian program jika $|f(x_{n+1})| \le \varepsilon$ atau $|x_{n+1} - x_n| \le \varepsilon$, dan jumlah iterasi mencapai maksimum iterasi. Sedangkan toleransi yang digunakan adalah

$\varepsilon = 1.0 \times 10^{-100}$. Dalam melakukan perbandingan ini ada beberapa persamaan nonlinear yang digunakan yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
&f_1(x) = x^2 - e^x - 3x + 2, && \alpha \in (-0.5, 0.5),\\
&f_2(x) = \ln x + \sqrt{x} - 5, && \alpha \in (8.0, 8.5),\\
&f_3(x) = 5x^3 - xe^x - 1, && \alpha \in (0.6, 1.2),\\
&f_4(x) = (x^2 - 7)e^{-\frac{x}{3}}, && \alpha \in (2.5, 3.0),\\
&f_5(x) = (x-1)^3 - 1, && \alpha \in (1.5, 2.5).
\end{aligned}$$

Simulasi numerik untuk persamaan-persanaam nonlinear di atas dapat dilihat pada Tabel 1 – 5.

Tabel 1. Perbandingan Komputasi Beberapa Metode untuk Fungsi $f_1(x) = x^2 - e^x - 3x + 2$.

x_0	Metode	n	*COC*	$\lvert f(x_{n+1})\rvert$	$\lvert x_{n+1} - x_n\rvert$
-0.5	MN	7	2.0000	5.81580e-136	4.05821e-68
	MA	5	3.0000	2.16331e-212	4.64667e-71
	MRH	3	6.0000	6.35610e-173	5.61249e-29
	MAM	2	6.0000	2.64806e-195	1.71339e-32
	MMA	3	6.0000	1.40447e-184	8.96847e-31
0.5	MN	6	2.0000	2.49906e-109	8.41237e-55
	MA	5	3.0000	3.03483e-293	5.20172e-98
	MRH	3	6.0000	1.19185e-276	2.89286e-46
	MAM	3	6.0000	3.19875e-305	8.20727e-51
	MMA	3	6.0000	2.39148e-297	1.43850e-49

Tabel 2. Perbandingan Komputasi Beberapa Metode untuk Fungsi $f_2(x) = \ln x + \sqrt{x} - 5$.

x_0	Metode	n	*COC*	$\lvert f(x_{n+1})\rvert$	$\lvert x_{n+1} - x_n\rvert$
8.0	MN	6	2.0000	4.49705e-120	1.89978e-59
	MA	4	3.0000	1.07515e-142	4.93419e-47
	MRH	3	6.0000	2.67367e-371	2.16955e-61
	MAM	3	6.0000	1.01049e-367	8.30765e-61
	MMA	3	6.0000	1.31125e-372	1.34076e-61
8.5	MN	6	2.0000	5.85817e-134	2.16831e-66
	MA	4	3.0000	1.64120e-160	5.68127e-53
	MRH	3	6.0000	1.24747e-417	4.11645e-69
	MAM	3	6.0000	2.30443e-414	1.39900e-68
	MMA	3	6.0000	1.17266e-420	1.31603e-69

Tabel 3. Perbandingan Komputasi Beberapa Metode untuk Fungsi $f_3(x) = 5x^3 - xe^x - 1$.

x_0	Metode	n	*COC*	$\lvert f(x_{n+1})\rvert$	$\lvert x_{n+1} - x_n\rvert$
0.6	MN	9	2.0000	6.96507e-173	2.73947e-87
	MA	7	3.0000	7.06637e-291	1.26116e-97
	MRH	*	*	*	*
	MAM	4	6.0000	1.31784e-170	1.59797e-29
	MMA	4	6.0000	8.15980e-137	1.07053e-23
1.2	MN	8	2.0000	7.92659e-109	2.92245e-55
	MA	5	3.0000	6.45877e-153	1.22392e-51
	MRH	4	6.0000	9.83316e-496	1.40303e-83
	MAM	4	6.0000	1.81711e-356	1.68586e-60
	MMA	4	6.0000	3.53592e-602	2.94488e-101

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 4, No. 1, Januari 2018
ISSN 2460-4542

Tabel 4. Perbandingan Komputasi Beberapa Metode untuk Fungsi $f_4(x)=(x^2-7)e^{-\frac{x}{3}}$.

x_0	Metode	n	COC	$\lvert f(x_{n+1})\rvert$	$\lvert x_{n+1}-x_n\rvert$
2.5	MN	6	2.0000	1.10527e-107	5.91208e-54
	MA	4	3.0000	1.60684e-148	2.14440e-49
	MRH	3	3.0000	3.41904e-334	8.82585e-56
	MAM	3	6.0000	7.60421e-307	2.48817e-51
	MMA	3	6.0000	3.40164e-349	3.30174e-58
3.0	MN	7	2.0000	3.64426e-161	1.07352e-80
	MA	4	3.0000	1.28493e-125	9.23866e-42
	MRH	3	6.0000	5.19021e-239	6.44619e-40
	MAM	3	6.0000	4.48798e-210	3.34487e-35
	MMA	3	6.0000	2.90986e-267	1.49316e-44

Tabel 5. Perbandingan Komputasi Beberapa Metode untuk Fungsi $f_5(x)=(x-1)^3-1$.

x_0	Metode	n	COC	$\lvert f(x_{n+1})\rvert$	$\lvert x_{n+1}-x_n\rvert$
1.5	MN	10	2.0000	9.19365e-180	1.75059e-90
	MA	9	3.0000	1.98212e-168	1.25615e-56
	MRH	8	3.0000	1.16506e-192	7.31837e-33
	MAM	21	6.0000	5.54916e-212	3.20360e-36
	MMA	8	6.0000	5.56840e-203	1.51166e-34
2.5	MN	8	2.0000	8.43306e-112	1.67661e-56
	MA	5	3.0000	8.98123e-152	4.47829e-51
	MRH	4	6.0000	1.45495e-521	1.11472e-87
	MAM	4	6.0000	1.13684e-368	2.45971e-62
	MMA	4	6.0000	3.22049e-551	1.37981e-92

Tabel $1-5$, untuk kolom pertama menunjukkan variasi nilai awal, kolom kedua merupakan metode yang dibandingkan, kolom ketiga menunjukkan jumlah iterasi, kolom keempat merupakan orde konvergensi secara numerik, kolom kelima menunjukkan nilai fungsi yang dihasilkan, dan kolom enam menunjukkan selisih iterasi terakhir dengan iterasi sebelumnya. Tanda * yang terdapat pada Tabel $1-5$ menunjukkan bahwa metode tidak dapat menemukan akar yang ditetapkan dan konvergen ke akar yang lain.

Pada Tabel $1-5$ dapat dilihat bahwa metode yang mempunyai orde konvergensi yang sama, yaitu MRH, MAM, dan MMA memberikan jumlah iterasi yang hampir sama untuk semua fungsi yang dibandingkan. Selanjutnya, Tabel $1-5$ menunjukkan bahwa jika dilihat dari nilai fungsi yang dihasilkan sebagai salah satu kriteria pemberhentian iterasi, MMA secara keseluruhan memiliki nilai fungsi yang lebih kecil dibandingkan dengan empat metode lainnya. Pada Tabel $1-5$ juga menunjukkan bahwa nilai *COC* untuk MMA konvergen menuju enam. Dengan demikian, secara numerik juga dapat ditunjukkan bahwa MMA memiliki orde konvergensi enam.

Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan diperoleh bahwa metode iterasi baru yang dikembangkan memiliki orde konvergensi enam dengan melibatkan empat evaluasi fungsi yaitu $f(x_n), f'(x_n), f(y_n)$ dan $f(z_n)$ pada setiap iterasinya. Dengan demikian, metode baru ini memiliki indeks efisiensi $6^{\frac{1}{4}}\approx 1.5651$. Simulasi numerik menunjukkan bahwa untuk beberapa fungsi yang digunakan, MMA memiliki nilai fungsi yang lebih kecil dibandingkan metode lain yang dibandingkan, seperti MN, MA, MRH, dan MAM.

Daftar Pustaka

[1] Abbasbandy, S., Improving Newton-Raphson Method for Solving Nonlinear Equations by Modified Adomian Decomposition Method, *Applied Mathematics and Computation*, 145, 2003, 887–893.

[2] Alefald, C., The Convergence of Halley's Method, *The American Mathematical Monthly*, 88, 1993, 530–536.

[3] Amat, S., Busquier, S., Guiteres, J. M., and Hernandes, M. A., On the Global Convergence of Chebyshev's Iterative Method, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 220, 2008, 17–21.

[4] Arif, M., Muhaijir, M. N., Metode Iterasi Tiga Langkah dengan Orde Konvergensi Enam untuk Menyelesaikan Persamaan Nonlinear, *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, 2 (2), 2016, 74–80.

[5] Atkinson, K. E., *An Introduction to Numerical Analysis, Second Edition*, John Wiley & Son, Inc., New York, 1989, Hal. 56.

[6] Candela, V. and Marquina, A., Recuran Relations for Rational Cubic Method, *Computing*, 45 1990, 355–367.

[7] Chun, C., A Simply Constructed Third-Order Modifications of Newton's Method, *Journal of Computational and Applied Mathematics,* 219, 2008, 81–89.

[8] Chun, C. and Ham, Y. M., Some Fourth Modifications of Newton's Method, *Applied Mathematics and Computation,* 197, 2008, 654–658.

[9] Chun, C. and Neta, B., Certain Improvement of Newton's Method with Fourth Order Convergence, *Applied Mathematics and Computation*, 215, 2009, 821–823.

[10] Dukkipati, R. V., *Numerical Method*, New Age International (p) Limited, New Delhi, 2010, Hal. 83.

[11] Frontini, M. and Sormani, E., Some Variants of Newton's Methods with Third-Order Convergence, *Applied Mathematics Computation*, 140, 2003, 419–426.

[12] Gautschi, W., *Numerical Analysis, Second Edition*, Birkhauser, New York, 2012, Hal. 261.

[13] Halley, E., A New Exact and Easy Method for Finding the Root of Any Equations Generally, Without any Previous Reduction, *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, 18, 1694, 136–148.

[14] Kanwar, V., Sharma, J. R., and Mamta, R. K., A New Family of Secant-Like Method with Super-Linear Convergence, *Applied Mathematics Computation*, 171, 2005, 104–107.

[15] Kou, J., Yitian, L., and Xiuhua, W., Third-Order Modification of Newton's Method, *Journal Computational and Applied Mathematics*, 205, 2007, 1–5.

[16] Li, Y., Zhang, P., and Li, Y., Some New Variant of Chebyshev-Halley Methods Free from Second Derivative, *International Journal of Nonlinear Equations Science*, 9 (2), 2010, 201 – 206.

[17] Muhaijir, M. N., Imran, M., and Gamal, M. D. H., Variants of Chebyshev's Method with Eight-Order Convergence for Solving Nonlinear Equations, *Applied and Computational Mathematics*, 5 (6), 2016, 247–251.

[18] Muhaijir, M. N. dan Djumadila, S. A., Penyelesaian Persamaan Nonlinear Menggunakan Metode Iterasi Tiga Langkah, *Seminar Nasional Teknologi Informasi, Komunikasi dan Industri 9*, 2017, 598–603.

[19] Muhaijir, M. N.dan Arif, M., Metode Iterasi Konvergensi Enam untuk Menyelesaikan Persamaan Nonliear, *Seminar Nasional Teknologi Informasi, Komunikasi dan Industri 9*, 2017, 635–641.

[20] Muhaijir, M. N., Imran, M., and Gamal, M. D. H., Variants of Chebyshev Method with Ninth-Order for Solving Nonlinear Equations, *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, 13 (10), 2017, 7331–7338.

[21] Muhaijir, M. N., Soleh, M., and Safitri, E., New Modification of Chebyshev's Method with Seventh-Order Convergence, *Applied Mathematical Sciences*, 11 (47), 2017, 2341–2350.

[22] Rafiullah, M. and Haleem, M., Three-Step Iterative Method with Six Order Convergence for Solving Nonlinear Equation, *International Journal of Mathematics Analysis*, 4 (50), 2010, 2459–2463.

[23] Weerakon, S. And Fernando, T. G. I., A Variant of Newton's Methods with Accelarated Third Order Convergence, *Applied Mathematics Letters*,13, 2000, 87–93.