Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 3, No. 2, Juli 2017
ISSN 1693-2390 print/ISSN 2407-0939 online

Modifikasi Metode Cauchy Tanpa Turunan Kedua dengan Orde Konvergensi Empat

Alamsyah, Wartono[1]
[1,2] Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: [1]wartono@uin-suska.ac.id

ABSTRAK

Metode Cauchy [4] merupakan salah satu metode iterasi dengan orde konvergensi tiga yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan nonlinear. Pada makalah ini, penulis memodifikasi metode Cauchy menggunakan ekspansi deret Taylor orde dua dan menghilangkan turunan kedua menggunakan penyetaraan dari metode Potra-Ptak [13] dan metode Chun-Kim[2] dengan satu parameter. Berdasarkan hasil penelitian diperoleh bahwa metode iterasi baru memiliki orde konvergensi empat untuk $\theta = 1$ dan melibatkan tiga evaluasi fungsi dengan indeks efisiensi sebesar 1,587401. Simulasi numerik dilakukan terhadap beberapa fungsi untuk menunjukkan performa metode iterasi baru.

Katakunci:Indeks efisiensi, metode Cauchy, metode Chun-Kim, metode Potra-Ptak, orde konvergensi

ABSTRACT

A Cauchy's method [4] is one of an iterative method with third order of convergence that used to solve a nonlinear equation. In this paper, the author modifies Cauchy's method using expansion of the second order Taylor series and reducesthe second derivative using equality of Potra-Ptak's [13]and Chun-Kim's[2] methods with one parameter. Based on the result of studied showed that thenew iterativemethod has fourth order of convergence for $\theta = 1$and involves three evaluation of functions with the efficiency index 1.587401. Numerical simulationwas presented for several functions to demonstrate the performance of the new iterative method.

Keywords: *Efficiency index, Cauchy's method, Chun-Kim's method, Potra-Ptak's method, order of convergence*

Pendahuluan

Persamaan nonlinear yang rumit dan kompleks sering muncul sebagai representasi matematis pada bidang sains, teknik dan rekayasa[16]. Persoalan muncul ketika menentukan penyelesaian persamaan nonlinear dalam bentuk

$$f(x) = 0. \tag{1}$$

Metode klasik yang sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan nonlinear (1) secara meluas adalah metode Newton yang ditulis

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \text{ dan } f'(x_n) \neq 0, \quad n = 0,1,2,\dots \tag{2}$$

Persamaan (2) merupakan metode iterasi satu langkah berorde konvergensi dua yang melibatkan dua evaluasi fungsi dengan indeks efisiensi sebesar $2^{1/2} \approx 1,4142$ [14].

Banyak peneliti dan ilmuwan telah mengembangkan metode Newton dengan tujuan meningkatkan indeks efisiensi. Oleh karena indeks efisiensi berbandinglurus kepada orde konvergensi dan berbanding terbalik dengan jumlah evaluasi fungsi, maka usaha untuk meningkatkan indeks efisiensi dilakukan dengan meningkatkan orde konvergensi atau mereduksi jumlah evaluasi fungsi yang digunakan.

Peningkatan orde konvergensi dapat dilakukan dengan berbagai cara. Salah satu teknik yang paling umum digunakan adalah menggunakan pemotongan deret Taylor orde dua, yang menghasilkan metode iterasi klasik dengan orde konvergensi tiga, yaitu metode Chebyshev, Halley dan Euler (Halley irasional).

Selain menggunakan pemotongan deret Taylor orde dua, beberapa pendekatangeometri juga digunakan untuk menghasilkan metode iterasi satu langkah dengan orde konvergensi tiga, misalnya kelengkungan kurva [2], fungsi parabolik [7, 9, 12, 14, 15], fungsi kuadratik [9] dan hiperbola [12, 15].

Metode iterasi yang dikontruksi dengan menggunakan pendekatan parabolik menghasilkan metode iterasi yang lebih dikenal dengan nama metode Euler [9, 12, 14], namun sebagian peneliti menyebutnya dengan nama metode iterasi Cauchy [16].

Metode Cauchy yang dikontruksi baik dari deret Taylor orde dua, fungsi kuadratik maupun parabolik ditulis dalam bentuk,

$$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{2}{1+\sqrt{1-2Lf}} \right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{3}$$

dengan

$$Lf = \frac{f''(x_n) f(x_n)}{f'(x_n)^2}. \tag{4}$$

Persamaan (3) memiliki orde konvergensi tiga dan evaluasi fungsi tiga [4], sehingga indeks efisiensi $\sqrt[3]{3} = 1{,}442$.

Makalah ini membahas modifikasi metode Cauchy yang diberikan pada pesamaan (3) dan mereduksi turunan keduanya menggunaan kesamaan metode iterasi Potra-Ptak [13] dan Chun-Kim [2].Selanjutnya, akan ditunjukkan orde konvergensi metode yang dikemukakan dan dilanjutkan dengan melakukan komputasi numerik untuk beberapa fungsi yang ditentukan.

Metode Iterasi yang Dikembangkan

Pada bagian ini, penulis menggunakan beberapa definisi penting yang akan dilibatkan pada proses mengkontruksi metode iterasi, menentukan orde konvergensi, baik menggunakan ekspansi deret Taylor maupun komputasi (COC) dan simulasi numerik. Adapun definisi yang digunakan adalah sebagai berikut:

Definisi 1. Misalkan $f(x)$ merupakan sebuah fungsi dengan akar persamaan α dan $\{x_n\}$ adalah sebuah barisan bilangan real untuk $n \geq 0$ yang konvergen ke α. Jika terdapat $c \neq 0$ dan $p \geq 1$ sedemikian hingga,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = c \tag{5}$$

maka p adalah orde konvergensi dari deret $\{x_n\}$, dan c adalah konstantagalat asimtotik(*asymptotic error constant*).Untuk $p = 1,\ 2,\ 3, \cdots$ maka deret konvergen linear, kuadratik, kubik dan seterusnya.

Definisi 2. Misalkan $e_n = x_n - \alpha$adalah galat pada iterasi ke–n, maka dapat didefinisikan:

$$e_{n+1} = ce_n^p + O(e_n^{p+1}) \tag{6}$$

sebagai persamaan kesalahan dari suatu metode iterasi, dengan p adalah orde konvergensi dan c adalah konstanta asimtotik.

Definisi 3. Misalkan r adalah jumlah dari evaluasi pada fungsi atau salah satu dari derivatifnya, maka efisiensi dari suatu metode diukur dengan indeks efisiensi yang didefinisikan oleh:

$$IE = p^{1/r} \tag{7}$$

Definisi 4. Misalkan α adalah akar persamaan fungsi $f(x)$ dan x_{n-1}, x_n dan x_{n+1} adalah akar-akar pendekatan pada iterasi ke $n-1$, n dan $n+1$ yang dekat dengan α, maka orde konvergensi komputasi dihitung menggunakan formulasi

$$\rho \approx \frac{\ln\left|(x_{n+1}-\alpha)/(x_n-\alpha)\right|}{\ln\left|(x_n-\alpha)/(x_{n-1}-\alpha)\right|} \tag{8}$$

Untuk menguraikan metode baru, penulis mulai dengan mendefinisikan kembali metode Cauchyyang diberikan pada Persamaan (3) dalam bentuk:

$$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{2}{1+\sqrt{1-\dfrac{2f''(x_n)f(x_n)}{f'(x_n)^2}}} \right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{9}$$

Bentuk akar pada ruas kanan Persamaan (9) diekspansi menggunakan deret Taylor orde dua, sehingga persamaan (9) dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{f''(x_n)f(x_n)}{2f'(x_n)^2} + \frac{f''(x_n)^2 f(x_n)^2}{2f'(x_n)^4}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{10}$$

Persamaan (10) merupakan modifikasi metode Cauchy dengan orde konvergensi tiga dan evaluasi fungsi tiga yang masih memuat turunan kedua.

Oleh karena itu, untuk menghindari penggunaan turunan kedua, maka $f''(x_n)$ ditaksir menggunakan penyetaraan dua metode iterasi berorde konvergensi tiga, yaitu metode Chun-Kim [2] dan Potra-Ptak [5].

Selanjutnya, pandang kembali metode Chun-Kim [2] dengan penambahan sebuah parameter riil θdan Potra-Ptak [5] masing-masing ditulis sebagai berikut

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\theta f(x_n)^2 f''(x_n) + 2f(x_n)f'(x_n)^2}{2f'(x_n)^3}, \tag{11}$$

dan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x) + f(y_n)}{f'(x_n)}, \tag{12}$$

dengan

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{13}$$

Berdasarkan Persamaan (11) dan (12), bentuk eksplisit $f''(x)$ dapat ditentukan dengan menggunakan penyetaraan kedua persamaan tersebut dan diperoleh

$$f''(x_n) = \frac{2f'(x_n)^2 f(y_n)}{\theta f(x_n)^2},\ \theta \neq 0. \tag{14}$$

Selanjutnya subtitusikan Persamaan (14) ke Persamaan (15), dan dengan menyederhanakan hasil substitusi, maka persamaan (10) dapat ditulis kembali menjadi

$$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{\theta^2 f(x_n)^2 + f(y_n)\theta f(x_n) + 2f(y_n)^2}{f(x_n)\theta f'(x_n)} \right),\ \theta \neq 0, \tag{15}$$

dengan y_n didefinisikan pada Persamaan (13).

Persamaan (15) merupakan hasil modifikasi dari metode Cauchy tanpa turunan kedua menggunakan ekspansi deret Taylor orde dua yang melibatkan tiga evaluasi fungsi yaitu$f(x_n)$, $f(y_n)$ dan$f'(x_n)$. Selanjutnya dicari orde konvergensi dari hasil modifikasi.

Hasil dan Pembahasan

a. Metode Iterasi

Sebuah metode dikatakan baik bila metode tersebut efektif. Keefektifan metode dilihat dari indeks effisiensinya dan semakin tinggi orde konvergensi, maka semakin baik pula metode tersebut dalam menghampiri akar-akar suatu persamaan. Suatu metode iterasi banyak langkah dikatakan efektif apabila memenuhi rumus 2^{n-1} [6] dengan n adalah banyaknya evaluasi fungsi. Untuk menentukan orde konvergensi dari Persamaan (15) dijelaskan oleh teorema sebagai berikut.

Teorema 1: Misalkan f:D $\subset$ R$\rightarrow$ R adalah fungsi bernilai real yang memiliki turunan pada interval terbuka Ddan mempunyai akar penyelesaian$\alpha\in D$. Jika diberikan nilai awal$x_0$cukup dekat denganα, metode iterasi pada Persamaan (15) untuk$\theta = 1$ memiliki orde konvergensi empat yang memenuhi persamaan galat:

$$e_{n+1} = (4c_2^2 - c_2c_3 + 5c_2^3)e_n^4 + O(e_n^5)$$

Bukti : Asumsikan α adalah akar dari$f(x)$ sehingga$f(\alpha) = 0$. Kemudian asumsikan$f'(\alpha) \neq 0$ dan$e_n = x_n - \alpha$ serta untuk$j = 2, 3, \ldots,$ dengan menggunakan ekspansi deret Taylor di sekitar α diperoleh

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!}(x-\alpha)^3 + \cdots.$$

Jika $x = x_n$, diperoleh

$$f(x_n) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x_n-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x_n-\alpha)^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!}(x_n-\alpha)^3 + \cdots.$$

Oleh karena $f(\alpha) = 0$ dan $x_n = \alpha + e_n$, diperoleh

$$f(x_n) = f'(\alpha)e_n + \frac{1}{2!}f''(\alpha)e_n^2 + \frac{1}{3!}f'''(\alpha)e_n^3 + O(e_n^4). \tag{16}$$

Dengan melakukan manipulasi aljabar pada Persamaan (16), maka diperoleh

$$f(x_n) = f'(\alpha)\left(e_n + \frac{1}{2!}\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}e_n^2 + \frac{1}{3!}\frac{f'''(\alpha)}{f'(\alpha)}e_n^3 + \frac{O(e_n^4)}{f'(\alpha)}\right),$$

atau

$$f(x_n) = f'(\alpha)(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)). \tag{17}$$

dengan

$$c_j = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j!\,f'(\alpha)} \tag{18}$$

Selanjutnya, dengan melakukan langkah yang sama, ekspansi deret Taylor untuk fungsi $f'(x)$ di sekitar α untuk $x = x_n$ diberikan oleh

$$f'(x_n) = f'(\alpha)(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)). \tag{19}$$

Jika Persamaan (17) dibagi dengan Persamaan (18) dan dengan menggunakan deret geometri, maka diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - c_2e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4)\,. \tag{20}$$

Selanjutnya, Persamaan (20) disubtitusikan ke Persamaan (13)

$$y_n = x_n - (e_n - c_2e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4)). \tag{21}$$

Oleh karena $x_n = e_n + \alpha$, Persamaan (21) menjadi

$$y_n = \alpha + c_2e_n^2 - (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4), \tag{22}$$

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 3, No. 2, Juli 2017
ISSN 1693-2390 print/ISSN 2407-0939 online

Ekspansi $f(y_n)$ dengan menggunakan deret Taylor di sekitar α, diberikan oleh

$$f(y_n) = f(\alpha) + (y_n - \alpha) f'(\alpha) + \frac{(y_n - \alpha)^2}{2!} f''(\alpha) + \frac{(y_n - \alpha)^3}{3!} f'''(\alpha) + \cdots. \tag{23}$$

Oleh karena $f(\alpha) = 0$ dan dengan menggunakan (18), maka Persamaan (23) dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$f(y_n) = f'(\alpha)[(y_n - \alpha) + c_2(y_n - \alpha)^2 + c_3(y_n - \alpha)^3 + \cdots]. \tag{24}$$

Substitusikan Persamaan (22) ke Persamaan (24) diperoleh

$$f(y_n) = f'(\alpha)(c_2 e_n^2 + (2c_2{}^2 - 2c_3)e_n^3 + (5c_2^3 - 7c_2c_3 + 3c_4)e_n^4 + O(e_n^5)). \tag{25}$$

Selanjutnya dengan menggunakan Persamaan (17), (19) dan (25), masing-masing diperoleh

$$f(x_n)\theta^2 f'(x_n) = f'(\alpha)^2(\theta^2 e_n + 3c_2\theta^2 e_n^2 + (4\theta^2 c_3 + 2\theta^2 c_2)e_n^3 + O(e_n^4)). \tag{26}$$

dan

$$\theta^2 f(x_n)^2 + f(x_n)\theta f(y_n) + 2f(y_n)^2 = f'(\alpha)^2(\theta^2 e_n^2 + (2\theta^2 c_2 + c_2\theta)e_n^3 + O(e_n^4)). \tag{27}$$

Dengan menggunakan Persamaan (26) dan (27), pembagian (27) oleh (26) memberikan

$$\begin{aligned}\frac{\theta^2 f(x_n)^2 + \theta f(x_n) f(y_n) + 2f(y_n)^2}{\theta^2 f(x_n) f'(x_n)} &= \frac{1}{\theta}(\theta - 1)c_2 e_n^2 + \left(\frac{2}{\theta}(\theta-1)c_3 - \frac{2}{\theta^2}(\theta-1)^2 c_2^2\right)e_n^3 \\ &+ \left(\frac{3}{\theta}(\theta-1)c_4 - \frac{1}{\theta^2}\left(7\theta^2 - 14\theta + 8\right)c_2c_3 - \frac{1}{\theta^2}(13\theta - 14)c_2^3 + 4c_2^2\right)e_n^4 + O(e_n^5).\end{aligned} \tag{28}$$

Selanjutnya, subtitusikan Persamaan (28) ke Persamaan (15), dan oleh karena $x_{n+1} = e_{n+1} + \alpha$, diperoleh

$$\begin{aligned}e_{n+1} &= \left(1 - \frac{1}{\theta}\right)c_2 e_n^2 + \left(\left(1 - \frac{1}{\theta}\right)2c_3 - \frac{2}{\theta^2}(\theta-1)^2 c_2^2\right)e_n^3 \\ &+ \frac{1}{\theta^2}\left(3\theta(\theta-1)c_4 - (13\theta - 14)c_2^3 - (7\theta^2 - 14\theta + 8)c_2c_3 + 4\theta^2 c_2^2\right)e_n^4 + O(e_n^5).\end{aligned} \tag{29}$$

Persamaan (29) memberikan informasi bahwa orde konvergensi persamaan (15) adalah empat untuk $\theta = 1$ dan $\theta \neq 0$. Oleh karena itu, dengan mesubsitusikan $\theta = 1$, maka Persamaan (29) dapat ditulis kembali menjadi

$$e_{n+1} = (4c_2^2 - c_2c_3 + 5c_2^3)e_n^4 + O(e_n^5). \quad \blacksquare \tag{30}$$

Berdasarkan Persamaan (30), metode iterasi pada Persamaan (21) memiliki orde konvergensi empat untuk $\theta = 1$. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa Teorema 1 terbukti.

b. Simulasi Numerik

Untuk menguji performas metode iterasi baru, maka dilakukan simulasi numerik terhadap beberapa fungsi real dengan menggunakan bahasa pemrograman Maple 13 dan 850 *floating aritmethics*. Pada Simulasi numerik, akan dihitung jumlah iterasi, orde konvergensi secara komputasi dan nilai galat mutlak dari metode baru (MMC4) yang diberikan pada Persamaan (15), dan kemudian dibandingkan dengan beberapa metode iterasi lainnya, seperti: metode Newton dengan orde konvergensi dua (MN) [14], metode Potra-Ptak dengan orde konvergensi tiga (MPP) [13], metode Chun-Kim dengan orde konvergensi tiga (MCK)[2], dan metode Chebyshev dengan orde konvergensi tiga (MC)[12, 15].

Perhitungan komputasi dilakukan dengan mengambil nilai tebakan awal (x_0) sedekat mungkin dengan akar-akar persamaan nonlinear (α) dan menggunakan delapan fungsi real. Akar-akar persamaan nonlinear ditampilkan dengan menggunakan 15 desimal. Adapunn fungsi-fungsi yang digunakan adalah sebagai berikut:

$f_1(x) = xe^{-x} - 0{,}1$ $\qquad$ $\alpha \approx 0{,}111832559158962$

$f_2(x) = e^x - 4x^2$ $\quad\alpha \approx$ 4,306584728220692

$f_3(x) = \cos(x) - x$ $\quad\alpha \approx$ 0,739085133215160

$f_4(x) = (x-1)^3 - 1$ $\quad\alpha =$ 2,000000000000000

$f_5(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ $\quad\alpha \approx$ 1,365230034140968

$f_6(x) = e^{-x^2+x+2} - \cos(x+1) + x^3 + 1$ $\quad\alpha = -$1,000000000000000

$f_7(x) = \sin^2(x) - x^2 + 1$ $\quad\alpha \approx$1,404491648215341

$f_8(x) = \sqrt{x} - x$ $\quad\alpha =$1,000000000000000

Perhitungan akar-akar pendekatan dari metode iterasi akan berhenti jika memenuhi kriteria berikut:

$$\left|x_{n+1} - x_n\right| < \varepsilon \tag{31}$$

dengan ε = 10^{-95}, sedangkan orde konvergensi secara komputasi (COC) dihitung menggunakan rumusan

$$\rho \approx \frac{\ln\left|(x_{n+2}-\alpha)/(x_{n+1}-\alpha)\right|}{\ln\left|(x_{n+1}-\alpha)/(x_n-\alpha)\right|},\ n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{32}$$

Berikut ini diberikan tabel perbandingan jumlah iterasi dan *COC* denganketelitian $\varepsilon = 10^{-95}$. Iterasi dihentikan jika memenuhi kriteria berhenti yaitu.

Tabel 1 Perbandingan Jumlah Iterasi dan *COC* dengan ε = 10^{-95}

$f(x)$	x_0	MN	MPP	MCK	MC3	MMC4
$f_1(x)$	-0,20	8 (2,0000)	5 (3,0000)	5 (3,0000)	5 (3,0000)	4 (3,9999)
	0,30	8 (2,0000)	5 (3,0000)	5 (3,0000)	5 (3,0000)	5 (4,0000)
$f_2(x)$	4,00	8 (2,0000)	6 (3,0000)	6 (3,0000)	5 (2,9999)	5 (4,0000)
	4,50	7 (2,0000)	5 (3,0000)	5 (2,9999)	5 (3,0000)	4 (4,0000)
$f_3(x)$	-0,10	8 (2,0000)	6 (3,0000)	6 (3,0000)	5 (3,0000)	5 (4,0000)
	1,50	7 (2,0000)	5 (3,0000)	5 (2,9999)	5 (3,0000)	4 (4,0000)
$f_4(x)$	1,80	8 (2,0000)	5 (3,0000)	5 (3,0000)	5 (3,0000)	5 (4,0000)
	3.00	9 (2,0000)	6 (3,0000)	6 (3,0000)	6 (3,0000)	5 (4,0000)
$f_5(x)$	1,00	8 (2,0000)	5 (3,0000)	5 (3,0000)	5 (3,0000)	4 (3,9999)
	2,00	8 (2,0000)	5 (3,0000)	5 (2,9999)	5 (3,0000)	4 (3,9999)
$f_6(x)$	-1,50	7 (2,0000)	5 (3,0000)	5 (3,0000)	5 (2,9999)	4 (4,0000)
	0,00	7 (2,0000)	5 (3,0000)	6 (3,0000)	6 (3,0000)	4 (4,0000)
$f_7(x)$	1,20	8 (2,0000)	5 (3,0000)	5 (3,0000)	5 (2,9999)	4 (3,9999)
	2,00	8 (2,0000)	5 (3,0000)	5 (2,9999)	5 (2,9999)	5 (4,0000)
$f_8(x)$	0,50	8 (2,0000)	6 (3,0000)	6 (3,0000)	5 (2,9999)	5 (4,0000)
	1,50	7 (2,0000)	5 (3,0000)	5 (3,0000)	5 (3,0000)	4 (4,0000)

Berdasarkan Tabel 1 dapat disimpulkan bahwa metode modifikasi Cauchy lebih baik dari empat metode lainnya, karena memiliki jumlah iterasi yang lebih sedikit. Selain itu, berdasarkan nilai *COC* dapat disimpulkan bahwa metode modifikasi Cauchy memiliki orde konvergensi empat.

Selanjutnya ditunjukkan perbandingan nilai $|x_n - \alpha|$ dari metode yang diteliti menggunakan total evaluasi fungsi (TNFE) sebesar 12 pada Tabel 2 dengan ε = 10^{-95}

Tabel 2 Perbandingan galat mutlak dari beberapa metode iterasidengan TNFE = 12

$f(x)$	x_0	MN	PP	MCK	MC	MMC $(\theta = 1)$
$f_1(x)$	-0,20 0,30	3,8845e-36 1,3518e-42	5,8682e-37 2,8728e-37	1,4394e-40 2,1598e-43	3,0911e-45 8,6156e-72	6,8262e-104 1,0233e-093
$f_2(x)$	4,00 4,50	1,2647e-34 8,0332e-54	1,0817e-24 7,2174e-58	4,6732e-31 9,7577e-62	1,9705e-64 1,3728e-76	1,1060e-055 2,3162e-167
$f_3(x)$	-0,10 1,50	1,1592e-37 2,2470e-64	2,8520e-22 3,9037e-72	8,4454e-18 5,6378e-50	8,9602e-76 8,0423e-55	6,8952e-052 5,3800e-188
$f_4(x)$	1,80 3.00	9,5534e-42 1,5483e-16	1,3154e-35 1,9400e-15	4,6354e-40 7,9903e-17	5,6264e-76 3,2927e-39	1,8049e-087 4,0947e-040
$f_5(x)$	1,00 2,00	2,4115e-44 7,4858e-39	1,8171e-39 2,4266e-40	1,8142e-42 3,7453e-42	1,3388e-84 2,0905e-64	1,8167e-099 1,3388e-113
$f_6(x)$	-1,50 0,00	9,5649e-67 3,2101e-66	2,7491e-73 2,8753e-68	1,2344e-51 1,8779e-20	9,5242e-36 8,2050e-23	1,3064e-193 2,8504e-157
$f_7(x)$	1,20 2,00	8,4046e-48 9,1131e-33	2,8049e-44 1,3933e-33	8,5934e-47 1,5763e-32	1,2768e-91 8,2907e-58	6,9400e-114 2,1738e-091
$f_8(x)$	0,50 1,50	3,0985e-43 2,1299e-66	1,1420e-31 2,6486e-74	2,5771e-12 1,0470e-62	8,8194e-49 6,8774e-71	3,5060e-068 2,0356e-204

Berdasarkan Tabel 2, terlihat bahwa metode modifikasi Cauchy memiliki nilai galat yang lebih kecil dari empat metode lainnya, sehingga dapat disimpulkan bahwa metode modifikasi Cauchy lebih baik dibandingkan empat metode lainnya.

Kesimpulan

Metode Cauchy merupakan metode yang berasal dari deret Taylor orde dua dengan orde konvergensi tiga dan evaluasi fungsi tiga. Metode Cauchy tersebut dimodifikasi menggunakan ekspansi deret taylor orde dua dan menghilangkan atau mereduksi turunan kedua menggunakan penyetaraan dua metode yang berbeda sehingga menghasilkan persamaan baru dengan bentuk:

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{33}$$

$$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{\theta^2 f(x_n)^2 + f(y_n)\theta f(x_n) + 2f(y_n)^2}{f(x_n)\theta f'(x_n)} \right), \ \theta \neq 0, \tag{34}$$

dengan orde konvergensi empat untuk $\theta = 1$ yang diberikan:

$$e_{n+1} = (-c_2 c_3 + 5c_2^3)e_n^4 + O(e_n^5). \tag{35}$$

Persamaan galat menunjukkan bahwa hasil modifikasi metode Cauchy dua langkah memiliki orde konvergensi empat dan evaluasi fungsi tiga, sehingga indeks efisiensinya sebesar $4^{1/3} \approx 1{,}5874$.

DaftarPustaka

[1] Chun, C., dan Ham, Y., Some fourth-order modification of Newton's method,*Applied Mathematics and Computation*, 197, 2008: 654-658.

[2] Chun, C., dan Kim, Y-II., Several new third order iterative methods for solving nonlinear equations, .*Acta Appl Math*., 109, 2010, 1053–1063.

[3] Frontini, M., Some variant Newton’s method with third-order convergence, *Applied Mathematics and Computations.* 140, 2003, 419–426.
[4] Grau, M dan M. Noguera, A variant of Cauchy's method with accelerated fifth-order convergence, *Applied Mathematics Letters*,17, 2004: 509-517.
[5] Kim, Y.,Chun, C dan Kim, W., Some third-order curvature based method for solving nonlinear equation,*Studies in Nonlinear Sciences*, 1(3), 2010: 72-76.
[6] Kung, H. T dan Traub, J. F., Optimal order of one-point and multi-point iteration,*Journal of the ACM.* 21(4), 1974: 643–651.
[7] Jiang, D dan Han, D., Some one-parameter families of third-order methods for solving nonlinear equations, *Applied Mathematics and Computation*, 195, 2008: 392 – 396.
[8] Kanwar, V and Tomar, S. K., Exponentially fitted variants of Newton’s method with quadratic and cubic convergence, *International Journal of Computer Mathematics*, 86(9), 2009: 1603 - 1611.
[9] Melman, A., Geometry and convergence of Euler’s and Halley’s methods, *SIAM Review*, 39(4), 1997: 728 – 735.
[10] Rostami. M dan Esmaeili, A Modification of Chebyshev-Halley’smethod free from second derivatives for nonlinear equations,*Caspian Journal of Mathematical Sciences*, 3(1), 2014: 133–140.
[11] Wartono, dkk., Chebyshev-Halley’s method without second derivative of eight-order convergence,*Global journal of pure and Applied Mathematics*, 12(4), 2016: 2987–2997.
[12] Sharma, J. R., A family of third-order methods to solve nonlinear equations by quadratic curves approximation, *Applied Mathematics and Computation*, 184, 2007: 210 – 215.
[13] Potra, F.A dan Ptak, V., Nondiscrete Introduction and iterative processes, *In Research Notes in Mathematics*: Pitman: Boston, 1984, 103.
[14] Traub, J.F., *Iterative Methods for the Solution of Equations*, Prentice Hall: Englewood Cliffs, 1964.
[15] Amat, S.dkk., Geometric construction of iterative functions to solve nonlinear equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 157, 2003: 197 – 205.
[16] Capra, S. C., dan Canale, R.P., *Numerical Methods for Engineers*, McGraw-Hill : New York, 2010.