Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 3, No. 2, Juli 2017
ISSN 1693-2390 print/ISSN 2407-0939 online

Model Linear Kuadratik untuk Sistem Deskriptor Berindeks Satu dengan *Factor Discount* dan *Output Feedback*

Nilwan Andiraja[1], Julia Sasmita Maiza[2]
[1,2] Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, 28293
Email: *nilwanandiraja@uin-suska.ac.id*, *juliasasmitamaiza@gmail.com*

ABSTRAK

Tugas akhir ini membahas persoalan kendali dengan persamaan linier kuadratik waktu berhingga untuk sistem deskriptor berindeks satu dengan penambahan *factor discount* dan*output feedback*,untuk kasus matriks dan skalar. Sistem kendali yang digunakan adalah lingkar tertutup. Berdasarkan persamaan diferensial dinamik dan fungsi tujuan yang diberikan *factor discount* dan persamaan *output feedback* maka dibentuk persamaan Hamiltonian. Selanjutnya dibentuk fungsi kendali yang bersesuaian dalam kasus matriks dan skalar. Kemudian untuk mendapatkan kestabilan model maka fungsi kendali yang didapat disubstitusikan kepersamaan dinamik yang sudah diberikan *factor discount* dan *output feedback*. Sehingga diperoleh kestabilan untuk kasus matriks dan scalar yaitu solusi persamaan diferensial dinamik akan memenuhi definisi kestabilan jika untuk waktu awal (t_0) menuju waktu akhir (T_f) maka solusinya menuju nol.

Katakunci: *Deskriptor, Discount, Feedback,Output*

ABSTRACT

This thesis discusses about issue of control linear quadratic equation with finite time to descriptor system indexed one with addition discount factor and output feedback, for the case matrix and scalar. Control system that used is a closed circumference. Based on dynamic differential equations and objective function given discount factor and the outputfeedback equation, then formed Hamiltonian equation. Furthermore formed corresponding control function in case of matrix and scalar.Then, to obtain the model of stability, the control function is obtained, substituted into dynamic equation that have been given discount factor and output feedback, in order to obtain stability to matrix and scalar case. Solution of differential equations dynamics would fulfill definition of stability if for initial time (t_0) *towards the end of time* (T_f), *then the solution is towards zero.*

Keywords: *Descriptors, Discount, Feedback, Output*

Pendahuluan

Teori kendali merupakan metode yang mudah diimplementasikan dalam masalah teknis. Salah satu bentuk persoalan teori kendali yang sering digunakan adalah bentuk linier kuadratik. Padapersoalan linear kuadratik masalah dasarnya adalah menentukan fungsi kendali dengan persamaan dinamiknya berbentuk linier dan fungsi tujuan berbentuk kuadratik.

Beberapa penelitian terdahulu telah membahas masalah menentukan fungsi kendali pada persoalan Linier kuadratik, di antaranya adalah Muhammad Wakhid Musthofa (2014) yang membahas mengenai persamaan diferensial dinamik deskriptor untuk satu kendali. Persamaan dinamik deskriptor dirubah kebentuk persamaan dinamik umum dan fungsi tujuan dirubah kebentuk kuadratik yang umum. Setelah itu berdasarkan fungsi dinamik dan fungsi tujuan yang dirubah, dibentuk fungsi Hamilton menggunakan aturan linear kuadratik umum, kemudian dibentuk persamaan *state*, *kostate* dan stationer. Selanjutnya dibentuk persamaan diferensial *Riccati*

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 3, No. 2, Juli 2017
ISSN 1693-2390 print/ISSN 2407-0939 online

yang bersesuaian dengan persoalan penelitiannya. Kemudian solusi dari persamaan diferensial *Riccati* tersebut dapat dibentuk fungsi kendali yang diinginkan. Tetapi Muhammad Wakhid Musthofa tidak menambahkan persamaan*output feedback* dan *factor discount* pada persamaan dinamik dan fungsi tujuannya.

Penelitian lain dilakukanoleh F. Amato, M. Ariola, dan C. Cosentino (2005) yang membahas mengenai kontrol linier waktu berhingga yang ditambah *disturbance* yang menggunakan persamaan *output* berbentuk linear. Tetapi Amato dkk dalam penelitiannya tidak menambahkan deskriptor dan tidak menambahkan*factor discount* serta *output feedback* pada persamaan dinamiknya. Kemudian penelitiannya tidak melakukan analisa kestabilan pada persamaan dinamiknya.

Bahan dan MetodePenelitian

1. Kestabilan

Definisi 1[7] Diberikan persamaan diferensial orde satu yaitu$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{f}(\mathbf{x})$dengan nilai awal$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$,sebuah vektor $\bar{\mathbf{x}}$ yang memenuhi$\boldsymbol{f}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$ disebut titik ekuilibrium.

Definisi 2 [7] (Olsder, 1994) Titik ekuilibrium $\bar{\mathbf{x}}$ dikatakan stabil jika$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ sehingga$\|\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}\| < \delta$maka $\|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) - \bar{\mathbf{x}}\| < \varepsilon$untuk semua$t \geq 0$. Titik ekuilibrium $\bar{\mathbf{x}}$dikatakan stabil asimtotik jika $\bar{\mathbf{x}}$ merupakan titik stabil dan$\exists \delta > 0$ sehingga $lim_{t\to\infty}\|\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0) - \bar{\boldsymbol{x}}\| = 0$ memenuhi$\|\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}\| < \delta$. Titik ekuilibrium $\bar{\mathbf{x}}$ dikatakan tidak stabil jika tidak memenuhi kriteria kestabilan.

2. Kendali Optimal Waktu Berhingga dengan Sistem Deskriptor

Didefinisikan Persamaan dinamik dengan deskriptor sebagai berikut:

$$E\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} \quad ,x(0) = x_0 \tag{1}$$

Dengan $E, A \in \mathbb{R}^{(n\times n)}, Rank(E) = n, B \in \mathbb{R}^{(n\times m)}$,$\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$adalah fungsi kendali yang diberikan pada Persamaan (3). Fungsi tujuan yaitu:

$$J = \boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} + \int_{t_0}^{Tf} [\boldsymbol{x}^t Q x + \boldsymbol{u}^T R\boldsymbol{u}]\, dt \tag{2}$$

Persamaan (1) dapat dirubah kebentuk umum menjadi persamaan kendali lingkar tertutup linier kuadratik dengan menggunakan teorema berikut:

Teorema 1 [3] Jika Persamaan deskriptor (1) berbentuk umum maka terdapat dua matrik nonsingular X dan Y sedemikian sehingga $Y^T EX = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}$ dan $Y^T AX = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$ dengan A_1 adalah matriks dalam bentuk Jordan yang elemen-elemennya nilai eigen dari A, $I_n$dan $I_r$adalah matriks identitas dan N adalah matriks nilpoten juga dalam bentuk Jordan.

3. Bentuk Discounted

Diketahui dari Persamaan (1) diberikan *factor discount* pada fungsi dinamik dengan satu kendali adalah sebagai berikut :

$$e^{-\theta}\dot{\boldsymbol{x}} = Ae^{-\theta t} + Be^{-\theta t}\boldsymbol{u} \tag{3}$$

didefinisikan $\tilde{x} = e^{-\theta t}xdan\tilde{\boldsymbol{u}} = e^{-\theta t}\boldsymbol{u}$maka dari $\tilde{x} = e^{-\theta t}x$ diperoleh :

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = -\theta e^{-\theta t}\boldsymbol{x} + e^{-\theta t}\dot{\boldsymbol{x}} \tag{4}$$

Sehinggadiperoleh fungsidinamikdengan*factor discount*sebagaiberikut:

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = Ae^{-\theta t} - \theta e^{-\theta t}\boldsymbol{x} + Be^{-\theta t}\boldsymbol{u}$$
$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = (A - \theta I)\tilde{\boldsymbol{x}} + B\tilde{\boldsymbol{u}} \tag{5}$$

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = A\tilde{\boldsymbol{u}} + B\tilde{\boldsymbol{u}} \tag{6}$$

danfungsi tujuan setelah pemberian *factor discount*diperoleh sebagai berikut

$$J(\boldsymbol{u}) = \int_{t_0}^{T_f} [\tilde{\boldsymbol{x}}^T, \tilde{\boldsymbol{u}}^T]\, Q \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{x}} \\ \tilde{\boldsymbol{u}} \end{bmatrix} dt \tag{7}$$

4. Linier Kuadratik dengan *Output Feedback*

Diberikan persamaan diferensial untuk sistem dinamik dan persamaan*output feedback*nya adalah sebagai berikut [4] :

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x} \tag{9}$$

Dimanadiketahui$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$adalah fungsi kendali, dan $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, maka di ketahui fungsi kendali memenuhi persamaan sebagai berikut :

$$\boldsymbol{u} = -K\boldsymbol{y} \tag{10}$$

$$\boldsymbol{u} = -KC\boldsymbol{x} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{u}^T = -\boldsymbol{x}^T C^T K^T$$

Denganfungsitujuannyaadalah sebagai berikut :

$$J = x^T P x + \int_{t_0}^{T_f} (\boldsymbol{x}^T Q \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^T R \boldsymbol{u}) dt \tag{12}$$

Dimanadiketahui K adalahsebuahmatriksberukuran $m \times p$.

Selanjutnya dari Persamaan (11) sehingga Persamaan (8) dapat dirubah menjadi persamaan sebagai berikut :

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (A - BKC)\boldsymbol{x} = A_c\boldsymbol{x} \tag{13}$$

danfungsi tujuan sebagai berikut:

(14)

Diasumsikan $J = 0$, sehinggadiperolehpersamaansebagaiberikut :

$$0 = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{x}^T P \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}^T (Q + C^T K^T RKC)\boldsymbol{x} \tag{15}$$

Sehingga,

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{x}^T P \boldsymbol{x}) = x^T (Q + C^T K^T RKC)\boldsymbol{x}$$

$$\dot{x}^T P\boldsymbol{x} + x^T P\dot{\boldsymbol{x}} = -x^T (Q + C^T K^T RKC)\boldsymbol{x}$$

$$A_c P + P A_c + C^T K^T RCK + Q \quad = 0 = g \tag{16}$$

DibentukpersamaanHamilton sebagai berikut :

$$H = (PX) + (gS) \tag{17}$$

Hasil dan Pembahasan

1. Sistem Deskriptor dengan *Factor Discount* dan *Output Feedback*

Diketahui dari Persamaan (1) diberikan *factor discount* sehingga menjadi:

$$E\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = (A - E\theta I)\tilde{\boldsymbol{x}} + B\tilde{\boldsymbol{u}} \tag{18}$$

Berdasarkan Teorema 1 [3], sehinggadiperolehpersamaandinamiksebagaiberikut:

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}_1 = (A_1 - Y_1 E\theta I)\tilde{\boldsymbol{x}} + Y_1 B\tilde{\boldsymbol{u}} \tag{19}$$

Dengandiperolehfungsikendaliyaitu:

$$\tilde{\boldsymbol{u}} = -KC\tilde{\boldsymbol{x}} \tag{20}$$

Makadidapatsistem dinamik untuk sistem deskriptor dengan *factor discount* dan *output feedback* sebagai berikut:

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}_1 = (A_1 - Y_1 E\theta I - Y_1 BKC)\tilde{\boldsymbol{x}}$$

$$\dot{\tilde{x}}_1 = A_c\tilde{x} \quad (21)$$

Kemudian fungsi tujuan diberikan *factor discount* yaitu:

$$J = \tilde{x}^T P\tilde{x} + \int_{t_0}^{T_f} (\tilde{x}^T (Q + C^T K^T RKC)\tilde{x})dt \quad (22)$$

Diasumsikan bahwa $J = 0$, sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$0 \;\; = \frac{d}{dt}(\tilde{x}^T P\tilde{x}) + \tilde{x}^T (Q + C^T K^T RKC)\tilde{x} \quad (23)$$

$$A_c^T P + \; PA_c + Q + C^T K^T RKC = g = 0 \quad (24)$$

Dibentuk persamaan Hamilton sebagai berikut :

$$H = PX + ({A_1}^T - {Y_1}^T E^T \theta I - {Y_1}^T B^T K^T C^T)PS + \; P(A_1 - Y_1 E\theta I - Y_1 BKC)S + QS + C^T K^T RKCS \quad (25)$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial S} = (({A_1}^T - {Y_1}^T E^T \theta I - {Y_1}^T B^T K^T C^T)P + \; P(A_1 - Y_1 E\theta I - Y_1 BKC) + Q + C^T K^T RK$$

C) (26)

$$0 = \frac{\partial H}{\partial P} = X + ({A_1}^T - {Y_1}^T E^T \theta I - {Y_1}^T B^T K^T C^T)^T S^T + (A_1 - Y_1 E\theta I - Y_1 BKC)S \quad (27)$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial K} = -C^T PSY_1{}^T B^T - B^T Y_1{}^T P^T SC^T + RKCSC^T \quad (28)$$

$$RKCSC^T = C^T PSY_1{}^T B^T + B^T Y_1{}^T P^T SC^T$$

$$K = (C^T PSY_1{}^T B^T + B^T Y_1{}^T P^T SC^T)(RCSC^T)^{-1} \quad (29)$$

Sehingga diperoleh fungsi kendali yang barusebagaiberikut:

$$\tilde{u} = -((C^T PSY_1{}^T B^T + B^T Y_1{}^T P^T SC^T)(RCSC^T)^{-1})C\tilde{x} \quad (30)$$

Selanjutnya untuk mendapatkan kestabilan model maka dari Persamaan (30) disubstitusikan ke Persamaan (19) sehingga diperoleh hasilnya sebagai berikut :

$$\dot{\tilde{x}}_1 = (A_1 - Y_1 E\theta I - Y_1 B((C^T PSY_1{}^T B^T + B^T Y_1{}^T P^T SC^T)(RCSC^T)^{-1})C)\tilde{x} \quad (31)$$

Solusi Persamaan (31) akan memenuhi definisi kestabilan jika untuk $t_0 \to T_f$ maka solusi Persamaan (31) menuju nol.

Contoh:

Diberikan fungsi dinamik descriptor dalam bentuk skalar sebagai berikut:

$$e_D \dot{x} = ax + bu$$

Dengan fungsi tujuan untuk waktu berhingga adalah sebagai berikut :

$$j = x^T px + \int_{t_0}^{T_f} [x^T qx + u^T ru]\, dt$$

Diberikan $e_D = 1, a = -5, b = 4, q = 1, c = 1, k_1 = 2, t_0 = 0, T_f = 2$, dan diberikan *factor discount* sebesar e^{-t} dan *output feedback* $y = cx$ dengan $u = -k_1 y$. Tentukan vector kendali dari persamaan dinamik tersebut dan analisa kestabilannya.

Penyelesaian:

Dengan mensubstitusikan, $e_D = 1, a = -5$ dan $b = 4$ ke persamaan dinamik makadiperoleh:

$$\dot{x} = -5x + 4u$$

Distubstitusikan $t_0 = 0, T_f = 2$ ke fungsi tujuan, maka diperoleh:

$$j = x^T px + \int_0^2 [x^T qx + u^T ru]\, dt$$

Kemudian persamaan dinamik $\dot{x} = -5x + 4u$ diberikan *factor discount*, sehingga menjadi:
$e^{-\theta t}\dot{x} = -5e^{-\theta t}x + 4e^{-\theta t}u$
Didefinisikan $\tilde{x} = e^{-\theta t}x$ dan $\tilde{u} = e^{-\theta t}u$ maka dari $\tilde{x} = e^{-\theta t}x$ diperoleh
$\dot{\tilde{x}} = -\theta e^{-\theta t}x + e^{-\theta t}\dot{x}$
Kemudian substitusikan persamaan $e^{-\theta t}\dot{x} = -5e^{-\theta t}x + 4e^{-\theta t}u$ kepersamaan $\dot{\tilde{x}} = -\theta e^{-\theta t}x + e^{-\theta t}\dot{x}$, diperoleh
$\dot{\tilde{x}} = -\theta e^{-\theta t}x - 5e^{-\theta t}x + 4e^{-\theta t}u$
$\dot{\tilde{x}} = (-5-\theta)\tilde{x} + 4\tilde{u}$
Diberikan $\theta = 1$ sehingga persamaan dinamik $\dot{\tilde{x}} = (-5-\theta)\tilde{x} + 4\tilde{u}$ menjadi:
$\dot{\tilde{x}} = (-5-1)\tilde{x} + 4\tilde{u}$
$\dot{\tilde{x}} = -6\tilde{x} + 4\tilde{u}$

Persamaan $\dot{\tilde{x}} = -6\tilde{x} + 4\tilde{u}$ disebut persamaan dinamik dengan *factor discount*. Selanjutnya persamaan dinamik dengan *factor discount* yang sudah didapat diberikan *output feedback*, diketahui $y = cx$ dengan $u = -k_1 y$.
Didefinisikan $\tilde{y} = e^{-\theta t}y,\ \tilde{x} = e^{-\theta t}x,\ \tilde{u} = e^{-\theta t}u$, maka
$\tilde{y} = c\tilde{x}$
dan
$\tilde{u} = -k_1\tilde{y}$

Kemudian disubstitusikan persamaan $\tilde{y} = c\tilde{x}$ ke persamaan $\tilde{u} = -k_1\tilde{y}$, maka diperoleh:
$\tilde{u} = -k_1 c\tilde{x}$

Kemudian persamaan $\tilde{u} = -k_1 c\tilde{x}$ disubstitusikan kepersamaan $\dot{\tilde{x}} = -6\tilde{x} + 4\tilde{u}$, sehingga menjadi:
$\dot{\tilde{x}} = -6\tilde{x} + 4\tilde{u}$
$\dot{\tilde{x}} = -6\tilde{x} - 4k_1 c\tilde{x}$
$\dot{\tilde{x}} = (-6 - 4k_1 c)\tilde{x}$

Persamaan $\dot{\tilde{x}} = (-6 - 4k_1 c)\tilde{x}$ merupakan persamaan dinamik dengan penambahan *factor discount* dan *output feedback*. Selanjutnya persamaan $(-6 - 4k_1 c)$ dapat dinotasikan sebagai a_c, sehingga menjadi:
$\dot{\tilde{x}} = a_c\tilde{x}$

Selanjutnya untuk memperoleh fungsi tujuan terlebih dahulu di cari $\tilde{u}^T$ sebagai berikut:
$\tilde{u}^T = (-k_1 c\tilde{x})^T$
$\tilde{u}^T = -\tilde{x}^T c^T {k_1}^T$
Karena dalam bentuk skalar, maka menjadi:
$\tilde{u}^T = -\tilde{x}ck_1$

Selanjutnya fungsi tujuan diberikan *factor discount* sebagai berikut:

$$j = e^{-\theta t}(x^T px) + e^{-\theta t}\int_0^2 [x^T qx + u^T ru]\, dt$$

Didefinisikan $\tilde{x} = e^{-\theta t}x$ dan $\tilde{u} = e^{-\theta t}u$, maka diperoleh $e^{-\theta t}(x^T px) = \tilde{x}^T p\tilde{x}$, $e^{-\theta t}(x^T qx) = \tilde{x}^T q\tilde{x}$ dan $e^{-\theta t}(u^T ru) = \tilde{u}^T r\tilde{u}$. Sehingga didapat fungsi tujuan dengan penambahan *factor discount* sebagai berikut:

$$j = \tilde{x}^T p\tilde{x} + \int_0^2 [\tilde{x}^T q\tilde{x} + \tilde{u}^T r\tilde{u}]\, dt$$

Kemudian disubstitusikan $q = 1$, persamaan $\tilde{u} = -k_1 c\tilde{x}$ dan persamaan
$\tilde{u}^T = -\tilde{x}ck_1$ ke fungsi tujuan $j = \tilde{x}^T p\tilde{x} + \int_0^2 [\tilde{x}^T q\tilde{x} + \tilde{u}^T r\tilde{u}]\, dt$, sebagai berikut:

$$j = \tilde{x}^T p\tilde{x} + \int_0^2 [\tilde{x}^T q\tilde{x} + \tilde{u}^T r\tilde{u}]\, dt$$

$$j = \tilde{x}^T p\tilde{x} + \int_0^2 (\tilde{x}^T q\tilde{x} + (-\tilde{x}ck_1)r(-k_1 c\tilde{x}))dt$$

$j = \tilde{x}^T p\tilde{x} + \int_0^2 (\tilde{x}^T(1 + c^2 {k_1}^2)\tilde{x})dt$

Selanjutnya diasumsikan $j = 0$ sehingga diperoleh persamaan

$0 = \frac{d}{dt}\tilde{x}^T p\tilde{x} + \tilde{x}^T(1 + c^2 {k_1}^2)\tilde{x})dt$

dan dapat dijabarkan menjadi:

$\frac{d}{dt}\tilde{x}^T p\tilde{x} = -\tilde{x}^T\left(1 + c^2 {k_1}^2\right)\tilde{x}$

$\dot{\tilde{x}}^T p\tilde{x} + \tilde{x}^T p\dot{\tilde{x}} = -\tilde{x}^T(1 + c^2 {k_1}^2)\tilde{x}$

$a_c^T \tilde{x}^T p\tilde{x} + \tilde{x}^T p a_c \tilde{x} = -\tilde{x}^T(1 + c^2 {k_1}^2)\tilde{x}$

$\tilde{x}^T(a_c^T p + pa_c)\tilde{x} = -\tilde{x}^T(1 + c^2 {k_1}^2)\tilde{x}$

$2\tilde{x}^2(pa_c) = -\tilde{x}^2(1 + c^2 {k_1}^2)$

Substitusikan $a_c = (-6 - 4k_1 c)$, maka diperoleh:

$2(-6 - 4k_1 c)p = -(1 + c^2 {k_1}^2)$

$(-12 - 8k_1 c)p = -(1 + c^2 {k_1}^2)$

$(-12 - 8k_1 c)p + \left(1 + c^2 {k_1}^2\right) = 0 = g$

Kemudian dibentuk persamaan Hamilton:

$h = px + gs$

$= px + (-12 - 8k_1 c)ps + \left(1 + c^2 {k_1}^2\right)s$

Didiferensialkan $h = px + (-12 - 8k_1 c)ps + \left(1 + c^2 {k_1}^2\right)s$ terhadap s, diperoleh:

$0 = \frac{\partial h}{\partial s} = ((-12 - 8k_1 c)p + \left(1 + c^2 {k_1}^2\right)$

Didiferensialkan $h = px + (-12 - 8k_1 c)ps + \left(1 + c^2 {k_1}^2\right)s$ terhadap p, diperoleh:

$0 = \frac{\partial h}{\partial p} = x + (-12 - 8k_1 c)s$

Didiferensialkan $h = px + (-12 - 8k_1 c)ps + \left(1 + c^2 {k_1}^2\right)s$ terhadap k_1, diperoleh:

$0 = \frac{\partial h}{\partial k_1} = -8cps + 2c^2 k_1 s$

Kemudian dari persamaan$0 = \frac{\partial h}{\partial k_1} = -8cps + 2c^2 k_1 s$ maka diperoleh:

$k_{1_1} = \frac{8cps}{2c^2 s}$

$k_{1_1} = \frac{4p}{c}$

Selanjutnya untuk mendapatkan nilai k_{1_1}, maka terlebih dahulu di cari nilai p, dari persamaan berikut**:**

$(-12 - 8k_1 c)p + \left(1 + c^2 {k_1}^2\right) = 0$

$(-12 - 8k_1 c)p = -\left(1 + c^2 {k_1}^2\right)$

$p = \frac{-\left(1 + c^2 {k_1}^2\right)}{(-12 - 8k_1 c)}$

Kemudian disubstitusikan $c = 1, k_1 = 2$ ke $p = \frac{-(1 + c^2 {k_1}^2)}{(-12 - 8k_1 c)}$, maka diperoleh:

$p = \frac{-(1 + (1)^2(2)^2)}{(-12 - 8(2)(1))}$

$p = \frac{5}{28}$

Sehingga diperoleh k_{1_1},dengan mensubstitusikan $p = \frac{5}{28}$ ke persamaan $k_{1_1} = \frac{4p}{c}$ yaitu:

$k_{1_1} = \frac{4p}{c}$

$k_{1_1} = \frac{5}{7}$

Dari $k = \frac{5}{7}$ diperoleh vektor kendali untuk persamaan dinamik $\dot{\tilde{x}} = -6\tilde{x} + 4\tilde{u}$ sebagai berikut:

$\tilde{u} = -k_{1_1} c\tilde{x}$

$\tilde{u} = -\frac{5}{7}\tilde{x}$

Kemudian disubstitusikan $\tilde{u} = -\frac{5}{7}\tilde{x}$ ke persamaan dinamik $\dot{\tilde{x}} = -6\tilde{x} + 4\tilde{u}$ yaitu:

$\dot{\tilde{x}} = -6\tilde{x} + 4\tilde{u}$

$\dot{\tilde{x}} = \left(-\frac{62}{7}\right)\tilde{x}$

Selanjutnya akan dicari solusi kestabilan untuk persaman dinamik $\dot{\tilde{x}} = \left(-\frac{62}{7}\right)\tilde{x}$, yaitu sebagai berikut:

$\dot{\tilde{x}} = \left(-\frac{62}{7}\right)\tilde{x}$

$\tilde{x} = \tilde{x}_0 e^{-\frac{62}{7}t}$

Berdasarkan penyelesaian dari persamaan $\tilde{x} = \tilde{x}_0 e^{-\frac{62}{7}t}$, saat $t \to 2$ maka $\tilde{x} \to 0$, sehingga dapat disimpulkan bahwa vector kendali $\tilde{u} = -\frac{5}{7}\tilde{x}$ dapat menstabilkan persamaan dinamik.

Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang dilakukan maka dapat diperoleh kesimpulan berikut :

1. Fungsi kendali matriks diperoleh:
   $\hat{\tilde{u}} = -((C^T PSY_1{}^T B^T + B^T Y_1{}^T P^T SC^T)(RCSC^T)^{-1})C\hat{\tilde{x}}$
2. Persamaan diferensial dinamik diperoleh:
   $\dot{\tilde{x}}_1 = (A_1 - Y_1 E\theta I - Y_1 B((C^T PSY_1{}^T B^T + B^T Y_1{}^T P^T SC^T)(RCSC^T)^{-1})C)\hat{\tilde{x}}$
3. Selanjutnya dilakukan analisa kestabilan dari persamaan diferensial dinamik dan diperoleh bahwa Persamaan (31) akan memenuhi definisi kestabilan jika untuk $t_0 \to T_f$ maka soulusi Persamaan (31) menuju nol.

Daftar Pustaka

[1] Amato, F dkk. "Finite-time Control of Linear Time-Varying System vi OuputFeedback". USA: *Amarican Control Conference*, hal 4722-4726. 2005.

[2] Anton, Howard. *"Aljabar Linear Elementar"*. Edisike 5, Erlangga.1987.

[3] Ganmatcher. F. R. "*The Theory Of Matrices*". Chelsea Plubishing Company: New York.1959.

[4] Lewis, Frank L. *"Optimal Control"*.Toronto: Jhon Wiley & Son, Inc.1995.

[5] Musthofa, Muhammad Wakhid. "Linear Quadratic Regulator (LQR) untuk Sistem Deskriptor Berindeks Satu".*Jurnal Konvergensi.* Vol. 4, No 1, April 2014.

[6] Ogata, Katsuhiko. *"Discrette-Time Control System"*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.1995.

[7] Olsder, GJ. *"Mathematical System Theory"*. Delft: University Of Technology. 1994.

[8] Perko, Lawrence. "*Differensial Equation and Dynamical System*". Springer Verlag: New York. 1991.

[9] Ruminta."*Matriks Persamaan Linear dan Pemograman Linear*". Rekayasa Sains: Bandung. 2009.