Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 3, No. 2, Juli 2017
ISSN 1693-2390 print/ISSN 2407-0939 online

Nilai Ketakteraturan Total dari Graf Hasil Kali *Comb* P_m dan C_4

Corry Corazon Marzuki[1], Yuri Febrinanda[2]
[1,2] Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: corry@uin-suska.ac.id,yfebrinanda@gmail.com

ABSTRAK

Misalkan $G = (V, E)$ adaslah sebuah graf dan k adalah bilangan bulat positif. Pelabelan-k total pada graf G adalah suatu pemetaan $\lambda: V \cup E \rightarrow \{1,2, \dots, k\}$. Bobot titik x dinyatakan $wt(x) = \lambda(x) + \sum_{ux \in E} \lambda(ux)$ dan bobot sisi xy dinyatakan $wt(xy) = \lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y)$. Suatu pelabelan-$k$ total dikatakan tak teratur total, jika bobot setiap titik berbeda dan bobot setiap sisi berbeda. Nilai ketakteraturan total (*totally irregularity strength*) dari graf G dinotasikan dengan $ts(G)$ adalah nilai k minimum atau label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan total tak teratur total. Dalam makalah ini diperoleh $ts(P_m \rhd C_4) = \left\lceil \frac{5m+1}{3} \right\rceil$ dengan m merupakan bilangan bulat positif dan $m \leq 17$.

Katakunci: *Hasil kali comb, nilaiketak teraturan total, pelabelan total tak teratur total.*

ABSTRACT

Let graph $G = (V, E)$ and k is a positive integer. Total k-labeling on G is a mapping $\lambda: V \cup E \rightarrow \{1,2, \dots, k\}$. The weight of the vertex x is represented by $wt(x) = \lambda(x) + \sum_{ux \in E} \lambda(ux)$ and the weight of the edge xy is represented by $wt(xy) = \lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y)$. A total k-labeling of $G$is called a totally irregular total labeling, if the weight of every two distinct vertices are different and the weight of every two distinct edges are different. The minimum k such that a graph G has a totally irregular total k-labeling is called the total irregularity strength of G, denoted by $ts(G)$. In this research, we will get the $ts(P_m \rhd C_4) = \left\lceil \frac{5m+1}{3} \right\rceil$ where m is a positive integerand $m \leq 17$.

Keywords: *The comb product, total irregularity strength, totally irregular total labeling.*

Pendahuluan

Dalam teori graf ada suatu topik yang membahas tentang pelabelan graf. Pelabelan pada suatu graf adalah pemetaan yang memasangkan unsur-unsur graf (titik atau sisi) dengan bilangan bulat positif. Jika domain dari fungsi (pemetaan) adalah titik, maka pelabelan disebut pelabelan titik (*vertex labeling*), jika domainnya adalah sisi maka disebut pelabelan sisi (*edge labeling*), jika domainnya titik dan sisi maka disebut pelabelan total (*total labeling*). Pelabelan graf terdiri dari berbagai macam, diantaranya: pelabelan takteratur, pelabelan ajaib, pelabelan *graceful*, pelabelan harmoni dan pelabelan anti ajaib. Hasil penelitian mengenai pelabelan graf secara lengkap dan terperinci ditulis dalam sebuah buku yang berjudul *"A Dynamic Survey of Graph Labelling"* yang ditulis oleh Joseph A. Galian [3].

Pelabelan total takteratur diperkenalkan oleh Baca M., dkk. [1] pada tahun 2001. Ia memperkenalkan dua jenis pelabelan total takteratur, yaitu pelabelan total takteratur titik dan pelabelan total takteratur sisi.

Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf, maka bobot titik $x \in V(G)$ adalah $wt(x) = \lambda(x) + \sum_{xy \in E} \lambda(xy)$. Pelabelan $\lambda : V \cup E \rightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$ dikatakan pelabelan-k total takteratur titik di G, jika setiap dua titik berbeda x dan y di V memenuhi $wt(x) \neq wt(y)$. Nilai total ketakteraturan titik dari graf G yaitu label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf *G* dengan pelabelan total takteratur titik, yang dinotasikan dengan $tvs(G)$.

Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf, maka bobot sisi $e \in E(G)$ adalah $wt(e) = \lambda(x_1) + \lambda(e) + \lambda(x_2)$. Pelabelan $\lambda : V \cup E \rightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$ dikatakan pelabelan-k total takteratur sisi di G, jika untuk setiap dua sisi berbeda e dan f pada E memenuhi $wt(e) \neq wt(f)$. Nilai total ketakteraturan sisi yaitu label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf *G* dengan pelabelan total takteratur sisi, yang dinotasikan dengan *tes(G).*

Kemudian pada [5], Marzuki dkk. Juga memperkenalkan pelabelan total takteratur lain yang dinamakan pelabelan total takteratur total. Pelabelan total takteratur total merupakan pengkombinasian antara pelabelan total takteratur titik dan pelabelan total takteratur sisi. Misalkan $G = (V, E)$ sebuah graf dan pelabelan $\lambda : V \cup E \rightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$ pada G adalah pelabelan total takteratur total, jika untuk setiap dua titik berbeda x dan y pada G maka $wt(x) \neq wt(y)$ dan untuk setiap dua sisi berbeda x_1x_2 dan y_1y_2 pada G maka $wt(x_1x_2) \neq wt(y_1y_2)$. Nilai ketakteraturan total yaitu label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf *G* dengan pelabelan total takteratur total, yang dinotasikan dengan *ts(G).*

Pada makalah ini akan didapatkan nilai ketakteraturan total dari graf hasil kali *comb* dari P_m dan C_4, yang dinotasikan dengan $ts(P_m \trianglerighteq C_4)$, dimana P_m adalah graf lintasan dengan m titik dan C_4 adalah graf lingkaran dengan empat titik.

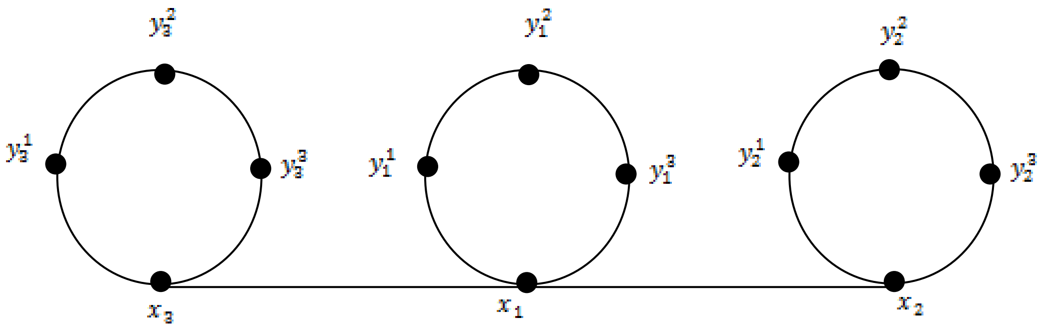
Graf hasil kali *comb* adalah suatu graf yang merupakan hasil operasi dari dua buah graf. Diberikan graf sederhana *G* dan *H*. Graf hasil kali *combG* dan *H* yang dinotasikan dengan $G \trianglerighteq H$, yaitu sebuah graf yang diperoleh dengan melakukan satu penggandaan pada graf *G* dan menggandakan graf *H* sebanyak jumlah titik pada graf *G*, kemudian diberikan titik *o* yang merupakan titik di graf *H* sebagai titik cangkok, kemudian mencangkokkan penggandaan graf *H* ke- *i* pada titik *o* di graf *H* ketitik ke- *i* dari graf *G* [4].

Bahan dan MetodePenelitian

Definisi 1 [6] Graf *G* didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) yang dinotasikan $G = (V, E)$ yang dalam hal ini *V* adalah himpunan takkosong dari titik-titik (*vertices*) dan *E* adalah himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan sepasang titik.

Definisi 2 [4] Diberikan graf sederhana *G* dan *H*. Graf hasil kali *comb G* dan *H* dinotasikan dengan $G \trianglerighteq H$, yaitu sebuah graf yang diperoleh dengan melakukan satu penggandaan pada *G* dan menggandakan *H* sebanyak jumlah titik pada *G*, kemudian diberikan *o* yang merupakan suatu titik di graf *H* sebagai titik cangkok, lalu mencangkokkan penggandaan *H* ke-*i* pada titik *o* di graf *H* ketitik ke-*i* dari graf *G.*

Berikut ini adalah gambar dari graf $P_3 \trianglerighteq C_4$



Gambar 1 Graf $P_3 \rhd C_4$

Definisi 3 [1] Suatu graf $G = (V, E)$ dengan himpunan titik tak kosong V dan himpunan sisi$E$. Pelabelan $\lambda : V \cup E \rightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$ dikatakan pelabelan-k total takteratur titik di G, jika setiap dua titik berbeda x dan y di V memenuhi $wt(x) \neq wt(y)$. Nilai total ketakteraturan titik dari graf G yaitu label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan total takteratur titik, yang dinotasikan dengan $tvs(G)$.

Berikut adalah batas atas dan bawah dari nilai total ketakteraturan titik.

Teorema 4 [1] Misalkan G adalah graf (p, q) dengan derajat minimum δ dan derajat maksimum Δ maka, $\left\lceil \frac{p+\delta}{\Delta+1} \right\rceil \leq tvs(G) \leq p + \Delta - 2\delta + 1$.

Salah satu hasil penelitian mengenai nilai total ketakteraturan titik ini adalah sebagai berikut.

Teorema 5 [2] Misalkan P_m adalah graf lintasan dengan m titik dan C_4 adalah graf lingkaran dengan 4 titik. Untuk $m \geq 2$ berlaku $tvs\ (P_m \rhd C_4) = \left\lceil \frac{3m+2}{3} \right\rceil$.

Definisi 6 [1] Suatu graf $G = (V, E)$ dengan himpunan titik tak kosong V dan himpunan sisi E. Pelabelan $\lambda : V \cup E \rightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$ dikatakan pelabelan-k total takteratur sisi di G, jika setiap dua sisi berbeda x_1x_2 dan y_1y_2 di E memenuhi $wt(x_1x_2) \neq wt(y_1y_2)$. Nilai total ketakteraturan sisi dari graf G yaitu label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan total takteratur sisi, yang dinotasikan dengan $tes(G)$.

Berikut adalah batas atas dan bawah dari nilai total ketakteraturan sisi.

Teorema7 [1] Jika $G(V, E)$ adalah suatu graf dengan himpunan titik tak kosong V dan himpunan sisi E, maka $\left\lceil \frac{|E|+2}{3} \right\rceil \leq tes\ (G) \leq |E|$

Selanjutnya, C.C Marzuki, dkk [5] telah mendefinisikan nilai ketakteraturan total dan memberikan batas atas dan batas bawah dari nilai ketakteraturan total seperti dijelaskan pada Definisi 8 dan Teorema 9, serta menentukan nilai ketakteraturan total dari beberapa jenis graf pada Teorema 10 dan 11.

Definisi 8 [5] Misalkan $G=(V,E)$ sebuah graf. Pelabelan $\lambda: V\cup E\rightarrow\{1,2,\ldots,k\}$ pada G adalah pelabelan total takteratur total, jika untuk setiap dua titik berbeda x dan y pada G maka $wt(x)\neq wt(y)$ dan untuk setiap dua sisi berbeda x_1x_2 dan y_1y_2 pada G maka $wt(x_1x_2)\neq wt(y_1y_2)$. Nilai ketakteraturan total yaitu label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan total takteratur total, yang dinotasikan dengan *ts(G).*

Observasi 9 [5] Untuk setiap graf G, maka $\max\{tes(G), tvs(G)\}\leq ts(G)$.

Teorema 10 [5] Untuk $n\geq 3$ suatu bilangan bulat positif dan C_n adalah graf lingkaran dengan n sisi, maka $ts(C_n)=\left\lceil\frac{n+2}{3}\right\rceil$.

Teorema 11 [5] Untuk n bilangan bulat positif dan P_n adalah graf lintasan dengan n titik, maka :

$$ts(P_n)=\begin{cases}\left\lceil\dfrac{n+2}{3}\right\rceil, & \text{jika } n=2 \text{ atau } 5;\\ \left\lceil\dfrac{n+1}{3}\right\rceil, & \text{untuk } n \text{ lainnya.}\end{cases}$$

Hasil dan Pembahasan

Hasil penelitian ini adalah sebuah teorema yang menjelaskan mengenai nilai ketakteraturan total dari graf hasil kali comb P_m danC_4.

Teorema 12 Misalkan $P_m\trianglerighteq C_4$ adalah graf hasil kali comb dari graf lintasan P_m dan graf lingkaran C_4 untuk m bilangan bulat positif dan m $\geq$17 , maka $ts(P_m\trianglerighteq C_4)=\left\lceil\frac{5m+1}{3}\right\rceil$.

Bukti :

Perhatikan bahwa banyaknya sisi pada graf $P_m\trianglerighteq C_4$ adalah $|E(P_m\trianglerighteq C_4)|=4m+(m-1)=5m-1$. Berdasarkan Teorema 7, diperoleh $\left\lceil\frac{5m+1}{3}\right\rceil\leq tes\,(P_m\trianglerighteq C_4)\leq 5m-1$. Jadi terbukti bahwa $tes\,(P_m\trianglerighteq C_4)\geq\left\lceil\frac{5m+1}{3}\right\rceil$.

Berdasarkan Observasi9, $ts(P_m\trianglerighteq C_4)\geq\max\{tes(P_m\trianglerighteq C_4), tvs(P_m\trianglerighteq C_4)\}$. Berdasarkan Teorema5, diperoleh bahwa $tvs(P_m\trianglerighteq C_4)=\left\lceil\frac{3m+2}{3}\right\rceil$, sehingga $ts(P_m\trianglerighteq C_4)\geq\max\left\{tes(P_m\trianglerighteq C_4),\left\lceil\frac{3m+2}{3}\right\rceil\right\}$. Karena $tes(P_m\trianglerighteq C_4)\geq\left\lceil\frac{5m+1}{3}\right\rceil$ dan $\left\lceil\frac{5m+1}{3}\right\rceil\geq\left\lceil\frac{3m+2}{3}\right\rceil\ \forall m\in Z$ maka diperoleh $ts(P_m\trianglerighteq C_4)\geq\left\lceil\frac{5m+1}{3}\right\rceil$.

Selanjutnya akan dibuktikan $ts(P_m\trianglerighteq C_4)\leq\left\lceil\frac{5m+1}{3}\right\rceil$. Hal ini akan dibuktikan dengan cara menunjukkan adanya pelabelan -$\left\lceil\frac{5m+1}{3}\right\rceil$ total tak teratur total pada graf $P_m\trianglerighteq C_4$.

Misalkan himpunan titik dari graf $P_m\trianglerighteq C_4$ adalah:

$V(P_m\trianglerighteq C_4)=\{x_i, y_i{}^k\ |1\leq i\leq m \text{ dan } 1\leq k\leq 3\}$,

dan himpunan sisi dari graf $P_m\trianglerighteq C_4$ adalah:

$E(P_m\trianglerighteq C_4)=\{y_i{}^k x_i\ |1\leq i\leq m \text{ dan } k=2,3\}\cup\{y_i{}^1 y_i{}^k\ |1\leq i\leq m$ dan $k=2,3\}\cup\{x_1x_2\}\cup\{x_i x_{i+2}\ |1\leq i\leq m-2\}$.

Berikut akan ditunjukkan adanya pelabelan total tak teratur total pada graf $P_m \trianglerighteq C_4$ dengan menggunakan label terbesar $\left\lceil \frac{5m+1}{3} \right\rceil$ untuk m merupakan bilangan bulat positif dan $m \leq 17$. Misalkan $r_i = \left\lceil \frac{5i+1}{3} \right\rceil$. Definisikan pelabelan titik dan pelabelan sisi pada graf $P_m \trianglerighteq C_4$ sebagai berikut.

Pelabelan titik:

$$\lambda(x_i) = \begin{cases} r_i - 1 & \text{, jika } i \pmod 3 = 0 \text{ atau } i = 8 \\ r_i & \text{, jika } i \text{ lainnya} \end{cases}$$

$$\lambda(y_i{}^1) = \begin{cases} r_i - 1 & \text{, jika } i = 1 \text{ dan } 4 \\ \left\lceil \frac{3i-1}{2} \right\rceil & \text{, jika } i = 6 \text{ dan } 8 \\ r_i - 3 & \text{, jika } i = 9, 12 \text{ dan } 15 \\ r_i - 2 & \text{, jika } i \text{ lainnya} \end{cases}$$

$$\lambda(y_i{}^2) = \begin{cases} 9 & \text{, jika } i = 6 \\ r_i - 1 & \text{, jika } i \text{ lainnya} \end{cases}$$

$$\lambda(y_i{}^3) = \begin{cases} r_i - 1 & \text{, jika } i = 3 \text{ dan } 6 \\ r_i & \text{, jika } i \text{ lainnya} \end{cases}$$

Pelabelan sisi:

$$\lambda(y_i{}^2 x_i) = \begin{cases} r_i & \text{, jika } i \pmod 3 = 1 \\ \left\lceil \frac{3i+3}{2} \right\rceil & \text{, jika } 6 \leq i \leq 10 \text{ dan } i \neq 9 \\ r_i - 1 & \text{, jika } i \text{ lainnya} \end{cases}$$

$$\lambda(y_i{}^3 x_i) = \begin{cases} r_i & \text{, jika } i \pmod 3 = 1 \text{ atau } i = 3 \\ \left\lceil \frac{3i+3}{2} \right\rceil & \text{, jika } 6 \leq i \leq 10 \text{ dan } i \neq 9 \\ r_i - 1 & \text{, jika } i \text{ lainnya} \end{cases}$$

$$\lambda(y_i{}^1 y_i{}^2) = \begin{cases} 4 & \text{, jika } i = 3 \\ \left\lceil \frac{3i+3}{2} \right\rceil & \text{, jika } 6 \leq i \leq 10 \text{ dan } i \neq 9 \\ r_i & \text{, jika } i = 13 \text{ dan } 16 \\ r_i - 1 & \text{, jika } i \text{ lainnya} \end{cases}$$

$$\lambda(y_i{}^1 y_i{}^3) = \begin{cases} \left\lceil \frac{3i+3}{2} \right\rceil & \text{, jika } 6 \leq i \leq 10 \text{ dan } i \neq 9 \\ r_i & \text{, jika } i = 13 \text{ dan } 16 \\ r_i - 1 & \text{, jika } i \text{ lainnya} \end{cases}$$

$$\lambda(x_1 x_2) = 1$$

$$\lambda(x_i x_{i+2}) = \begin{cases} r_i + 3 & \text{, jika } 4 \leq i \leq 10 \text{ dan } i \text{ bil. genap atau } i \pmod 6 = 1 \\ r_i + 2 & \text{, jika } i \text{ lainnya} \end{cases}$$

Berdasarkan pelabelan λ, diperoleh bobot titik dan bobot sisi sebagai berikut.

1. Bobot titik $y_i{}^k$ dengan $k = 1, 2,$ dan 3 untuk m bilangan bulat positif dan $m \leq 17$ dari graf $P_m \trianglerighteq C_4$, adalah sebagai berikut :

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 3, No. 2, Juli 2017
ISSN 1693-2390 print/ISSN 2407-0939 online

$$wt(y_i{}^1) = \begin{cases} 3r_i - 3 & ,\text{jika } i = 1 \text{ dan } 4 \\ 3r_i - 4, & \text{jika } i \pmod 3 = 2 \text{ dan } i \neq 8 \\ 3r_i - 5 & ,\text{jika } i \pmod 3 = 0 \text{ dan } i \neq 6 \\ \left\lceil \frac{3i-2}{2} \right\rceil + 2\left\lceil \frac{3i+3}{2} \right\rceil & ,\text{jika } i = 6 \text{ dan } 8 \\ r_i - 2 + 2\left\lceil \frac{3i+3}{2} \right\rceil & ,\text{jika } i = 7 \text{ dan } 10 \\ 64 & ,\text{jika } i = 13 \\ 79 & ,\text{jika } i = 16 \end{cases}$$

$$wt(y_i{}^2) = \begin{cases} 3r_i - 2 & ,\text{jika } i = 1 \text{ dan } 4 \\ 13 & ,\text{jika } i = 3 \\ 30 & ,\text{jika } i = 6 \\ r_i - 1 + 2\left\lceil \frac{3i+3}{2} \right\rceil & ,\text{jika } 7 \leq i \leq 10 \text{ dan } i \neq 9 \\ 3r_i - 1 & ,\text{jika } i = 13 \text{ dan } 16 \\ 3r_i - 3 & ,\text{jika } i \text{ lainnya} \end{cases}$$

$$wt(y_i{}^3) = \begin{cases} 3r_i - 1 & ,\text{jika } i = 1 \text{ dan } 4 \\ 32 & ,\text{jika } i = 6 \\ r_i + 2\left\lceil \frac{3i+3}{2} \right\rceil & ,\text{jika } 7 \leq i \leq 10 \text{ dan } i \neq 9 \\ 3r_i & ,\text{jika } i = 13 \text{ dan } 16 \\ 3r_i - 4 & ,\text{jika } i \text{ lainnya} \end{cases}$$

2. Bobot titik x_i untuk $1 \leq i \leq m - 2$ dan $m \geq 3$ dari graf $P_m \trianglerighteq C_4$, adalah sebagai berikut :

$$wt(x_i) = \begin{cases} 12 & ,\text{jika } i = 1 \\ 17 & ,\text{jika } i = 2 \\ 29 & ,\text{jika } i = 3 \\ 4r_i + r_{i-2} + 5 & ,\text{jika } i = 4 \text{ dan } 13 \\ 2r_i + r_{i-2} + 2\left\lceil \frac{3i+3}{2} \right\rceil + 5 & ,\text{jika } 6 \leq i \leq 8 \\ 88 & ,\text{jika } i = 10 \\ 4r_i + r_{i-2} + 2 & ,\text{jika } i \text{ lainnya} \end{cases}$$

3. Bobot titik x_i untuk $1 \leq i \leq m$ dan $m \geq 1$ dari graf $P_m \trianglerighteq C_4$, adalah sebagai berikut:

$$wt(x_i) = \begin{cases} 6 & ,\text{jika } i = 1 \text{ dan } m = 1 \\ 7 & ,\text{jika } i = 1 \text{ dan } m = 2 \\ 11 & ,\text{jika } i = 2 \\ 21 & ,\text{jika } i = 3 \\ 3r_i + r_{i-2} + 2 & ,\text{jika } i = 4, 13 \text{ dan } 16 \\ r_i + r_{i-2} + 2\left\lceil \frac{3i+3}{2} \right\rceil + 2 & ,\text{jika } 6 \leq i <= 8 \\ 68 & ,\text{jika } i = 10 \\ 3r_i + r_{i-2} & ,\text{jika } i \text{ lainnya} \end{cases}$$

4. Bobot sisi dari graf $P_m \trianglerighteq C_4$, untuk m bilangan bulat positif dan $m \leq 17$ adalah sebagai berikut:

$$wt(y_i^1 y_i^2) = \begin{cases} 3r_i - 3 & ,\text{jika } i \pmod 3 = 1 \text{ dan } i \neq 7 \text{ dan } 10 \\ 3r_i - 4 & ,\text{jika } i \pmod 3 = 2 \text{ dan } i \neq 8 \\ 3r_i - 5 & ,\text{jika } i \pmod 3 = 0 \text{ dan } i \neq 6 \\ 28 & ,\quad \text{jika } i = 6 \\ 38 & ,\quad \text{jika } i = 8 \\ 2r_i - 3 + \left\lceil \frac{3i+3}{2} \right\rceil & ,\text{jika } i = 7 \text{ dan } 10 \end{cases}$$

$$wt(y_i^1 y_i^3) = \begin{cases} 3r_i - 2 & ,\text{jika } i \pmod 3 = 1 \text{ dan } i \neq 7 \text{ dan } 10 \\ 3r_i - 3 & ,\text{jika } i \pmod 3 = 2 \text{ dan } i \neq 8 \\ 3r_i - 4 & ,\text{jika } i \pmod 3 = 0 \text{ dan } i \neq 6 \\ 29 & ,\text{jika } i = 6 \\ 39 & ,\text{jika } i = 8 \\ 2r_i + 2 + \left\lceil \frac{3i+3}{2} \right\rceil & ,\quad \text{jika } i = 7 \text{ dan } 10 \end{cases}$$

$$wt(y_i^2 x_i) = \begin{cases} 3r_i - 1 & ,\text{jika } i \pmod 3 = 1 \text{ dan } i \neq 7 \text{ dan } 10 \\ 3r_i - 2 & ,\text{jika } i \pmod 3 = 2 \text{ dan } i \neq 8 \\ 3r_i - 3 & ,\text{jika } i \pmod 3 = 0 \text{ dan } i \neq 6 \\ 30 & ,\text{jika } i = 6 \\ 40 & ,\text{jika } i = 8 \\ 2r_i - 1 + \left\lceil \frac{3i+3}{2} \right\rceil & ,\text{jika } i = 7 \text{ dan } 10 \end{cases}$$

$$wt(y_i^3 x_i) = \begin{cases} 3r_i & ,\text{jika } i \pmod 3 = 1 \text{ dan } i \neq 7 \text{ dan } 10 \\ 3r_i - 1 & ,\text{jika } i \pmod 3 = 2 \text{ dan } i \neq 8 \\ 3r_i - 2 & ,\text{jika } i \pmod 3 = 0 \text{ dan } i \neq 6 \\ 31 & ,\text{jika } i = 6 \\ 41 & ,\text{jika } i = 8 \\ 2r_i + \left\lceil \frac{3i+3}{2} \right\rceil & ,\text{jika } i = 7 \text{ dan } 10 \end{cases}$$

$$wt(x_i x_{i-1}) = 7 \quad ,\text{jika } i = 1$$

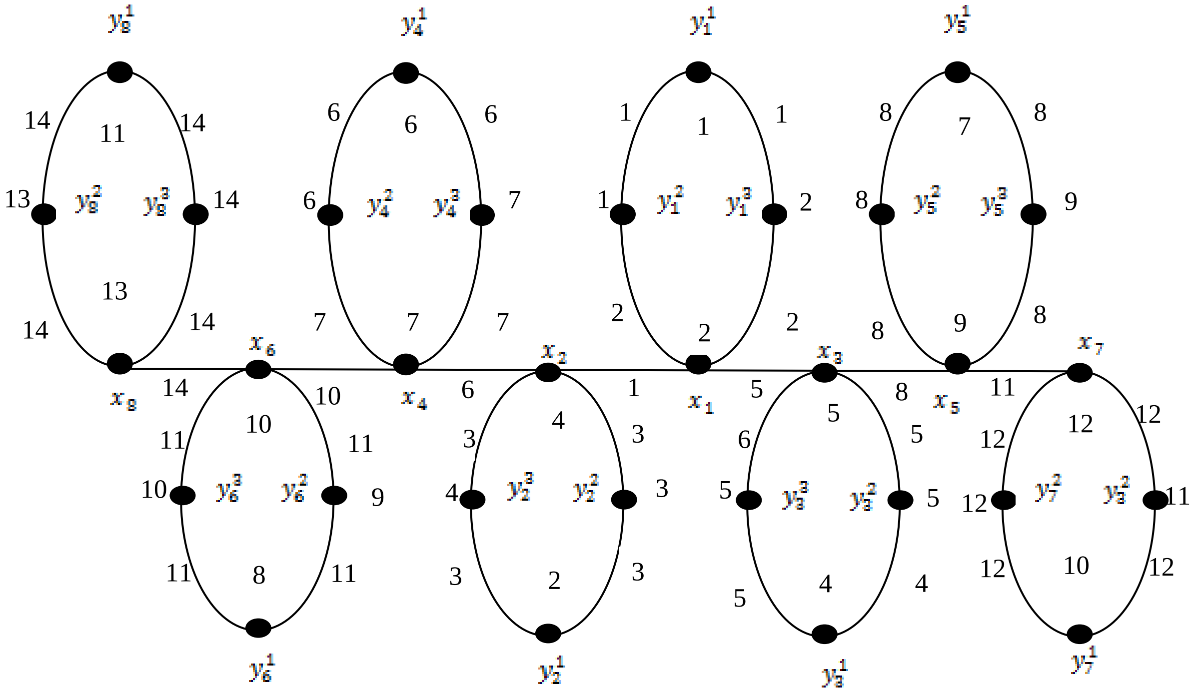
$$wt(x_i x_{i-1}) = \begin{cases} 2r_i + r_{i-2} + 1 & ,\text{jika } i \pmod 3 = 0 \\ 2r_i + r_{i-2} + 2 & ,\quad \text{jika } i \text{ lainnya} \end{cases}$$

Bobot sisi dari graf $P_m \trianglerighteq C_4$ adalah bilangan bulat positif berurutan dimulai dari 3 sampai ke $5m+1$. Sehingga bobot sisinya tidak ada yang sama. Demikian juga dengan bobot titiknya juga tidak ada yang sama meskipun bukan merupakan bilangan bulat positif yang berurutan. Olehkarena itu λ adalah pelabelan total tak teratur total dari graf $P_m \trianglerighteq C_4$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa $ts(P_m \trianglerighteq C_4) \leq \left\lceil \frac{5m+1}{3} \right\rceil$.

Berdasarkan pemaparan di atas diperoleh bahwa $ts(P_m \trianglerighteq C_4) \geq \left\lceil \frac{5m+1}{3} \right\rceil$ dan $ts(P_m \trianglerighteq C_4) \leq \left\lceil \frac{5m+1}{3} \right\rceil$. Jadi terbukti bahwa $ts(P_m \trianglerighteq C_4) = \left\lceil \frac{5m+1}{3} \right\rceil$. ■

Sebagai ilustrasi dari pelabelan yang didefinisikan pada Teorema 12 di atas, diberikan contoh pelabelan total takteratur total untuk graf $P_8 \trianglerighteq C_4$.

Dengan menggunakan rumus λ seperti yang didefinisikan pada pembuktian Teorema 12, diperoleh pelabelan titik dan sisi pada $P_8 \trianglerighteq C_4$ sebagai berikut:



Label terbesar yang digunakan adalah 14 dan bias diperiksa bahwa pelabelan tersebut mengakibatkan setiap titik mempunyai bobot yang berbeda dan setiap sisi mempunyai bobot yang berbeda. Jadi, pelabelan ini adalah pelabelan-14 total takteratur total pada $P_8 \rhd C_4$.

Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada makalah ini dapat disimpulkan bahwa nilai ketakteraturan total (*totally irregularity strength*) dari graf $P_m \rhd C_4$ untuk *m* bilangan bulat positif dan $m \leq 17$ adalah $ts(P_m \rhd C_4) = \left\lceil \frac{5m+1}{3} \right\rceil$.

Daftar Pustaka

[1] Baca M., dkk."On Irregular Total Labeling". *Discrete MathVol307 Hal 1378-1388*.2007.

[2] C.M. Corazon, dkk. Nilai Total Ketakteraturan Titik dari Graf $P_m \rhd C_4$. *Prosiding Konferensi Nasional Matematika XVIII*. Pekanbaru. 2017. Accepted.

[3] Galian J. A. "Dynamic Survey of Graph Labeling". *Electronic Journal of Combinatorics*.Hal.191-194. 2013.

[4] Kristina Mega, dkk. "Dimensi Metrik Lokal Pada Graf Hasil Kali Comb dari Graf Siklus dan Graf Bintang".*JurnalMatematikaVol 1 Hal 1-9*. 2014

[5] Marzuki, C. C, dkk. "On Total Irregularity Strenth of Cycles and Path".*Far East Journal of Mathematical Sciences(FJMS) Volume 82 No 1 Hal 1-21*. 2013.

[6] Munir Rinaldi. "*Matematika Diskrit*". Informatika. Bandung. 2010.