Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 3, No. 1, Januari 2017
ISSN 2460 - 4542

Invers Matriks Positif Menggunakan Metode Adjoin

M. Eka Karnain Putra[1], Fitri Aryani.[2]
[1,2] Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: ekakarnainputra20@gmail.com, khodijah_fitri@uin-suska.ac.id

ABSTRAK

Invers matriks erat kaitannya dengan nilai determinan matriks. Suatu matriks mempunyai invers apabila determinan matriks tersebut tidak nol. Salah satu aplikasi invers matriks untuk menyelesaikan persamaan matriks dan sistem persamaan linier. Terdapat beberapa metode untuk menyelesaikan invers matriks. Makalah ini membahas mengenai bentuk umum dari invers matriks positif menggunakan metode adjoin. Bentuk umum dari invers matriks positif didapatkan dengan melakukan 3 langkah yaitu: Pertama, mendapatkan bentuk umum dari determinan matriks positif dengan memperhatikan pola rekursif yang terbentuk dari nilai determinan matriks tersebut. Kedua, mendapatkan bentuk umum dari matriks kofaktor dari matriks positif dengan memperhatikan pola rekursif yang terbentuk dari matriks kofaktor tersebut. Ketiga, menggunakan metode adjoin untuk mendapatkan bentuk umum dari invers matriks positif. Akhirnya didapatkan bentuk umum dari determinan matriks, matriks kofaktor dan invers matriks dari matriks positif.

Kata Kunci : *adjoin, determinan, invers, matriks kofaktor*

ABSTRACT

Inverse matrix is closely related to the determinant of the matrix. A matrix has an inverse if the determinant of the matrix is not zero. One application inverse matrix to solve matrix equations and systems of linear equations. There are several methods to solve the inverse matrix. This paper discusses the general form of positive matrix inverse using the adjoint method. The general form of positive matrix inverse can be obtained by using three step, that is : first, get the general form of positive matrix determinant with regard recursive pattern formed from the value of determinant of the matrix. Second, get the general form of cofactor matrix of positif matrix with regard recursive pattern formed from the cofactor matrix. Third, using adjoint method to get the general form of positif matrix inverse. Finnaly, obtained general form of determinan, cofactor matrix, and inverse matrix of positif matrix.

Keywords : *adjoint, determinant, inverse, cofactor matrix.*

Pendahuluan

Matriks merupakan salah satu materi dasar untuk mempelajari ilmu matematika khususnya tentang aljabar. Menurut [1] matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut entri dari matriks. Seiring dengan perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi, matriks dapat digunakan dalam kehidupan sehari-hari misalnya dalam bidang industri, pertanian, teknik, ekonomi, operasi riset dan lain-lain.

Berdasarkan pada penyusunan dari entri-entrinya, matriks dapat dibagi menjadi beberapa jenis diantaranya adalah matriks bujursangkar, matriks diagonal, matriks segitiga, matriks simetri dan matriks skalar. Sedangkan berdasarkan dari nilai-nilai entrinya, matriks dibagi menjadi beberapa jenis diantaranya matriks tak negatif dan matrik positif. Suatu matriks A berorde $n \times n$ dengan entri bilangan real disebut tak negatif jika $a_{ij} \geq 0$ untuk setiap i dan j, dan disebut positif jika $a_{ij} > 0$ untuk setiap i dan j [4].

Dalam perhitungan matriks terdapat beberapa operasi matriks diantaranya penjumlahan matriks, perkalian matriks, determinan matriks dan invers matriks. Jika A adalah matriks bujursangkar, dan jika terdapat matriks B yang ukurannya sama sedemikian rupa sehingga $AB = BA = I$, maka A disebut dapat dibalik (*invertible*) dan B disebut sebagai invers (*inverse*) dari A. Jika matriks B tidak dapat didefinisikan, maka A dinyatakan sebagai matriks singular [1]. Ada banyak metode yang dapat digunakan untuk menentukan invers dari suatu matriks, diantaranya Partisi Matriks, Eliminasi Gauss-Jordan dan metode adjoin. Menentukan invers suatu matriks sangat berpengaruh dari ukuran matriks. Semakin besar ukuran matriks maka tingkat kesulitan dalam menentukan invers suatu matriks semakin tinggi. Sehingga diperlukan formula atau bentuk umum untuk menentukan invers suatu matriks

Pada tahun 2014, Bakti Siregar dkk menulis sebuah makalah yang berjudul “Invers Matriks Toeplitz Menggunakan Metode Adjoin”. Makalah tersebut membahas tentang bentuk umum invers dari matriks toeplitz yang diper khusus yaitu:

$$T_n = \begin{bmatrix} 0 & x & \cdots & x \\ x & 0 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \cdots & 0 \end{bmatrix} \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Terdapat tiga bentuk umum dari Persamaan (1), yaitu:

1. Bentuk umum determinan matriks toeplitz berorde n pada Persamaan (1) adalah
$$\det(T_n) = (-1)^n (n-1) x^n$$
2. Bentuk umum kofaktor-kofaktor yang terletak pada baris ke-i dan kolom ke-j dari matriks toeplitz berorde n pada Persamaan (1) adalah
$$K_{ij}T_n = \begin{cases} \det(T_n) & ;\text{untuk } i = j \\ (-1)^{n+1} x^{n-1} & ;\text{untuk } i \neq j \end{cases}$$
3. Bentuk umum invers dari matriks toeplitz berorde n pada Persamaan (1.) adalah
$$T_n^{-1} = t_{ij} = \begin{cases} \dfrac{-n-2}{(n-1)x} & ;\text{untuk } i = j \\ \dfrac{1}{(n-1)x} & ;\text{untuk } i \neq j \end{cases}$$

Berdasarkan hasil yang diperoleh oleh Bakti Siregar dkk tersebut, memudahkan langkah untuk mendapatkan invers matriks toeplitz pada Persamaan (1) yang diberikan. Artinya tidak perlu lagi menggunakan langkah langkah yang panjang untuk menentukan invers matriks. Cukup dengan mensubsitusi nilai n dan x yang diberikan.

Selanjutnya tahun 2016, Oktavia melakukan penelitian dengan judul “ Determinan Matriks Tak Negatif Menggunakan Metode Ekspansi Kofaktor “ dengan tujuan untuk mendapatkan bentuk umum determinan dari matriks tak negatif yang diperkhusus. Metode pencarian bentuk umum determinan matriks tak negatif yang diperkhusus pada makalah tersebut akan digunakan untuk mendapatkan bentuk umum determinan dari matriks positif yang diperkhusus pada makalah ini.

Pada tahun yang sama [2] juga melakukan kajian yang sama seperti Bakti Siregar dkk. Mereka mendapatkan dua bentuk umum dari matriks toeplitz tridiagonal, yaitu: bentuk umum dari

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 3, No. 1, Januari 2017
ISSN 2460 - 4542

determinan matriks dan matriks kofaktor dari matriks toepltz tridiagonal. Invers matriks diperoleh dengan menggunakan rumusan umum adjoin yang ada.

Akhirnya penelitian ini akan melakukan hal yang sama seperti Bakti siregar dkk dengan tujuan untuk mendapatkan bentuk umum determinan, matriks kofaktor dan invers dari matriks positif A_n yang berbentuk :

$$A_n = \begin{bmatrix} b & a & a & \cdots & a \\ c & b & a & \cdots & a \\ c & c & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a \\ c & c & \cdots & c & b \end{bmatrix} \quad (2)$$

Metode dan Bahan Penelitian

Penelitian ini dimulai dengan diberikan bentuk umum matriks positif A_n, seperti paada Persamaan (2). Selanjutnya menentukan determinan, matriks kofaktor dan invers matriks positif A_n mulai dari A_{2x2} sampai A_{8x8}. Setelah itu dengan melihat pola rekursif yang terbentuk dari nilai-nilai yang telah dicari sehingga didapatkan persamaan umum determinan, matiks kofaktor dan invers matriks positif A_n. Berikut diberikan landasan teori yang berhubungan dengan matriks..

Definisi 1. [1] Jika A adalah matriks $m \times n$, maka transpos dari A (*transpose of* A), dinyatakan dengan A^T, didefinisikan sebagai matriks $n \times m$ yang didapatkan dengan mempertukarkan baris-baris dan kolom-kolom dari A; sehingga kolom pertama dari A^T adalah baris pertama dari A, kolom kedua dari A^T adalah baris kedua dari A, dan seterusnya.

Definisi 2. [1] Misalkan A adalah matriks bujursangkar. Fungsi determinan dinotasikan dengan $\det(A)$ atau $|A|$ sebagai jumlah dari semua hasil kali elementer bertanda dari A. Angka $\det(A)$ disebut determinan dari A

Selanjutnya akan diberikan landasan teori yang berhubungan dengan metode untuk mendapatkan nilai determinan matriks.

Definisi 3. [3] Misalkan $A_{n\times n} = [a_{ij}]$, maka minor dari a_{ij}, yang dilambangkan oleh M_{ij}, adalah determinan dari submatriks A yang diperoleh dengan cara membuang semua entri pada baris ke-i dan semua entri pada kolom ke-j. Sedangkan kofaktor dari a_{ij} yang dilambangkan oeh C_{ij} adalah $(-1)^{i+j} M_{ij}$

Teorema 1. [1] Determinan dari matriks A, $n \times n$, dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri pada sebarang baris (atau kolom) dengan kofaktor-kofaktornya dan menjumlahkan hasilkali-hasilkali yang diperoleh; dimana untuk setiap $1 \le i \le n$ dan $1 \le j \le n$,

1. Ekspansi kofaktor sepanjang baris *i*:
   $\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$
2. Ekspansi kofaktor sepanjang kolom *j*:
   $\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$

Teorema 2. [1] Jika A adalah suatu matriks bujursangkar dengan dua baris atau dua kolom yang proporsional, maka $\det(A) = 0$

Berikut adalah landasan teori yang berhubungan dengan matriks kofaktor, matriks adjoin dan invers matriks yang menggunakan metode adjoin.

Definisi 4. [2] Jika A adalah matriks $n \times n$ sebarang dan C_{ij} adalah kofaktor dari a_{ij}, maka matriks

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \tag{3}$$

disebut matriks kofaktor dari A. Transpos dari matriks ini disebut adjoin dari A dan dinyatakan sebagai $adj(A)$.

Teorema 3. [2] Jika A adalah suatu matriks yang dapat dibalik, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A) \tag{4}$$

Hasil dan Pembahasan

Menurut Teorema 3, invers matriks didapatkan dengan menentukan persamaan umum determinan matriks terlebih dahulu. Persamaan umum dari determinan matriks positif diperoleh dengan mengamati pola rekursif dari determinan matriks positif pada Persamaan (2) yang berorde 2×2 sampai 8×8. Nilai determinan diperoleh dengan menggunakan metode ekspansi kofaktor. Berikut diberkan langkah-langkahnya:

$$|A_2| = \begin{vmatrix} b & a \\ c & b \end{vmatrix} = b(b) - a(c) = b^2 - ac$$

$$|A_3| = b^3 + a^2c - a(3bc - c^2)$$

$$|A_4| = b^4 - a^3c + a^2(4bc - c^2) - a(6b^2c - 4bc^2 + c^3)$$

$$|A_5| = b^5 + a^4c - a^3(5bc - c^2) + a^2(10b^2c - 5bc^2 + c^3) - a(10b^3c - 10b^2c^2 + 5bc^3 - c^4)$$

$$|A_6| = b^6 - a^5c + a^4(6bc - c^2) - a^3(15b^2c - 6bc^2 + c^3) + a^2(20b^3c - 15b^2c^2 + 6bc^3 - c^4) - a(15b^4c - 20b^3c^2 + 15b^2c^3 - 6bc^4 + c^5)$$

$$|A_7| = b^7 + a^6c - a^5(7bc - c^2) + a^4(21b^2c - 7bc^2 + c^3) - a^3(35b^3c - 21b^2c^2 + 7bc^3 - c^4) + a^2(35b^4c - 35b^3c^2 + 21b^2c^3 - 7bc^4 + c^5) - a(21b^5c - 35b^4c^2 + 35b^3c^3 - 21b^2c^4 + 7bc^5 - c^6)$$

$$|A_8| = b^8 - a^7c + a^6(8bc - c^2) - a^5(28b^2c - 8bc^2 + c^3) + a^4(56b^3c - 28b^2c^2 + 8bc^3 - c^4) - a^3(70b^4c - 56b^3c^2 + 28b^2c^3 - 8bc^4 + c^5) + a^2(56b^5c - 70b^4c^2 + 56b^3c^3 - 28b^2c^4 + 8bc^5 - c^6) - a(28b^6c - 56b^5c^2 + 70b^4c^3 - 56b^3c^4 + 28b^2c^5 - 8bc^6 + c^7)$$

Selanjutnya dengan mengamati pola rekursif dari nilai determinan yang diperoleh, maka didapatkan persamaan umum determinan dari matriks positif pada Persamaan (2) sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\left|A_n\right| &= b^n + (-1)^{n-1}a^{n-1}c + (-1)^{n-2}a^{n-2}(nbc - c^2) + (-1)^{n-3}a^{n-3}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{1!}b^2c - nbc^2 + c^3\right) \\
&+ (-1)^{n-4}a^{n-4}\left(\sum_{i=1}^{n-2}\frac{i(i+1)}{2!}b^3c - \sum_{i=1}^{n-1}ib^2c^2 + nbc^3 - c^4\right) \\
&+ (-1)^{n-5}a^{n-5}\left(\sum_{i=1}^{n-3}\frac{i(i+1)(i+2)}{3!}b^4c - \sum_{i=1}^{n-2}\frac{i(i+1)}{2!}b^3c^2 + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{1!}b^2c^3 - nbc^4 + c^5\right) \\
&+ (-1)^{n-6}a^{n-6}\left(\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{i=1}^{n-4}\frac{i(i+1)(i+2)(i+3)}{4!}b^5c - \sum_{i=1}^{n-3}\frac{i(i+1)(i+2)}{3!}b^4c^2 + \sum_{i=1}^{n-2}\frac{i(i+1)}{2!}b^3c^3 \\ \displaystyle -\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{1!}b^2c^4 + nbc^5 - c^6\end{array}\right) \qquad (5) \\
&+ \ldots + (-1)^1a^1\left(\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\frac{i(i+1)(i+2)(i+3)\ldots(i+(n-4))}{(n-3)!}b^{n-2}c - \sum_{i=1}^{4}\frac{i(i+1)(i+2)(i+3)\ldots(n-5)}{(n-4)!}b^{n-3}c^2 + \ldots \\ \displaystyle + (-1)^{n-2}\sum_{i=1}^{n-1}ib^2.c^{n-3} + (-1)^{n-1}nbc^{n-2} + (-1)^n c^{n-1}\end{array}\right)
\end{aligned}$$

Setelah mendapatkan persamaan determinan untuk matriks positif pada Persamaan (2), langkah selanjutnya adalah mendapatkan persamaan umum matriks kofaktor dari matriks positif pada Persamaan (2). Persamaan umum matriks kofaktor diperoleh dengan menggunakan Definisi 3 yaitu,: Matriks kofaktor dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$. Berikut diberikan langkah-langkah mendapatkan persamaan umum matriks kofaktor yang dimulai dari matriks kofaktor ukuran 2x2 sampai 8x8:

$$A_2 = \begin{bmatrix} b & a \\ c & b \end{bmatrix}$$

Entri matriks kofaktor sepanjang baris pertama sebagai berikut :

$C_{11} = (-1)^{1+1}.b = b = |A_1|$

$C_{12} = (-1)^{1+2}.c = -c$

Entri matriks kofaktor sepanjang baris kedua sebagaib erikut :

$C_{21} = (-1)^{2+1}.a = -a$

$C_{22} = (-1)^{2+2}.b = b = |A_1|$

Sehingga diperoleh matriks kofaktornya adalah :

$$C_2 = \begin{bmatrix} |A_1| & -c \\ -a & |A_1| \end{bmatrix}$$

Dengan cara yang sama, maka diperoleh:

$A_3 = \begin{bmatrix} b & a & a \\ c & b & a \\ c & c & b \end{bmatrix}$ maka $C_3 = \begin{bmatrix} |A_2| & -c(|A_1| - a) & c(c-b) \\ -a(|A_1| - c) & |A_2| & -c(b-a) \\ a(a-b) & -a(b-c) & |A_2| \end{bmatrix}$ selanjutnya

$A_4 = \begin{bmatrix} b & a & a & a \\ c & b & a & a \\ c & c & b & a \\ c & c & c & b \end{bmatrix}$ maka matriks kofaktornya adalah

$$C_4 = \begin{bmatrix} |A_3| & -c(b-a)^2 & c(b-a)(c-b) & -c(c-b)^2 \\ -a(b-c)^2 & |A_3| & -c(b-a)^2 & c(b-a)(c-b) \\ a(b-c)(a-b) & -a(b-c)^2 & |A_3| & -c(b-a)^2 \\ -a(a-b)^2 & a(b-c)(a-b) & -a(b-c)^2 & |A_3| \end{bmatrix}$$

$$C_5 = \begin{bmatrix} |A_4| & -c(b-a)^3 & c(b-a)^2(c-b) & -c(b-a)(c-b)^2 & c(c-b)^3 \\ -a(b-c)^3 & |A_4| & -c(b-a)^3 & c(b-a)^2(c-b) & -c(b-a)(c-b)^2 \\ a(a-b)(b-c)^2 & -a(b-c)^3 & |A_4| & -c(b-a)^3 & c(b-a)^2(c-b) \\ -a(a-b)^2(b-c) & a(a-b)(b-c)^2 & -a(b-c)^3 & |A_4| & -c(b-a)^3 \\ a(a-b)^3 & -a(a-b)^2(b-c) & a(a-b)(b-c)^2 & -a(b-c)^3 & |A_4| \end{bmatrix}$$

$$C_6 = \begin{bmatrix} |A_5| & -c(b-a)^4 & c(b-a)^3(c-b) & -c(b-a)^2(c-b)^2 & c(b-a)(c-b)^3 & -c(c-b)^4 \\ -a(b-c)^4 & |A_5| & -c(b-a)^4 & c(b-a)^3(c-b) & -c(b-a)^2(c-b)^2 & c(b-a)(c-b)^3 \\ a(b-c)^3(a-b) & -a(b-c)^4 & |A_5| & -c(b-a)^4 & c(b-a)^3(c-b) & -c(b-a)^2(c-b)^2 \\ -a(b-c)^2(a-b)^2 & a(b-c)^3(a-b) & -a(b-c)^4 & |A_5| & -c(b-a)^4 & c(b-a)^3(c-b) \\ a(b-c)(a-b)^3 & -a(b-c)^2(a-b)^2 & a(b-c)^3(a-b) & -a(b-c)^4 & |A_5| & -c(b-a)^4 \\ -a(a-b)^4 & a(b-c)(a-b)^3 & -a(b-c)^2(a-b)^2 & a(b-c)^3(a-b) & -a(b-c)^4 & |A_5| \end{bmatrix}$$

$$C_7 = \begin{bmatrix} |A_6| & -c.(b-a)^5 & c.(b-a)^4(c-b) & -c.(b-a)^3(c-b)^2 & c.(b-a)^2(c-b)^3 & -c.(b-a)(c-b)^4 & c.(c-b)^5 \\ -a.(b-c)^5 & |A_6| & -c.(b-a)^5 & c.(b-a)^4(c-b) & -c.(b-a)^3(c-b)^2 & c.(b-a)^2(c-b)^3 & -c.(b-a)(c-b)^4 \\ a.(b-c)^4(a-b) & -a.(b-c)^5 & |A_6| & -c.(b-a)^5 & c.(b-a)^4(c-b) & -c.(b-a)^3(c-b)^2 & c.(b-a)^2(c-b)^3 \\ -a.(b-c)^3(a-b)^2 & a.(b-c)^4(a-b) & -a.(b-c)^5 & |A_6| & -c.(b-a)^5 & c.(b-a)^4(c-b) & -c.(b-a)^3(c-b)^2 \\ a.(b-c)^2(a-b)^3 & -a.(b-c)^3(a-b)^2 & a.(b-c)^4(a-b) & -a.(b-c)^5 & |A_6| & -c.(b-a)^5 & c.(b-a)^4(c-b) \\ -a.(b-c)(a-b)^4 & a.(b-c)^2(a-b)^3 & -a.(b-c)^3(a-b)^2 & a.(b-c)^4(a-b) & -a.(b-c)^5 & |A_6| & -c.(b-a)^5 \\ a.(a-b)^5 & -a.(b-c)(a-b)^4 & a.(b-c)^2(a-b)^3 & -a.(b-c)^3(a-b)^2 & a.(b-c)^4(a-b) & -a.(b-c)^5 & |A_6| \end{bmatrix}$$

$$C_8 = \begin{bmatrix} |A_7| & -c.(b-a)^6 & c.(b-a)^5(c-b) & -c.(b-a)^4(c-b)^2 & c.(b-a)^3(c-b)^3 & -c.(b-a)^2(c-b)^4 & c.(b-a)(c-b)^5 & -c.(c-b)^6 \\ -a.(b-c)^6 & |A_7| & -c.(b-a)^6 & c.(b-a)^5(c-b) & -c.(b-a)^4(c-b)^2 & c.(b-a)^3(c-b)^3 & -c.(b-a)^2(c-b)^4 & c.(b-a)(c-b)^5 \\ a.(b-c)^5(a-b) & -a.(b-c)^6 & |A_7| & -c.(b-a)^6 & c.(b-a)^5(c-b) & -c.(b-a)^4(c-b)^2 & c.(b-a)^3(c-b)^3 & -c.(b-a)^2(c-b)^4 \\ -a.(b-c)^4(a-b)^2 & a.(b-c)^5(a-b) & -a.(b-c)^6 & |A_7| & -c.(b-a)^6 & c.(b-a)^5(c-b) & -c.(b-a)^4(c-b)^2 & c.(b-a)^3(c-b)^3 \\ a.(b-c)^3(a-b)^3 & -a.(b-c)^4(a-b)^2 & a.(b-c)^5(a-b) & -a.(b-c)^6 & |A_7| & -c.(b-a)^6 & c.(b-a)^5(c-b) & -c.(b-a)^4(c-b)^2 \\ -a.(b-c)^2(a-b)^4 & a.(b-c)^3(a-b)^3 & -a.(b-c)^4(a-b)^2 & a.(b-c)^5(a-b) & -a.(b-c)^6 & |A_7| & -c.(b-a)^6 & c.(b-a)^5(c-b) \\ a.(b-c)(a-b)^5 & -a.(b-c)^2(a-b)^4 & a.(b-c)^3(a-b)^3 & -a.(b-c)^4(a-b)^2 & a.(b-c)^5(a-b) & -a.(b-c)^6 & |A_7| & -c.(b-a)^6 \\ -a.(a-b)^6 & a.(b-c)(a-b)^5 & -a.(b-c)^2(a-b)^4 & a.(b-c)^3(a-b)^3 & -a.(b-c)^4(a-b)^2 & a.(b-c)^5(a-b) & -a.(b-c)^6 & |A_7| \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dengan mengamati pola rekursif dari matriks kofaktor yang telah diperoleh, maka didapatkan persamaan umum matriks kofaktor dari matriks positif pada Persamaan (2) sebagai berikut :

$$C_n = \begin{bmatrix} (-1)^0|A_{n-1}| & (-1)^1 c.(b-a)^{n-2}.(c-b)^0 & (-1)^2 c.(b-a)^{n-3}.(c-b)^1 & \cdots & (-1)^{n-2} c.(b-a)^1.(c-b)^{n-3} & (-1)^{n-1} c.(b-a)^0.(c-b)^{n-2} \\ (-1)^1 a.(b-c)^{n-2}.(a-b)^0 & (-1)^0|A_{n-1}| & (-1)^1 c.(b-a)^{n-2}.(c-b)^0 & \cdots & (-1)^{n-3} c.(b-a)^2.(c-b)^{n-4} & (-1)^{n-2} c.(b-a)^1.(c-b)^{n-3} \\ (-1)^2 a.(b-c)^{n-3}.(a-b)^1 & (-1)^1 a.(b-c)^{n-2}.(a-b)^0 & (-1)^0|A_{n-1}| & \ddots & \vdots & (-1)^{n-3} c.(b-a)^2.(c-b)^{n-4} \\ (-1)^3 a.(b-c)^{n-4}.(a-b)^2 & (-1)^2 a.(b-c)^{n-3}.(a-b)^1 & (-1)^1 a.(b-c)^{n-2}.(a-b)^0 & \ddots & (-1)^1 c.(b-a)^{n-2}.(c-b)^0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & (-1)^0|A_{n-1}| & (-1)^1 c.(b-a)^{n-2}.(c-b)^0 \\ (-1)^{n-1} a.(b-c)^0.(a-b)^{n-2} & (-1)^{n-2} a.(b-c)^1.(a-b)^{n-3} & (-1)^{n-3} a.(b-c)^2.(a-b)^{n-4} & \cdots & (-1)^1 a.(b-c)^{n-2}.(a-b)^0 & (-1)^0|A_{n-1}| \end{bmatrix} \quad (6)$$

Setelah mendapatkan persamaan umum determinan dan matriks kofaktor dari matriks positif pada Persamaan (2), langkah selanjutnya adalah mendapatkan persamaan umum invers matriks positif pada Persamaan (2). Menentukan Persamaan umum invers matriks positif pada Persamaan (2) menggunakan Teorema 3, yaitu: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} adj(A)$. Untuk $\det(A)$ menggunakan Persamaan (5) dan $\text{adj}\ (A)$ adalah transpos dari Persamaan (6). Berikut Diberikan langkah-langkahnya:

$$A_2^{-1} = \frac{1}{\det(A_2)} adj(A_2) = \frac{1}{b^2 - ac} \begin{bmatrix} |A_1| & -a \\ -c & |A_1| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{b}{b^2 - ac} & \dfrac{-a}{b^2 - ac} \\ \dfrac{-c}{b^2 - ac} & \dfrac{b}{b^2 - ac} \end{bmatrix}$$

Dengan cara yang samadiperoleh:

$$A_3{}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{|A_2|}{|A_3|} & \frac{-a(b-c)}{|A_3|} & \frac{a(a-b)}{|A_3|} \\ \frac{-c(b-a)}{|A_3|} & \frac{|A_2|}{|A_3|} & \frac{-a(b-c)}{|A_3|} \\ \frac{c(c-b)}{|A_3|} & \frac{-c(b-a)}{|A_3|} & \frac{|A_2|}{|A_3|} \end{bmatrix}$$

$$A_4{}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{|A_3|}{|A_4|} & \frac{-a(b-c)^2}{|A_4|} & \frac{a(b-c)(a-b)}{|A_4|} & \frac{-a(a-b)^2}{|A_4|} \\ \frac{-c(b-a)^2}{|A_4|} & \frac{|A_3|}{|A_4|} & \frac{-a(b-c)^2}{|A_4|} & \frac{a(b-c)(a-b)}{|A_4|} \\ \frac{c(b-a)(c-b)}{|A_4|} & \frac{-c(b-a)^2}{|A_4|} & \frac{|A_3|}{|A_4|} & \frac{-a(b-c)^2}{|A_4|} \\ \frac{-c(c-b)^2}{|A_4|} & \frac{c(b-a)(c-b)}{|A_4|} & \frac{-c(b-a)^2}{|A_4|} & \frac{|A_3|}{|A_4|} \end{bmatrix}$$

$$A_5{}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{|A_4|}{|A_5|} & \frac{-a.(b-c)^3}{|A_5|} & \frac{a.(b-c)^2(a-b)}{|A_5|} & \frac{-a.(b-c)(a-b)^2}{|A_5|} & \frac{a.(a-b)^3}{|A_5|} \\ \frac{-c.(b-a)^3}{|A_5|} & \frac{|A_4|}{|A_5|} & \frac{-a.(b-c)^3}{|A_5|} & \frac{a.(b-c)^2(a-b)}{|A_5|} & \frac{-a.(b-c)(a-b)^2}{|A_5|} \\ \frac{c.(c-b)(b-a)^2}{|A_5|} & \frac{-c.(b-a)^3}{|A_5|} & \frac{|A_4|}{|A_5|} & \frac{-a.(b-c)^3}{|A_5|} & \frac{a.(b-c)^2(a-b)}{|A_5|} \\ \frac{-c.(c-b)^2(b-a)}{|A_5|} & \frac{c.(c-b)(b-a)^2}{|A_5|} & \frac{-c.(b-a)^3}{|A_5|} & \frac{|A_4|}{|A_5|} & \frac{-a.(b-c)^3}{|A_5|} \\ \frac{c.(c-b)^3}{|A_5|} & \frac{-c.(c-b)^2(b-a)}{|A_5|} & \frac{c.(c-b)(b-a)^2}{|A_5|} & \frac{-c.(b-c)^3}{|A_5|} & \frac{|A_4|}{|A_5|} \end{bmatrix}$$

$$A_6{}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{|A_5|}{|A_6|} & \frac{-a.(b-c)^4}{|A_6|} & \frac{a.(b-c)^3(a-b)}{|A_6|} & \frac{-a.(b-c)^2(a-b)^2}{|A_6|} & \frac{a.(b-c)(a-b)^3}{|A_6|} & \frac{-a.(a-b)^4}{|A_6|} \\ \frac{-c.(b-a)^4}{|A_6|} & \frac{|A_5|}{|A_6|} & \frac{-a.(b-c)^4}{|A_6|} & \frac{a.(b-c)^3(a-b)}{|A_6|} & \frac{-a.(b-c)^2(a-b)^2}{|A_6|} & \frac{a.(b-c)(a-b)^3}{|A_6|} \\ \frac{c.(b-a)^3(c-b)}{|A_6|} & \frac{-c.(b-a)^4}{|A_6|} & \frac{|A_5|}{|A_6|} & \frac{-a.(b-c)^4}{|A_6|} & \frac{a.(b-c)^3(a-b)}{|A_6|} & \frac{-a.(b-c)^2(a-b)^2}{|A_6|} \\ \frac{-c.(b-a)^2(c-b)^2}{|A_6|} & \frac{c.(b-a)^3(c-b)}{|A_6|} & \frac{-c.(b-a)^4}{|A_6|} & \frac{|A_5|}{|A_6|} & \frac{-a.(b-c)^4}{|A_6|} & \frac{a.(b-c)^3(a-b)}{|A_6|} \\ \frac{c.(b-a)(c-b)^3}{|A_6|} & \frac{-c.(b-a)^2(c-b)^2}{|A_6|} & \frac{c.(b-a)^3(c-b)}{|A_6|} & \frac{-c.(b-a)^4}{|A_6|} & \frac{|A_5|}{|A_6|} & \frac{-a.(b-c)^4}{|A_6|} \\ \frac{-c.(c-b)^4}{|A_6|} & \frac{c.(b-a)(c-b)^3}{|A_6|} & \frac{-c.(b-a)^2(c-b)^2}{|A_6|} & \frac{c.(b-a)^3(c-b)}{|A_6|} & \frac{-c.(b-a)^4}{|A_6|} & \frac{|A_5|}{|A_6|} \end{bmatrix}$$

$$A_7{}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{|A_6|}{|A_7|} & \frac{-a.(b-c)^5}{|A_7|} & \frac{a.(b-c)^4(a-b)}{|A_7|} & \frac{-a.(b-c)^3(a-b)^2}{|A_7|} & \frac{a.(b-c)^2(a-b)^3}{|A_7|} & \frac{-a.(b-c)(a-b)^4}{|A_7|} & \frac{a.(a-b)^5}{|A_7|} \\ \frac{-c.(b-a)^5}{|A_7|} & \frac{|A_6|}{|A_7|} & \frac{-a.(b-c)^5}{|A_7|} & \frac{a.(b-c)^4(a-b)}{|A_7|} & \frac{-a.(b-c)^3(a-b)^2}{|A_7|} & \frac{a.(b-c)^2(a-b)^3}{|A_7|} & \frac{-a.(b-c)(a-b)^4}{|A_7|} \\ \frac{c.(b-a)^4(c-b)}{|A_7|} & \frac{-c.(b-a)^5}{|A_7|} & \frac{|A_6|}{|A_7|} & \frac{-a.(b-c)^5}{|A_7|} & \frac{a.(b-c)^4(a-b)}{|A_7|} & \frac{-a.(b-c)^3(a-b)^2}{|A_7|} & \frac{a.(b-c)^2(a-b)^3}{|A_7|} \\ \frac{-c.(b-a)^3(c-b)^2}{|A_7|} & \frac{c.(b-a)^4(c-b)}{|A_7|} & \frac{-c.(b-a)^5}{|A_7|} & \frac{|A_6|}{|A_7|} & \frac{-a.(b-c)^5}{|A_7|} & \frac{a.(b-c)^4(a-b)}{|A_7|} & \frac{-a.(b-c)^3(a-b)^2}{|A_7|} \\ \frac{c.(b-a)^2(c-b)^3}{|A_7|} & \frac{-c.(b-a)^3(c-b)^2}{|A_7|} & \frac{c.(b-a)^4(c-b)}{|A_7|} & \frac{-c.(b-a)^5}{|A_7|} & \frac{|A_6|}{|A_7|} & \frac{-a.(b-c)^5}{|A_7|} & \frac{a.(b-c)^4(a-b)}{|A_7|} \\ \frac{-c.(b-a)(c-b)^4}{|A_7|} & \frac{c.(b-a)^2(c-b)^3}{|A_7|} & \frac{-c.(b-a)^3(c-b)^2}{|A_7|} & \frac{c.(b-a)^4(c-b)}{|A_7|} & \frac{-c.(b-a)^5}{|A_7|} & \frac{|A_6|}{|A_7|} & \frac{-a.(b-c)^5}{|A_7|} \\ \frac{c.(c-b)^5}{|A_7|} & \frac{-c.(b-a)(c-b)^4}{|A_7|} & \frac{c.(b-a)^2(c-b)^3}{|A_7|} & \frac{-c.(b-a)^3(c-b)^2}{|A_7|} & \frac{c.(b-a)^4(c-b)}{|A_7|} & \frac{-c.(b-a)^5}{|A_7|} & \frac{|A_6|}{|A_7|} \end{bmatrix}$$

$$A_8^{-1} = \begin{bmatrix}
\frac{|A_7|}{|A_8|} & \frac{-a.(b-c)^6}{|A_8|} & \frac{a(b-c)^5(a-b)}{|A_8|} & \frac{-a.(b-c)^4(a-b)^2}{|A_8|} & \frac{a.(b-c)^3(a-b)^3}{|A_8|} & \frac{-a.(b-c)^2(a-b)^4}{|A_8|} & \frac{a.(b-c)(a-b)^5}{|A_8|} & \frac{-a.(a-b)^6}{|A_8|} \\
\frac{-c.(b-a)^6}{|A_8|} & \frac{|A_7|}{|A_8|} & \frac{-a(b-c)^6}{|A_8|} & \frac{a.(b-c)^5(a-b)}{|A_8|} & \frac{-a.(b-c)^4(a-b)^2}{|A_8|} & \frac{a.(b-c)^3(a-b)^3}{|A_8|} & \frac{-a.(b-c)^2(a-b)^4}{|A_8|} & \frac{a.(b-c)(a-b)^5}{|A_8|} \\
\frac{c.(b-a)^5(c-b)}{|A_8|} & \frac{-c.(b-a)^6}{|A_8|} & \frac{|A_7|}{|A_8|} & \frac{-a(b-c)^6}{|A_8|} & \frac{a.(b-c)^5(a-b)}{|A_8|} & \frac{-a.(b-c)^4(a-b)^2}{|A_8|} & \frac{a.(b-c)^3(a-b)^3}{|A_8|} & \frac{-a.(b-c)^2(a-b)^4}{|A_8|} \\
\frac{-c.(b-a)^4(c-b)^2}{|A_8|} & \frac{c.(b-a)^5(c-b)}{|A_8|} & \frac{-c.(b-a)^6}{|A_8|} & \frac{|A_7|}{|A_8|} & \frac{-a.(b-c)^6}{|A_8|} & \frac{a.(b-c)^5(a-b)}{|A_8|} & \frac{-a.(b-c)^4(a-b)^2}{|A_8|} & \frac{a.(b-c)^3(a-b)^3}{|A_8|} \\
\frac{c.(b-a)^3(c-b)^3}{|A_8|} & \frac{-c.(b-a)^4(c-b)^2}{|A_8|} & \frac{c.(b-a)^5(c-b)}{|A_8|} & \frac{-c.(b-a)^6}{|A_8|} & \frac{|A_7|}{|A_8|} & \frac{-a.(b-c)^6}{|A_8|} & \frac{a.(b-c)^5(a-b)}{|A_8|} & \frac{-a.(b-c)^4(a-b)^2}{|A_8|} \\
\frac{-c.(b-a)^2(c-b)^4}{|A_8|} & \frac{c.(b-a)^3(c-b)^3}{|A_8|} & \frac{-c.(b-a)^4(c-b)^2}{|A_8|} & \frac{c.(b-a)^5(c-b)}{|A_8|} & \frac{-c.(b-a)^6}{|A_8|} & \frac{|A_7|}{|A_8|} & \frac{-a.(b-c)^6}{|A_8|} & \frac{a.(b-c)^5(a-b)}{|A_8|} \\
\frac{c.(b-a)(c-b)^5}{|A_8|} & \frac{-c.(b-a)^2(c-b)^4}{|A_8|} & \frac{c.(b-a)^3(c-b)^3}{|A_8|} & \frac{-c.(b-a)^4(c-b)^2}{|A_8|} & \frac{c.(b-a)^5(c-b)}{|A_8|} & \frac{-c.(b-a)^6}{|A_8|} & \frac{|A_7|}{|A_8|} & \frac{-a.(b-c)^6}{|A_8|} \\
\frac{-c.(c-b)^6}{|A_8|} & \frac{c.(b-a)(c-b)^5}{|A_8|} & \frac{-c.(b-a)^2(c-b)^4}{|A_8|} & \frac{c.(b-a)^3(c-b)^3}{|A_8|} & \frac{-c.(b-a)^4(c-b)^2}{|A_8|} & \frac{c.(b-a)^5(c-b)}{|A_8|} & \frac{-c.(b-a)^6}{|A_8|} & \frac{|A_7|}{|A_8|}
\end{bmatrix}$$

Selanjutnya dengan mengamati pola rekursif dari invers matriks yang telah diperoleh, maka didapatkan persamaan umum invers matriks positif pada Persamaan (2) sebagai berikut :

$$A_n^{-1} = \begin{bmatrix}
\frac{(-1)^0|A_{n-1}|}{|A_n|} & \frac{(-1)^1 a.(b-c)^{n-2}.(a-b)^0}{|A_n|} & \frac{(-1)^2 a.(b-c)^{n-3}.(a-b)^1}{|A_n|} & \cdots & \frac{(-1)^{n-2} a.(b-c)^1.(a-b)^{n-3}}{|A_n|} & \frac{(-1)^{n-1} a.(b-c)^0.(a-b)^{n-2}}{|A_n|} \\
\frac{(-1)^1 c.(b-a)^{n-2}.(c-b)^0}{|A_n|} & \frac{(-1)^0|A_{n-1}|}{|A_n|} & \frac{(-1)^1 a.(b-c)^{n-2}.(a-b)^0}{|A_n|} & \cdots & \frac{(-1)^2 a.(b-c)^2.(a-b)^{n-4}}{|A_n|} & \frac{(-1)^{n-2} a.(b-c)^1.(a-b)^{n-3}}{|A_n|} \\
\frac{(-1)^2 c.(b-a)^{n-3}.(c-b)^1}{|A_n|} & \frac{(-1)^1 c.(b-a)^{n-2}.(c-b)^0}{|A_n|} & \frac{(-1)^0|A_{n-1}|}{|A_n|} & \ddots & \vdots & \frac{(-1)^{n-3} a.(b-c)^2.(a-b)^{n-4}}{|A_n|} \\
\frac{(-1)^3 c(b-a)^{n-4}.(c-b)^2}{|A_n|} & \frac{(-1)^2 c.(b-a)^{n-3}.(c-b)^1}{|A_n|} & \frac{(-1)^1 c.(b-a)^{n-2}.(c-b)^0}{|A_n|} & \ddots & \frac{(-1)^1 a.(b-c)^{n-2}.(a-b)^0}{|A_n|} & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \frac{(-1)^0|A_{n-1}|}{|A_n|} & \frac{(-1)^1 a.(b-c)^{n-2}.(a-b)^0}{|A_n|} \\
\frac{(-1)^{n-1} c.(b-a)^0.(c-b)^{n-2}}{|A_n|} & \frac{(-1)^{n-2} c.(b-a)^1.(c-b)^{n-3}}{|A_n|} & \frac{(-1)^{n-3} c.(b-a)^2.(a-c)^{n-4}}{|A_n|} & \cdots & \frac{(-1)^1 c.(b-a)^{n-2}.(c-b)^0}{|A_n|} & \frac{(-1)^0|A_{n-1}|}{|A_n|}
\end{bmatrix} \quad (7)$$

Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan, maka dapat disimpulkan terdapat tiga buah persamaan umum dari matriks positif pada Persamaan (2), yaitu: Persamaan umum untuk determinan matriks pada (5), persamaan umum untuk matriks kofaktor pada (6) dan persamaan umum untuk invers matriksnya pada (7). Sehingga untuk menentukan invers matriks positif pada (2), tidak perlu lagi menggunakan langkah-langkah yang panjang. Cukup mensubsitusikan nilai n juga nilai a, b, dan c yang diberikan.

Saran:

Penelitian ini membahas tentang invers matriks positif pada (2). Disarankan kepada para pembaca untuk dapat melanjutkan penelitian yang berkaitan dengan determinan, matriks kofaktor ataupun invers matriks seperti menentukan nilai eigen dan vektor eigen. Pembaca juga bisa melanjutkan penelitian ini dengan mencari invers dari matriks yang berbeda.

Daftar Pustaka

[1] Anton, Howard dan Rorres, Chris. "*Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi*". Edisi kedelapan. Erlangga, Jakarta. 2004.
[2] Aryani Fitri dan Corazon C.M."Inverse of Tridiagonal Toeplitz Matrix By Adjoint Method" Proceeding IcoSTechS, Pekanbaru. 2016
[3] 'Imrona, Mahmud. "*Aljabar Linear Dasar*". Edisi Kedua. Erlangga: Bandung. 2012.
[4] Leon, Steven J. " Aljabar Linear dan Aplikasinya". Edisi Kelima. Erlangga, Jakarta. 2001
[5] Oktavia, Nanda. "*Determinan Matriks Tak Negatif Menggunakan Metode Ekspansi Kofaktor*". *Skripsi* Fakultas Sains dan Teknologi, Jurusan Matematika, UIN SUSKA Riau. 2016.
[6] Siregar, Bakti, dkk.. "Invers Suatu Matriks Toeplitz Menggunakan Metode Adjoin". *Saintia Matematika*, 02. (01). 85-94. 2014.