Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 3, No. 1, Januari 2017
ISSN 1693-2390 print/ISSN 2407-0939 online

Nilai Ketakteraturan Total dari Graf Hasil Kali *Comb* P_m dan C_3

Corry Corazon Marzuki[1], Riana Riandari[2]
[1,2] Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: corrazon_m@yahoo.co.id, rianariandarissi@gmail.com

ABSTRAK

Misalkan graf $G = (V, E)$ dan k adalah bilangan bulat positif. Pelabelan-k total pada G adalah suatu pemetaan $\lambda : V \cup E \rightarrow \{1,2, \ldots, k\}$. Bobot titik x dinyatakan dengan $wt(x) = \lambda(x) + \sum_{ux \in E} \lambda(ux)$ dan bobot sisi xy dinyatakan dengan $wt(xy) = \lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y)$. Suatu pelabelan-$k$ total pada G dikatakan tak teratur total, jika bobot setiap titik berbeda dan bobot setiap sisi juga berbeda. Nilai k terkecil sehingga G memiliki pelabelan-k total tak teratur total disebut dengan nilai ketak teraturan total (*totally irregularity strength*) pada G, dinotasikan dengan $ts(G)$. Pada makalah ini kita didapatkan $ts(P_m \rhd C_3) = \left\lceil \frac{4m+1}{3} \right\rceil$ dengan m adalah bilangan bulat positif dan $m \leq 17$.

Katakunci: *hasil kali comb, nilai ketakteraturan total, pelabelan total takteratur total.*

ABSTRACT

Let graph $G = (V, E)$ and k is a positive integer. Total k-labeling on G is a mapping $\lambda : V \cup E \rightarrow \{1,2, \ldots, k\}$. The weight of the vertex x is represented by $wt(x) = \lambda(x) + \sum_{ux \in E} \lambda(ux)$ and the weight of the edge xy is represented by $wt(xy) = \lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y)$. A total k-labeling of G is called atotally irregular total labeling, if the weight of every two distinct vertices are different and the weight of every two distinct edges are different. The minimum k such that a graph G has a totally irregular total k-labeling is called the total irregularity strength of G, denoted by $ts(G)$. In this research, we will get the ts($P_m \rhd C_3$) $= \left\lceil \frac{4m+1}{3} \right\rceil$ where m is a positive integerand $m \leq 17$.

Keywords: *The comb product, total irregularity strength, totally irregular total labeling.*

Pendahuluan

Dalam ilmu matematika, graf didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) yang dinotasikan dengan $G = (V, E)$, dalam hal ini Vadalah himpunan tidak kosong dari titik-titik, dimana $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dan E adalah himpunan sisi yang menghubungkan sepasang titik, dimana $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

Pelabelan graf adalah suatu pemetaan yang memetakan elemen suatu graf G (titik atau sisi) ke bilangan bulat positif. Jika domain dari pemetaan adalah titik, maka pelabelan disebut pelabelan titik (*vertex labeling*), jika domainnya adalah sisi maka pelabelan disebut pelabelan sisi (*edge labeling*), dan jika domainnya adalah titik dan sisi maka pelabelan disebut pelabelan total (*total labeling*). Jenis pelabelan graf yang telah dikaji diantaranya adalah pelabelan *graceful*, pelabelan cermin, pelabelan tak teratur, pelabelan harmoni, pelabelan ajaib, dan pelabelan anti ajaib.

Baca M., dkk. [3] memperkenalkan pelabelan total tak teratur yang terdiri dari dua jenis yaitu pelabelan total tak teratur titik dan pelabelan total tak teratur sisi. Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf, maka bobot titik $x \in V(G)$ adalah $wt(x) = \lambda(x) + \sum_{xy \in E} \lambda(xy)$ dan bobot sisi $e \in E(G)$ adalah $wt(e) = \lambda(x_1) + \lambda(e) + \lambda(x_2)$. Pelabelan $\lambda : V \cup E \rightarrow \{1,2, \ldots, k\}$ dikatakan pelabelan-k total takteratur titik di G, jika setiap dua titik berbeda x dan y di

V memenuhi $wt(x) \neq wt(y)$. Nilai total ketakteraturan titik dari graf G yaitu label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan total takteratur titik, yang dinotasikan dengan $tvs(G)$. Pelabelan $\lambda : V \cup E \rightarrow \{1,2,\ldots,k\}$ dikatakan pelabelan-k total takteratur sisi di G, jika untuk setiap dua sisi berbeda e dan f pada E memenuhi $wt(e) \neq wt(f)$. Nilai total ketakteraturan sisi yaitu label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan total takteratur sisi, yang dinotasikan dengan *tes(G).*

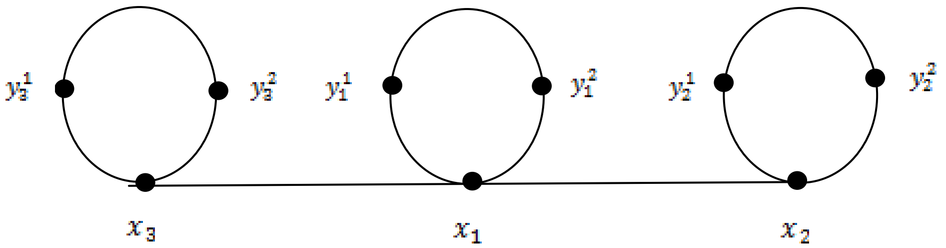
C.C Marzuki, dkk. [4] mengkombinasikan kedua pelabelan total tak teratur titik dan pelabelan total tak teratur sisi ke dalam sebuah pelabelan baru yang disebut pelabelan total tak teratur total. Suatu pelabelan total $\lambda : V \cup E \rightarrow \{1,2,\ldots,k\}$ disebut pelabelan-k total tak teratur total dari G jika setiap dua titik x dan y yang berbeda maka $wt(x) \neq wt(y)$ dan setiap dua sisi x_1x_2 dan y_1y_2 yang berbeda maka $wt(x_1x_2) \neq wt(y_1y_2)$, dimana $wt(x_1x_2) = \lambda(x_1) + \lambda(x_1x_2) + \lambda(x_2)$. Nilai minimum k sehingga G memiliki pelabelan-k total tak teratur total disebut nilai total ketakteraturan total dari G, yang dinotasikan dengan $ts(G)$. Seperti yang telah dilakukan penelitian sebelummnya oleh Baca M., dkk. [3], Rismawati R., dkk. [7] dan Slamin, dkk. [8] .

Bahan dan MetodePenelitian

Definisi 1 [6] Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E), yang dinotasikan dengan $G = (V, E)$, yang dalam hal ini$V$ adalah himpunan tidak-kosong dari simpul-simpul (*vertices atau node*) dan E adalah himpunan sisi (*edges atau arcs*) yang menghubungkan sepasang simpul.

Definisi 2 [5] Diberikan graf hasil kali *comb* dari G dan H, yang dinotasikan dengan $G \trianglerighteq H$, adalah sebuah graf yang diperoleh dengan melakukan satu penggandaan pada graf G dan menggandakan graf H sebanyak jumlah titik pada graf G, kemudian diberikan titik o sebagai titik cangkok, dan mencangkokkan penggandaan graf H ke-i pada titik o di graf H ke titik ke-i dari graf G.

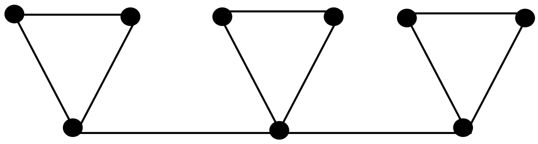
Gambar 1 berikut merupakan graf hasil kali *comb* P_3 dan C_3.



Gambar1 Graf $P_3 \trianglerighteq C_3$

Definisi 3 [1] Hasil kali korona $G_1 \odot G_2$ dari dua graf G_1 dan G_2 didefinisikan sebagai graf G yang diperoleh dengan membuat satu penggandaan dari graf G_1 yang mempunyai P_1 titik dan menggandakan graf G_2 sebanyak P_1 kemudian menghubungkan titik ke-i graf G_1 ke setiap titik hasil penggandaan graf G_2 ke-i.

Gambar 2 berikut merupakan grafhasil kali korona P_3 dan P_2.



Gambar 2 $P_3 \odot P_2$

Dari Gambar 1 dan 2 dapat dilihat bahw agraf $P_3 \trianglerighteq C_3$ sama dengan graf $P_3 \odot P_2$. Berdasarkan Definisi 1 dan 2, dapat diketahui secara umum bahwa graf $P_m \trianglerighteq C_3$ sama dengan graf $P_m \odot P_2$.

Berikut diberikan definisi dari nilai total ketakteraturan sisi.

Definisi 4 [3] Suatugraf $G = (V, E)$ dengan himpunan titik tak kosong V dan himpunan sisi E. Pelabelan $\lambda : V \cup E \to \{1, 2, \ldots, k\}$ dikatakan pelabelan-k total takteratur sisi di G, jika setiap dua sisi berbeda x_1x_2 dan y_1y_2 di E memenuhi $wt(x_1x_2) \neq wt(y_1y_2)$. Nilai total ketakteraturan sisi dari graf G yaitu label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan total takteratur sisi, yang dinotasikandengan $tes(G)$.

Berikut adalah batas atas dan bawah dari nilai total ketakteraturan sisi.

Teorema5 [3] Misalkan $G = (V, E)$ sebuah graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi takkosong E maka, $\left\lceil \frac{|E| + 2}{3} \right\rceil \leq tes(G) \leq |E|$.

Berikut diberikan definisi dari nilai total ketakteraturan titik.

Definisi 6 [3] Suatu graf $G = (V, E)$ dengan himpunan titik tak kosong V dan himpunan sisi E. Pelabelan $\lambda : V \cup E \to \{1, 2, \ldots, k\}$ dikatakan pelabelan-k total takteratur titik di G, jika setiap dua titik berbeda x dan y di V memenuhi $wt(x) \neq wt(y)$. Nilai total ketakteraturan titik dari graf G yaitu label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan total tak teratur titik, yang dinotasikan dengan $tvs(G)$.

Berikut adalah batas atas dan bawah dari nilai total ketakteraturan titik.

Teorema 7 [3] Misalkan G adalah graf (p, q) dengan derajat minimum δ dan derajat maksimum Δ maka, $\left\lceil \frac{p + \delta}{\Delta + 1} \right\rceil \leq tvs(G) \leq p + \Delta - 2\delta + 1$.

Definisi 8 [4] Misalkan $G = (V, E)$ sebuah graf. Pelabelan $\lambda : V \cup E \to \{1, 2, \ldots, k\}$ pada G adalah pelabelan total takteratur total, jika untuk setiap dua titik berbeda x dan y pada G maka $wt(x) \neq wt(y)$ dan untuk setiap dua sisi berbeda x_1x_2 dan y_1y_2 pada G maka $wt(x_1x_2) \neq wt(y_1y_2)$. Nilai ketakteraturan total yaitu label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeligraf G dengan pelabelan total takteratur total, yang dinotasikan dengan *ts(G)*.

Untuk mendapatkan batas bawah dari nilai ketakteraturan total, digunakan observasi 5 berikut.

Observasi 9 [4] Untuk setiap graf G berlaku, $\max\{tes(G), tvs(G)\} \leq ts(G)$.

Untuk mendapatkan batas bawah dari graf $P_m \rhd C_3$ digunakan nilai $tvs(P_m \odot P_2)$ yang diperoleh pada Teorema 6 berikut.

Teorema10 [2] Untuk $m \geq 2$ dan m bilangan genap, $tvs(P_m \odot P_2) = \left\lceil \frac{2m+2}{3} \right\rceil$.

Adapun metodologi penelitian yang penulis lakukan dalam penelitian ini berupa langkah-langkah sebagai berikut:

1. Menentukan batas bawah dar i$P_m \rhd C_3)$ untuk $m \geq 2$ dengan menggunakan Teorema 3.
2. Untuk batas bawah dari $P_m \rhd C_3)$ untuk $m \geq 2$ digunakan Teorema6.
3. Menentukan batas bawah dari $_n \rhd C_3)$ untuk $m \geq 2$ menggunakan Observasi 5.
4. Menentukan pelabelan total takteratur total darigraf $\rhd C_3$ untuk $m \geq 2$.
5. Menentukan rumus untuk pelabelan sisi dari graf $\rhd C_3$ untuk $m \geq 2$, dengan mengacu pada pelabelan yang terdapat pada Langkah 4.
6. Menentukan rumus untuk pelabelan titik dari graf $\rhd C_3$ untuk $m \geq 2$, dengan mengacu pada pelabelan yang terdapat pada Langkah 4.
7. Menentukan rumus untuk bobot sisi dari graf $\rhd C_3$ untuk $m \geq 2$ menggunakan rumus yang diperoleh pada Langkah 5 dan Langkah 6.
8. Menentukan rumus untuk bobot titik dari graf $\rhd C_3$ untuk $m \geq 2$, menggunakan rumus yang diperoleh pada Langkah 5 dan Langkah 6.
9. Merumuskan $_n \rhd C_3)$ untuk $m \geq 2$ berdasarkan label terbesar yang digunakan pada Langkah 5 dan Langkah 6.
10. Mengaplikasikan rumus nilai ketakteraturan total darigraf $\rhd C_3$ yang diperoleh pada Langkah 9 untuk $m = 7$.

Hasil dan Pembahasan

Graf hasil kali *comb* dari suatu graf P_m dengan C_3, dinotasikan dengan $P_m \rhd C_3$ merupakan sebuah graf yang diperoleh dengan menggandakan graf C_3 sebanyak m, kemudian salah satu titik di graf C_3 yang ke-i dihubungkan dengan titik ke-i di graf P_m, sehingga jumlah titik di graf $P_m \rhd C_3$ adalah $3m$ dan jumlah sisinya adalah $4m - 1$. Berikut ketentuan yang harus dilakukan dalam pemberian nama pada titik dan sisi graf $P_m \rhd C_3$ dengan $m \leq 17$:

a. Pemberian nama pada titik di graf P_m

   Untuk m ganjil, graf P_m adalah graf lintasan $x_{m-1}e_{m-2}x_{m-3}e_{m-4} \dots x_2e_1x_1e_2x_3 \dots e_{m-3}x_{m-2}e_{m-1}x_m$. Sedangkan untuk m genap, graf P_m adalah graf lintasan $x_me_{m-1}x_{m-2}x_{m-3} \dots e_3x_2e_1x_1e_2x_3e_4 \dots x_{m-3}e_{m-2}x_{m-1}$.

b. Pemberian nama pada titik di graf C_3

   Labeli titik pada C_3 yang ke-i dengan x_i, y_i^1, y_i^2 secara berurutan searah jarum jam.

Teorema 11 Untuk m bilangan bulat positif dengan $m \leq 17$ berlaku $ts(P_m \rhd C_3) = \left\lceil \frac{4m+1}{3} \right\rceil$.

Bukti :

Perhatikan bahwa banyaknya sisi pada graf $P_m \rhd C_3$ adalah $|E(P_m \rhd C_3)| = (m-1) + 3m = 4m - 1$. Berdasarkan Teorema 3, diperoleh $\left\lceil \frac{4m+1}{3} \right\rceil \leq tes(P_m \rhd C_3) \leq 4m - 1$. Jadi, terbukti bahwa $tes(P_m \rhd C_3) \geq \left\lceil \frac{4m+1}{3} \right\rceil$.

Berdasarkan Observasi 5 diperoleh bahwa $ts(P_m \rhd C_3) \geq max\{tes(P_m \rhd C_3), tvs(P_m \rhd C_3)\}$. Berdasarkan Teorema 6, didapatkan bahwa $tvs(P_m \rhd C_3) = \left\lceil \frac{2m+2}{3} \right\rceil$, sehingga $ts(P_m \rhd C_3) \geq max\left\{tes(P_m \rhd C_3), \left\lceil \frac{2m+2}{3} \right\rceil\right\}$. Karena $tes(P_m \rhd C_3) \geq \left\lceil \frac{4m+1}{3} \right\rceil$ dan $\left\lceil \frac{4m+1}{3} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{2m+2}{3} \right\rceil \; \forall m \in Z$, maka diperoleh $ts(P_m \rhd C_3) \geq \left\lceil \frac{4m+1}{3} \right\rceil$.

Selanjutnya akan dibuktikan $ts(P_m \rhd C_3) \leq \left\lceil \frac{4m+1}{3} \right\rceil$. Hal ini akan dibuktikan dengan cara menunjukkan adanya pelabelan-$\left\lceil \frac{4m+1}{3} \right\rceil$ total takteratur total padagraf $P_m \rhd C_3$. Misalkan $r_i = \left\lceil \frac{4i+1}{3} \right\rceil$. Definisikan pelabelan titik dan pelabelan sisipada graf $P_m \rhd C_3$ sebagai berikut.

a. Pelabelan sisi pada graf $P_m \rhd C_3$ dengan $m \leq 17$:

$$\lambda(y_i^1 y_i^2) = \begin{cases} r_i - 1 & ; \text{jika } i = 1 \leq i \leq 3 \text{ atau } i = 16 \\ r_i - 3 & ; \text{jika } i = 4,7, \text{dan } 15 \\ r_i - 4 & ; \text{jika } i = 9 \\ r_i - 2 & ; \text{jika } i \text{ lainnya} \end{cases} \tag{1}$$

$$\lambda(x_i y_i^1) = \begin{cases} r_i - 3 & ; \text{jika } i = 12 \text{ dan } 15 \\ r_i - 2 & ; \text{jika } 4 \leq i \leq 13 \text{ dan } i (\text{mod } 3) = 1 \text{ atau } i = 9 \\ r_i & ; \text{jika } i = 2 \\ r_i - 1 & ; \text{jika } i \text{ lainnya} \end{cases} \tag{2}$$

$$\lambda(x_i y_i^2) = \begin{cases} r_i - 1 & ; \text{jika } i \ (\text{mod } 3) = 0 \text{ dan } i \neq 6 \text{ dan } 16 \text{ atau i} - 4 \text{ dan } 7 \\ r_i & ; \text{jika } i \text{ lainnya} \end{cases} \tag{3}$$

$$\lambda(x_1 x_2) = 1 \tag{4}$$

$$\lambda(x_i x_{i+2}) = \begin{cases} \left\lceil \frac{3i+3}{2} \right\rceil & ; \text{jika } i = 1 \\ r_i + 1 & ; \text{jika } i = 3,10,12, \text{dan } 13 \\ r_i + 2 & ; \text{jika } i \text{ lainnya} \end{cases} \tag{5}$$

b. Pelabelan titik pada graf $P_m \rhd C_3$ dengan $m \leq 17$:

$$\lambda(y_i^1) = \begin{cases} \left\lceil \frac{2i-1}{2} \right\rceil & ; \text{jika } i = 1 \text{ dan } 2 \\ r_i - 2 & ; \text{jika } i = 3 \\ r_i - 1 & ; \text{jika } i = 6 \text{ dan } 16 \\ r_i & ; \text{jika } i \text{ lainnya} \end{cases} \tag{6}$$

$$\lambda(y_i^2) = \begin{cases} r_i - 2 & ;\text{jika } i = 12 \\ r_i - 1 & ;\text{jika } i \pmod 3 = 1 \text{ dan } i \neq 4 \text{ dan } 7 \text{ atau } i = 3,6,5 \\ r_i & ;\text{jika } i \text{ lainnya} \end{cases} \quad (7)$$

$$\lambda(x_i) = \begin{cases} r_i - 1 & ;\text{jika } i = 6 \text{ dan } 9 \\ r_i & ;\text{jika } i \text{ lainnya} \end{cases} \quad (8)$$

Adapun rumus umum untuk setiap bobot sisi dan bobot titik dari graf $P_m \trianglerighteq C_3$ dengan $m \leq 17$, sebagai berikut:

1. Bobot sisi dari graf $P_m \trianglerighteq C_3$ dengan $m \leq 17$, sebagai berikut :

$$wt(y_i^1 y_i^2) = \begin{cases} 3; & \text{jika } i = 1 \\ 7 & ;\text{jika } i = 2 \\ 3r_i - 4 & ;\text{jika } i \pmod 3 = 0 \\ 3r_i - 3 & ;\text{jika } i \pmod 3 = 1 \text{ dan } i \neq 1 \\ 3r_i - 2 & ;\text{jika } i \pmod 3 = 2 \text{ dan } i \neq 2 \end{cases}$$

$$wt(y_i^1 x_i) = \begin{cases} 4; & \text{jika } i = 1 \\ 8 & ;\text{jika } i = 2 \\ 3r_i - 3 & ;\text{jika } i \pmod 3 = 0 \\ 3r_i - 2 & ;\text{jika } i \pmod 3 = 1 \text{ dan } i \neq 1 \\ 3r_i - 1 & ;\text{jika } i \pmod 3 = 2 \text{ dan } i \neq 2 \end{cases}$$

$$wt(y_i{}^2 x_i) = \begin{cases} 3r_i - 2 & ;\text{jika } i \pmod 3 = 0 \\ 3r_i - 1 & ;\text{jika} i \pmod 3 = 1 \\ 3r_i & ;\text{jika } i \pmod 3 = 2 \end{cases}$$

$$wt(x_i x_{i+1}) = 2r_i + r_{i+1} - 1$$

$$wt(x_i x_{i+2}) = \begin{cases} r_i + \left\lceil \frac{3i+3}{2} \right\rceil + r_{i+2} & ;\text{jika } i = 1 \\ 2r_i + r_{i+2} + 2 & ;\text{jika } i = 2,5,8,11, \text{dan } 14 \\ 2r_i + r_{i+2} + 1 & ;\text{jika } i \text{ lainnya} \end{cases}$$

2. Bobot titik y_i^k dengan $k = 1$ dan 2 untuk $m \leq 17$ dari graf $P_m \trianglerighteq C_3$ adalah sebagai berikut:

$$wt(y_i^1) = \begin{cases} 3 & ;\text{jika } i = 1 \\ 7 & ;\text{jika } i = 2 \\ 3r_i - 4 & ;\text{jika } i = 3,6,10, \text{dan } 13 \\ 3r_i - 5 & ;\text{jika } i = 4,7, \text{dan } 12 \\ 3r_i - 3 & ;\text{jika } i(\text{mod } 3) = 2 \text{ atau } i = 16 \text{ dan } i \neq 2 \\ 3r_i - 6 & ;\text{jika } i = 9 \text{ dan } 15 \end{cases}$$

$$wt(y_i^2) = \begin{cases} 3r_i - 2 & ;\text{jika } i(\text{mod } 3) = 2 \text{ atau } i = 1 \text{ dan } 16 \\ 8 & ;\text{jika } i = 2 \\ 3r_i - 3 & ;\text{jika } i = 3,6,10, \text{dan } 13 \\ 3r_i - 4 & ;\text{jika } i = 4,7, \text{dan } 12 \\ 3r_i - 5 & ;\text{jika } i = 9 \text{ dan } 15 \end{cases}$$

3. Bobot titik x_i untuk $m \geq 3$ dan $1 \leq i \leq m-2$ dari graf $P_m \rhd C_3$ adalah sebagai berikut:

$$wt(x_i) = \begin{cases} 9 & ;\text{jika } i = 1 \\ 15 & ;\text{jika } i = 2 \\ 22 & ;\text{jika } i = 3 \\ 4r_i + 1 + r_{i-2} & ;\text{jika } i (\text{mod } 3) = 1 \\ 4r_i + 2 + r_{i-2} & ;\text{jika } i = 5{,}6 \text{ dan } 14 \\ 4r_i + 3 + r_{i-2} & ;\text{jika } i = 8 \text{ dan } 11 \\ 62 & ;\text{ jika } i = 9 \\ 81 & ;\text{jika } i = 12 \\ 100 & ;\text{jika } i = 15 \end{cases}$$

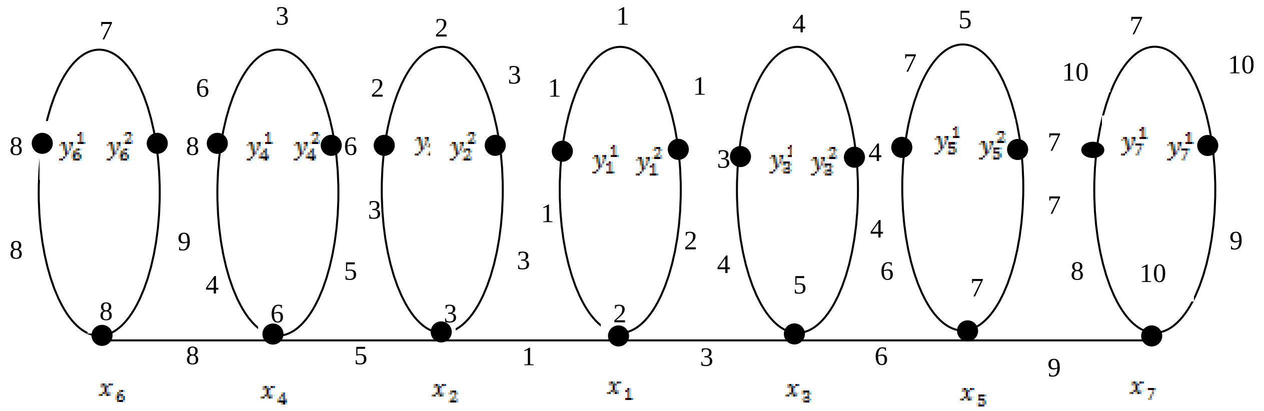
4. Bobok titik x_i untuk $1 \leq i \leq m$ dan $m \geq 1$ dari graf $P_m \rhd C_3$ adalah sebagai berikut:

$$wt(x_i) = \begin{cases} 5 & ;\text{ jika } i = 1 \\ 10 & ;\text{ jika } i = 2 \\ 16 & ;\text{jika } i = 3 \\ 3ri - 1 + r_{i-2} & ;\text{jika } i = 4 \text{ dan } 7 \\ 3ri + r_{i-2} & ;\text{ jika } i = 5{,}6{,}10{,}13{,}14, \text{ dan } 17 \\ 3ri + 1 + r_{i-2} & ;\text{jika } i = 8{,}11, \text{ dan } 16 \\ 3ri + 1 + r_{i-2} & ;\text{jika } i = 9 \text{ dan } 12 \\ 78 & ;\text{jika } i = 15 \end{cases}$$

Bobot sisi dari graf $P_m \rhd C_3$ adalah bilangan bulat positif berurutan dimulai dari 3 sampai ke $4m+1$, sehingga bobot sisinya tidak ada yang sama. Demikian juga dengan bobot titiknya tidak ada yang sama meskipun bukan merupakan bilangan bulat positif berurutan. Olehkarena itu, λ adalah pelabelan total takteratur total darigraf $P_m \rhd C_3$. Jadi, dapat disimpulkan bahwa $ts(P_m \rhd C_3) \leq \left\lceil \frac{4m+1}{3} \right\rceil$.

Berdasarkan penjelasan di atas diperoleh bahwa $ts(P_m \rhd C_3) \geq \left\lceil \frac{4m+1}{3} \right\rceil$ dan $ts(P_m \rhd C_3) \leq \left\lceil \frac{4m+1}{3} \right\rceil$. Jadi terbukti bahwa $ts(P_m \rhd C_3) = \left\lceil \frac{4m+1}{3} \right\rceil$. ■

Sebagai ilustrasi dari Teorema di atas diberikan contoh pelabelan total tak teratur total dari graf $P_m \rhd C_3$ dengan $ts(P_m \rhd C_3) = \left\lceil \frac{4m+1}{3} \right\rceil$. Dengan menggunakan rumus λ pada persamaan di atas, di peroleh pelabelan untuk $P_m \rhd C_3$ sebagai berikut:



Label terbesar yang digunakan adalah 10 dan berdasarkan bobot titik dan bobot sisi terbukti bahwa tidak ada dua sisi yang berbeda yang memiliki bobot yang sama dan tidak ada dua titik yang berbeda yang memiliki bobot yang sama. Jadi, pelabelan ini adalah pelabelan-10 total takteratur total pada graf $P_7 \rhd C_3$.

Kesimpulan

Berdasarkan uraian di atas dapat disimpulkan bahwa $ts(P_m \rhd C_3) = \left\lceil \frac{4m+1}{3} \right\rceil$ untuk m merupakan bilangan bulat positif dengan $m \leq 17$. Hal ini telah dibuktikan dengan $ts(P_m \rhd C_3) \geq \left\lceil \frac{4m+1}{3} \right\rceil$ dan $ts(P_m \rhd C_3) \leq \left\lceil \frac{4m+1}{3} \right\rceil$. Untuk $ts(P_m \rhd C_3) \leq \left\lceil \frac{4m+1}{3} \right\rceil$ dibuktikan dengan cara menunjukkan adanya pelabelan total tak teratur total pada graf $P_m \rhd C_3$ dengan menggunakan label maksimum $\left\lceil \frac{4m+1}{3} \right\rceil$.

Daftar Pustaka

[1] Harary, F. "*Graph Theory*". Philippines : Addison-Wesley Publishing Company. 1996.

[2] Lolita. "Nilai Total Ketakteraturan Titik dari Graf Hasil Kali Korona P_m dan P_2 ($P_m \odot P_2$)". Skripsi Mahasiswa Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. 2015.

[3] M. Baca, S. Jendrol, M Miller, J. Ryan, *" On Irregular Total Labelings, Discrete Math".* 307 (2007) 1378-1388.

[4] Marzuki C. C, dkk."On The Total Irregularity Srength of Cycles and Path". Vol 82. No. 1 Hal:1-21.

[5] Mega, dkk."Dimensi Metrik Lokal pada Graf Hasil Kali Comb dari Graf Siklus dan Graf Bintang".Vol. 1. Hal. 1-9, 2014.

[6] Munir Rinaldi. *"MatematikaDiskrit".* Informatika. Bandung. 2010.

[7] Rismawati R, dkk. "Nilai Total Ketakteraturan Total dari Dua Copy Graf Bintang". Vol VIII. No 2, 2014.

[8] Slamin, dkk. "Nilai Total Ketakteraturan Sisi dari Graf Siput". Vol 6. No. 1. Hal 105-104, 2015.