Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 3, No. 1, Januari 2017
ISSN 1693-2390 print/ISSN 2407-0939 online

Model Matematika Penyebaran Penyakit HIV/AIDS dengan Terapi pada Populasi Terbuka

M. Soleh[1], D. Fatmasari[2], M. N. Muhaijir[3]
[1, 2, 3] Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: *msoleh1975@yahoo.co.id, dfatmasari53@gmail.com*

ABSTRAK

AIDS merupakan kumpulan gejala penyakit yang disebabkan oleh infeksi dari *HIV* yang menyerang sistem kekebalan tubuh. Penelitian ini menjelaskan model matematika penyebaran penyakit *HIV/AIDS* dengan terapi pada populasi terbuka. Populasi dibagi menjadi empat subpopulasi, yaitu rentan terinfeksi *HIV*, terinfeksi *HIV*, *treatment*, dan pengidap *AIDS*. Berdasarkan analisis model terdapat satu titik ekuilibrium bebas penyakit HIV/AIDS dan satu titik ekuilibrium endemik penyakit *HIV/AIDS* serta bilangan reproduksi dasar R_0. Hasil uji kestabilan titik ekuilibrium menggunakan kriteria nilai eigen dan Routh Hurwitz diperoleh bahwa jika $R_0 < 1$, maka titik ekuilibrium bebas penyakit *HIV/AIDS* stabil asimtotik. Sedangkan, jika $R_0 > 1$, maka titik ekuilibirum endemik penyakit *HIV/AIDS* stabil asimtotik.

Kata Kunci: Rasio reproduksi dasar, stabil asimtotik, titik ekuilibrium.

ABSTRACT

AIDS is a collection of symptoms caused by infection of HIV attacks the immune system. This research explains the mathematical model of HIV/AIDS disease spread with therapy in open populations. The population is divided into four subpopulations, i.e. susceptible to HIV infection, HIV-infected, treatment, and people with AIDS. Based on model analysis there is one equilibrium point of free disease of HIV / AIDS and the equilibrium point endemic disease of HIV/AIDS with the basic reproduction number R_0. The stability test of the equilibrium point using the eigen value criterion and Routh Hurwitz obtained that if $R_0 < 1$, then the equilibrium point free disease of HIV/AIDS asymptotically stable. While, otherwise if $R_0 > 1$, then the point equilibrium disease endemic HIV/AIDS asymptotically stable.

Keywords: *Basic reproduction ratio, asymptotically stable, equilibrium point.*

Pendahuluan

AIDS (*acquired immunodeficiendy syndrome*) merupakan salah satu penyakit endemik di berbagai negara. Penyakit *AIDS* disebabkan oleh virus *HIV* (*human immunodifiency virus*) yang menyerang sistem imun dan menyebabkan penurunan kekebalan tubuh pada manusia sehingga manusia tersebut kehilangan kemampuan untuk melawan penyakit. Jika tubuh seseorang terdeteksi *HIV*, maka perlu waktu lima sampai sepuluh tahun seseorang yang positif terinfeksi *HIV* menjadi pengidap *AIDS* [9]. Data di tahun 2014, *HIV/AIDS* sudah menyebar di 386 kabupaten/kota di seluruh provinsi di Indonesia dengan jumlah manusia terinfeksi *HIV* sebanyak 150.296 orang, dan jumlah manusia terserang penyakit *AIDS* sebanyak 55.799 orang [2].

Penelitian tentang penyebaran penyakit *HIV/AIDS* pernah dilakukan oleh Haryanto dkk. [4], pada penelitian tersebut Haryanto dkk. mendapatkan model penyebaran *HIV/AIDS* dengan model *SIA* (*susceptible, infected*, *AIDS*) dalam bentuk populasi yang tertutup. Selanjutnya, Marsudi dkk. [6] juga melakukan penelitian mengenai mengevaluasi dampak program edukasi, skrining, dan terapi pada model penyebaran *HIV* denga populasi yang tertutup. El-hia dkk. [1] menghasilkan bentuk model penyebaran penyakit *HIV/AIDS* dengan tiga subpopulasi dalam populasi yang tertutup dan konstan. Dalam modelnya, E-hia dkk. membagi populasi total menjadi tiga kelas, yaitu *susceptible* (S) merupakan jumlah individu yang sehat tetapi rentan terinfeksi virus *HIV*, *infected*

(I) adalah jumlah individu yang terinfeksi virus *HIV* dan dapat menularkan kepada individu yang sehat, dan *AIDS* (A) yaitu jumlah populasi individu pengidap *AIDS*. Jika seorang individu terinfeksi virus *HIV*, maka dia akan menjadi pengidap *AIDS* dalam kurun waktu lima sampai sepuluh tahun. Namun, saat ini terapi antiretroviral bisa digunakan sebagai pencegah perkembangan dari virus *HIV* tersebut sehingga memungkinkan individu terinfeksi *HIV* untuk memiliki waktu yang lebih lama sebelum menjadi pengidap *AIDS* [7].

Berdasarkan beberapa penelitan tersebut, pada penelitian ini akan ditambahkan satu kelas yaitu kelas *treatment* (T), yang mewakili jumlah populasi individu yang menerima terapi antiretroviral. Perpindahan populasi (migrasi) dari suatu wilayah ke wilayah lain merupakan fenomena yang dapat terjadi di suatu wilayah. Adanya migrasi berpengaruh dalam lajunya penyebaran penyakit *HIV/AIDS* di dalam suatu populasi. Oleh karena itu, migrasi perlu diperhatikan dalam model. Dan dalam penelitian ini populasi bersifat terbuka, artinya jumlah populasi dipengaruhi oleh *recruitment*, kematian, dan migrasi.

Metode dan Bahan Penelitian

Metodologi yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literature dengan mengumpulkan berbagai informasi terhadap materi-materi yang berkaitan dengan penelitian yang diperoleh dari beberapa buku, artikel, dan sumber-sumber lain yang berkaitan. Adapun langkah-langkah dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

4. Mendefinisikan variabel dan parameter yang digunakan.
5. Menentukan asumsi pada model matematika penyebaran penyakit *HIV/AIDS* dengan terapi pada populasi terbuka.
6. Menggambar diagram transfer untuk membentuk model matematika.
7. Mencari titik ekuilibrium dari model. Titik ekuilibrium yang akan dicari adalah titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik penyakit.
8. Menentukan nilai rasio reproduksi dasar.
9. Menganalisa kestabilan dari titik ekuilibirum yang diperoleh dari model.
10. Membuat simulasi numerik menggunakan software Maple.

Selanjutnya, bagian ini juga memuat beberapa definisi dan teorema dasar yang dapat digunakan sebagai landasan matematis untuk uraian-uraian pada bagian selanjutnya yang disajikan berikut ini.

Definisi 1 [5] Titik $x^* \in \mathbb{R}^n$ disebut titik ekuilibrium sistem $y' = f(x)$ jika $f(x^*) = 0$.

Teorema 2 [8] Diberikan persamaan diferensial $y' = Ax$ dengan *A* adalah matriks berukuran $n \times n$ memiliki *k* nilai eigen yang berbeda $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ dengan $k \leq n$.

a. Titik ekuilibrium x^* dikatakan stabil asimtotis, jika dan hanya jika $Re\,\lambda_i < 0$ untuk setiap $i = 1,2, \ldots, k$.
b. Titik ekuilibrium x^* dikatakan stabil, jika dan hanya jika $Re\,\lambda_i \leq 0$ untuk setiap $i = 1,2, \ldots, k$.
c. Titik ekuilibrium x^* dikatakan tidak stabil, jika dan hanya jika $Re\,\lambda_i > 0$ untuk beberapa $i = 1,2, \ldots, k$.

Definisi 3 [5] Sistem linier $\mathbf{y}' = A\mathbf{x}$ dengan matriks $A = Jf(x^*)$ disebut linierisasi $\mathbf{y}' = f(x)$ pada x^*.

Hasil dan Pembahasan

A. Model Matematika

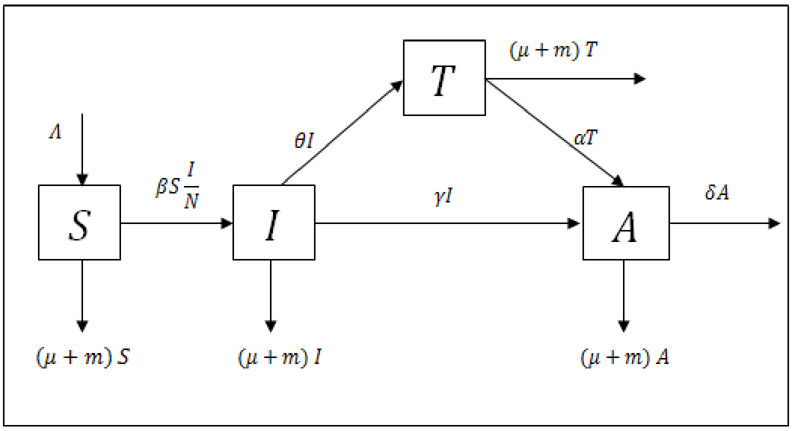
Asumsi-asumsi model matematika penyebaran penyakit *HIV/AIDS* dengan terapi pada populasi terbuka yaitu sebagai berikut:

a) Populasi bersifat terbuka, di mana dalam populasi terjadi proses migrasi, perubahan pada jumlah populsi disebabkan oleh kelahiran, kematian, dan migrasi.
b) Imigrasi diasumsikan terjadi di kelas *susceptible* (S), dan imigran yang masuk ke populasi dipastikan individu yang tidak terinfeksi *HIV*. Sedangkan emigrasi terjadi di setiap kelas (*susceptible*, *infected*, *treatmenti*, dan *AIDS*).

Berdasarkan asumsi-asumsi di atas, didefinisikan parameter-parameter model sebagai berikut:

Λ : Menyatakan laju *recruitment* pada kelas *susceptible*,
μ : Menyatakan laju kematian alami,
m : Menyatakan laju emigrasi,
β : Menyatakan laju kontak antara individu terinfeksi *HIV* dengan individu sehat,
γ : Menyatakan laju transisi dari individu terinfeksi *HIV* menjadi pengidap *AIDS*,
θ : Menyatakan laju perlakuan terapi yang diberikan kepada individu terinfeksi *HIV*,
α : Menyatakan laju transisi dari individu yang memperoleh terapi menjadi pengidap *AIDS*,
δ : Menyatakan laju kematian yang disebabkan oleh penyakit *AIDS*.

Selanjutnya, asumsi-asumsi yang diberikan di atas diterjemahkan ke dalam diagram transfer seperti yang disajikan pada Gambar 1.



Gambar 1 Model Matematika Penyebaran Penyakit *HIV/AIDS*

Berdasarkan Gambar 1 di atas diperoleh sistem persamaan diferensial

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta S\frac{I}{N} - (\mu + m)S \tag{1a}$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta S\frac{I}{N} - \theta I - \gamma I - (\mu + m)I \tag{1b}$$

$$\frac{dT}{dt} = \theta I - \alpha T - (\mu + m)T \tag{1c}$$

$$\frac{dA}{dt} = \gamma I + \alpha T - \delta A - (\mu + m)A \tag{1d}$$

dengan $N = S + I + T + A$ adalah jumlah populasi keseluruhan.

B. Titik Ekuilibrium

(a) Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Titik ekuilibirum bebas penyakit berarti di dalam populasi tidak ada indvidu yang dapat menyebarkan virus *HIV* atau tidak ada individu yang terkena penyakit *AIDS*, $I = 0$ dan $A = 0$. Sehingga untuk titik ekuilibrium bebas penyakit yang dinotasikan dengan $(\hat{S}, \hat{I}, \hat{T}, \hat{A})$ dimana $\hat{I} = 0$ dan $\hat{A} = 0$.

Berdasarkan Persamaan (1d), oleh karena $\hat{I} = 0$ dan $\hat{A} = 0$ diperoleh

$$\alpha\hat{T} = 0$$

$$\hat{T} = 0$$

Selanjutnya, titik ekuilibrium bebas penyakit yang dinotasikan dengan $\hat{T}$, yaitu $\hat{T} = 0$. Titik ekuilibrium $\hat{S}$ diperoleh dengan cara menyelesaikan Persamaan (1a) yaitu

$$\Lambda - \beta\hat{S}\frac{\hat{I}}{N} - (\mu + m)\hat{S} = 0$$

Oleh karena $\hat{I} = 0$, diperoleh

$$\hat{S} = \frac{\Lambda}{(\mu + m)}$$

Berdasarkan penyelesaian yang telah dilakukan diperoleh titik ekuilibirum bebas penyakit *HIV/AIDS* yaitu $\left(\hat{S}, \hat{I}, \hat{T}, \hat{A}\right) = \left(\frac{\Lambda}{(\mu+m)}, 0, 0, 0\right)$.

(b) Titik Ekuilibirum Endemik Penyakit

Titik ekuilibirum endemik penyakit yaitu populasi yang di dalamnya selalu terdapat individu yang menyebarkan virus *HIV* atau individu yang mengidap *AIDS*, $I^* > 0$ dan $A^* > 0$. Selanjutnya, diperoleh berturut-turut titik ekuilibrum endemik penyakit

$$S^* = \frac{N[\theta+\gamma+(\mu+m)]}{\beta}$$

$$I^* = \frac{\Lambda}{[\theta+\gamma+(\mu+m)]} - \frac{N(\mu+m)}{\beta}$$

$$T^* = \frac{\theta\Lambda}{[\theta+\gamma+(\mu+m)][(\mu+m)+\alpha]} - \frac{\theta N(\mu+m)}{\beta[(\mu+m)+\alpha]}$$

$$A^* = \frac{\gamma\Lambda}{(\theta+\gamma+\mu+m)(\delta+\mu+m)} - \frac{\gamma N(\mu+m)}{\beta(\delta+\mu+m)} + \frac{\alpha\theta\Lambda}{(\theta+\gamma+\mu+m)(\mu+m+\alpha)(\delta+\mu+m)} - \frac{\alpha\theta N(\mu+m)}{\beta(\mu+m+\alpha)(\delta+\mu+m)}$$

C. Kestabilan

Untuk mengetahui tingkat kestabilan titik ekuilibrium dari model penyebaran penyakit HIV/AIDS diperlukan parameter tertentu. Parameter yang biasa digunakan dalam penyebaran penyakit adalah bilangan reproduksi dasar yang dinotasikan dengan R_0. Nilai rasio reproduksi dasar dalam model matematika penyebaran penyakit *HIV/AIDS* dengan terapi pada populasi terbuka ini yaitu $R_0 = \frac{\beta\Lambda}{N(\theta+\gamma+\mu+\delta)(\mu+m)}$.

Teorema 4 Jika $R_0 < 1$, maka titik ekuilibirum bebas penyakit $\left(\hat{S}, \hat{I}, \hat{T}, \hat{A}\right) = \left(\frac{\Lambda}{(\mu+m)}, 0, 0, 0\right)$ pada sistem persamaan (1) stabil asimtotik lokal.

Bukti:

Untuk membuktikan Teorema 4 terlebih dahulu dihitung $\det\left(J\left(\hat{S}, 0, 0, 0\right) - \lambda I\right) = 0$ yaitu sebagai berikut:

$$det\begin{bmatrix} -(\mu+m)-\lambda & -\frac{\beta\Lambda}{N(\mu+m)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta\Lambda}{N(\mu+m)} - \theta - \gamma - (\mu + m) - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \theta & -\alpha - (\mu + m) - \lambda & 0 \\ 0 & \gamma & \alpha & -\delta - (\mu + d) - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (2)$$

Berdasarkan persamaan determinan (2) di atas dapat diperoleh persamaan karekteristik berikut ini:

$$(-(\mu+m)-\lambda)\left(\frac{\beta\Lambda}{N(\mu+m)} - \theta - \gamma - (\mu + m) - \lambda\right)(-\alpha - (\mu + m) - \lambda)(-\delta - (\mu + d) - \lambda) = 0 \quad (3)$$

Jika persamaan (2) diselesaikan, maka diperoleh

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= -(\mu+m) \\ \lambda_2 &= \frac{\beta\Lambda}{N(\mu+m)} - \theta - \gamma - (\mu + m) \\ \lambda_3 &= -\alpha - (\mu + m) \\ \lambda_4 &= -\delta - (\mu + d) \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Persamaan (4) menunjukkan bahwa nilai eigen $\lambda_1, \lambda_3,$ dan λ_4 adalah bernilai negatif. Selanjutnya, kita tunjukkan bahwa $\lambda_2 < 0$. Berdasarkan Teorema 1 diperoleh

$$R_0 < 1 \text{ atau } \frac{\beta\Lambda}{N(\theta+\gamma+\mu+\delta)(\mu+m)} < 1,$$

dan

$$\frac{\beta\Lambda}{N(\mu+m)} < (\theta+\gamma+\mu+\delta)$$

$$\frac{\beta\Lambda}{N(\mu+m)} - (\theta+\gamma+\mu+\delta) < 0$$

$$\lambda_2 < 0.$$

Oleh karena $\lambda_i <$ untuk i = 1, 2, 3, dan 4 maka Teorema 4 terbukti. Dengan demikian titik ekuilibrium untuk bebas penyakit adalah stabil asimtotik lokal. ■

Teorema 5 Jika $R_0 > 1$, maka titik ekuilibrium endemik penyakit (S^*, I^*, T^*, A^*) pada sistem persamaan (1) stabil asimtotik lokal.

Bukti :
Untuk membuktikan Teorema 5 terlebih dahulu dihitung $\det(J(S^*, I^*, T^*, A^*) - \lambda I) = 0$ yaitu sebagai berikut:

$$det\begin{bmatrix} -\frac{\beta I^*}{N} - (\mu+m) - \lambda & -\frac{\beta S^*}{N} & 0 & 0 \\ \frac{\beta I^*}{N} & \frac{\beta S^*}{N} - \theta - \gamma - (\mu + m) - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \theta & -\alpha - (\mu + m) - \lambda & 0 \\ 0 & \gamma & \alpha & -\delta - (\mu+m) - \lambda \end{bmatrix} = 0 \qquad (5)$$

Berdasarkan persamaan determinan (5) di atas dapat diperoleh persamaan karekteristik berikut ini:

$$\big((\lambda+\alpha+\mu+m)(\lambda+\delta+ \mu+m)\big)r(\lambda) = 0. \qquad (6)$$

Penyelesaian persamaan karakteristik (6) di atas diperoleh nilai untuk λ_1 dan λ_2, yaitu $\lambda_1 = -(\alpha+\mu+m)$ dan $\lambda_2 = -(\delta+\mu+m)$ yang bernilai negatif. Nilai-nilai eigen yang terdapat pada polinomial $r(\lambda)$ akan bernilai negatif apabila $a_1 > 0$ dan $a_2 > 0$ sesuai kriteria Routh Hurwitz. Selanjutnya, berdasarkan kriteria-kriteri tersebut akan dibuktikan sebagai berikut:

(a) Untuk $a_1 > 0$

Diketahui bahwa

$$a_1 = \frac{\beta I^*}{N} - \frac{\beta S^*}{N} + (\theta+\gamma+\mu+m) + (\mu+m) \qquad (7)$$

Jika nilai S^* dan I^* disubstitusikan ke persamaan (7), maka diperoleh

$$a_1 = \frac{\beta\Lambda}{N(\theta+\gamma+\mu+m)} + 2(\mu+m) > 0 \qquad (8)$$

Berdasarkan persamaan (8) dapat dilihat bahwa masing-masing suku bernilai positif, maka tebrukti bahwa $a_1 > 0$. ■

(b) Untuk $a_2 > 0$

Diketahui bahwa

$$a_2 = \frac{\beta I^*}{N}(\theta+\gamma+\mu+m) - \frac{\beta S^*}{N}(\mu+m) + (\theta+\gamma+\mu+m) + (\mu+m) \quad (9)$$

Jika nilai S^* dan I^* disubstitusikan ke persamaan (9), maka diperoleh

$$a_2 = \frac{\beta\Lambda}{N} - (\theta+\gamma+\mu+m)(\mu+m) \quad (10)$$

Oleh karena $R_0 = \frac{\beta\Lambda}{N(\theta+\gamma+\mu+m)(\mu+m)}$, maka persamaan (10) dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$\beta\Lambda = R_0\, N(\theta+\gamma+\mu+m)(\mu+m). \quad (11)$$

Penyelesaian persamaan (11) diperoleh

$$R_0 > \frac{(\theta+\gamma+\mu+m)(\mu+m)}{(\theta+\gamma+\mu+m)(\mu+m)} \quad (12)$$

Persamaan (12) menunjukkan bahwa $a_2 > 0$, sehingga terbukti bahwa $a_2 > 0$. ■

Berdasarkan hasil yang diperoleh terbukti a_0>0, a_1>0 dan a_2>0. Dengan demikian, $\lambda_i < 0$ untuk i = 1, 2, 3, 4, 5 bernilai negatif, maka Teorema 5 terbukti. Maka dapat disimpulkan titik ekuilibrium endemik penyakit adalah stabil asimtotik lokal. ■

D. Simulasi

Pada bagian ini dilakukan simulasi untuk memperlihatkan titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik penyakit.

(a) Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Untuk menentukan titik ekuilibrium bebas penyakit digunakan nilai-nilai parameter seperti yang disajikan pada Tabel 1.

Tabel 1 Nilai Parameter untuk Bebas Penyakit HIV/AIDS

Parameter	Nilai
N	500
Λ	10
β	0,0883856382
γ	0,654004963
δ	0,163045919
α	0,0016
θ	0,4537
μ	0,01470588
m	0,005

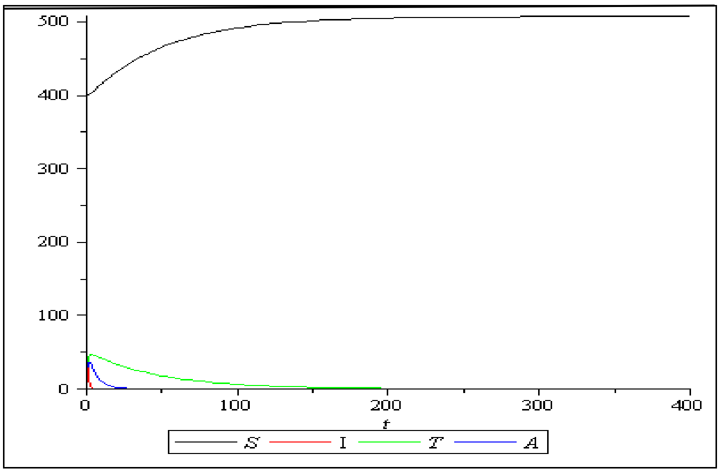
Berdasarkan nilai-nilai parameter yang diberikan pada Tabel 1, nilai rasio reproduksi dasar dapat diperoleh

$$\tilde{R}_0 = \frac{\beta\Lambda}{N(\theta+\gamma+\mu+m)(\mu+m)} = 0{,}06978440674$$

Selanjutnya, titik ekuilibrium bebas penyakit *HIV/AIDS* juga dapat diperoleh yaitu $(\hat{S},\hat{I},\hat{T},\hat{A}) = (507{,}4627472; 0; 0; 0)$, dengan nilai awal $S(0) = 400$, $I(0) = 60$, $T(0) = 25$, $A(0) = 15$.

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 3, No. 1, Januari 2017
ISSN 1693-2390 print/ISSN 2407-0939 online

Dinamikan populasi bebas penyakit *HIV/ AIDS* dapat di lihat pada Gambar 2.



Gambar 2 Simulasi Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit *HIV/AIDS*

Berdasarkan Gambar 2 jumlah subpopulasi rentan *HIV/ AIDS* mengalami peningkatan karena adanya *recruitment* berupa kelahiran dan juga imigrasi yang mengakibatkan jumlah individu pada subpopulasi rentan *HIV/AIDS* terus bertambah hingga mencapai titik ekuilibriumnya. Pada Gambar 2 juga dapat dilihat bahwa subpopulasi yang terinfeksi *HIV* mengalami penurunan menuju angka 0, dikarenakan individu mengalami kematian secara alami ataupun individu melakukan emigrasi, juga karena adanya proses *screening* yang dilakukan sehingga individu yang menderita *HIV* memilih untuk melakukan terapi.

Pada Gambar 2 dapat dilihat dengan jelas bahwa subpopulasi terapi juga mengalami penurunan menuju angka 0 yang diakibatkan oleh adanya kematian alami dan juga emigrasi yang dialami oleh individu pada subpopulasi ini. Selain itu, transformasi dari individu yang terinfeksi *HIV* menjadi pengidap *AIDS* juga merupakan alasan yang menyebabkan subpopulasi ini semakin berkurang. Terakhir pada subpopulasi pengidap *AIDS* juga mengalami penurunan menuju angka 0. Hal ini disebabkan karena adanya kematian alami, emigrasi dan juga kematian karena *AIDS* yang dialami oleh individu pada subpopulasi ini. Ini berarti, untuk jangka waktu tertentu penyakit *HIV/AIDS* akan menghilang dalam populasi, atau dengan kata lain bisa disimpulkan bahwa titik ekuilibrium bebas penyakit stabil pada saat $R_0 < 1$.

(b) Titik Ekuilibrium Endemik Penyakit

Untuk menentukan titik ekuilibrium endemik penyakit digunakan nilai-nilai parameter seperti yang disajikan pada Tabel 2.

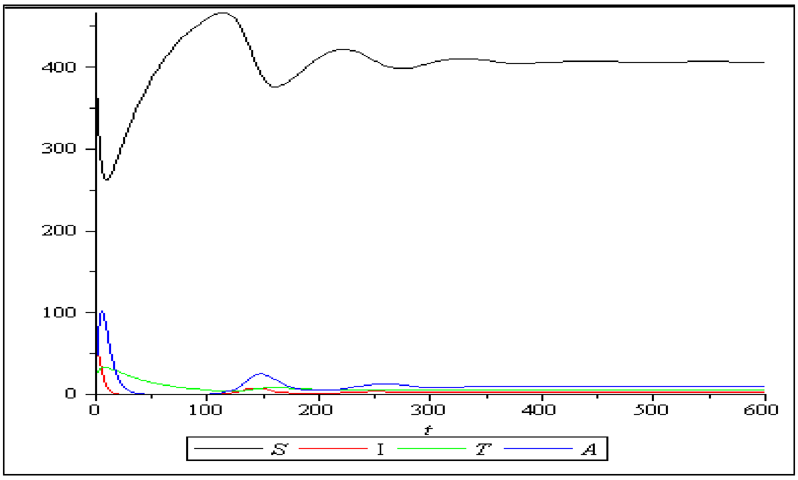
Tabel 2 Nilai Parameter untuk Endemik Penyakit *HIV/AIDS*

Parameter	Nilai
N	500
Λ	10
β	0.883856382
γ	0.654004963
δ	0.163045919
α	0.0016
θ	0.04537
μ	0.01470588
m	0.005

Berdasarkan nilai-nilai parameter yang diberikan pada Tabel 2, nilai rasio reproduksi dasar dapat diperoleh

$$\tilde{R}_0 = \frac{\beta\Lambda}{N(\theta+\gamma+\mu+m)(\mu+m)} = 1{,}022712354$$

Selanjutnya, titik ekuilibrium bebas penyakit *HIV/AIDS* juga dapat diperoleh yaitu $(S^*, I^*, T^*, A^*) = (406{,}7860218;\ 2{,}75897138;\ 5{,}87511671;\ 9{,}924833434)$, dengan nilai awal $S(0) = 400$, $I(0) = 60$, $T(0) = 25$, $A(0) = 15$. Dinamika populasi endemik penyakit *HIV/ AIDS* dapat dilihat pada Gambar 3.



Gambar 3 Simulasi Titik Ekuilibrium Endemik Penyakit *HIV/AIDS*

Pada Gambar 2 dapat di lihat bahwa jumlah populasi pada masing-masing subpopulasi mengalami kenaikan dan penurunan hingga menuju ke titik ekuilibirumnya. Akan tetapi, jumlah populasi pada masing-masing subpopulasi tidak pernah menyentuh angka nol. Berdasarkan simulasi yang telah dilakukan dapat simpulkan bahwa titik ekuilibrium endemik penyakit stabil pada saat $R_0 > 1$ dan untuk waktu yang lama penyakit *HIV/AIDS* akan selalu ada, sehingga akan terjadi endemik penyakit *HIV/AIDS* pada populasi ini.

Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan model matematika penyebaran penyakit *HIV/AIDS* dengan terapi pada populasi terbuka ini, dapat disimpulkan bahwa laju penyebaran penyakit *HIV/AIDS* sangat dipengaruhi oleh besarnya laju terapi yang diterima oleh individu yang terinfeksi *HIV*. Sifat populasi yang terbuka juga berpengaruh terhadap jumlah populasi pada masing-masing subpopulasi. Nilai rasio reproduksi dasar bisa dijadikan acuan dalam mengontrol laju penyebaran peyakit *HIV/AIDS*. Untuk $R_0 = \frac{\beta\Lambda}{N(\theta+\gamma+\mu+\delta)(\mu+m)}$, jika $R_0 < 1$, maka titik ekuilibrium bebas penyakit $(\hat{S}, \hat{I}, \hat{T}, \hat{A})$ stabil asimtotik lokal, artinya populasi akan bebas dari penyakit *HIV/AIDS*. Sedangkan, jika $R_0 > 1$, maka titik ekuilibrium endemik penyakit (S^*, I^*, T^*, A^*) stabil asimtotik lokal, artinya pada keadaan ini dalam populasi akan selalu terdapat penyakit *HIV/AIDS*.

Daftar Pustaka

[1] M. El-hia, O. Balatif, H. Ferjouchia, E. Labriji, dan M. Rachik, Modelling the spread of HIV/AIDS in Morocco, *International Journal of Computer Science*, 9 (6) (3) (2012), 230 – 235.

[2] Departemen Kesehatan RI., *Departemen Kesehatan Republik Indonesia*, [online] Available http://www.depkes.go.id/, diakses 30 Juli 2016.

[3] P. v. d. Driessche dan J. Watmough, Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission, *Mathematical Biosciences*, 180 (2002), 29 – 48.

[4] D. Haryanto, N. Kusumastuti, dan B. Prihandono, Pemodelan matematika dan analisis kestabilan model pada penyebaran *HIV-AIDS*, *Buletin Ilmiah Matematika*, *Statistik*, *dan Terapannya (Bimaster)*. 4 (2) (2015), 101 – 110.

[5] P, Lawrence, *Differential Equations and Dynamical Systems, Third Edition*, Springer-Verlag: New York, 2001.

[6] Marsudi, N. Hidayat, dan R. B. E. Wibowo, Evaluasi dampak program edukasi, skrining, dan terapi pada model penyebaran *HIV*, *Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika UNY*, 2015, 213 – 222.

[7] Spiritia, *Terapi Antiretrovial (ART)*, [Online] Available http://spiritia.or.id/li/bacali.php?lino=403, diakses 9 Mei 2016.

[8] Subiono, *Matematika Sistem*, *Versi: 2.0.1*, FMIPA-ITS, Surabaya, 2010, Hal. 117.

[9] Sutimin dan Imamudin, Model dinamik penularan *human immunodeficiency virus* (*HIV*), *Jurnal Sains dan Matematika*, 17 (1) (2009), 8 – 16.