

Faktorisasi Matriks Pascal Melalui Matriks k -Tribonacci

Mirfaturiq¹, Sri Gemawati², Silfia Rini³, Weriono⁴, Sri Mawarni⁵

¹ Program Studi Teknik Mesin, Sekolah Tinggi Teknologi Pekanbaru

³ Program Studi Teknik Sipil, Sekolah Tinggi Teknologi Pekanbaru
Jl. Dirgantara No. 4 Sidomulyo, Marpoyan Damai, Pekanbaru, Indonesia

² Program Studi Matematika, Universitas Riau
Jl. HR Soebrantas KM 12,5, Kampus Bina Widya Simpang Baru, Pekanbaru, Indonesia

⁴ Program Studi Teknik Mekatronika, Universitas Lancang Kuning
Jl. Yos Sudarso KM 8, Rumbai, Pekanbaru, Indonesia

⁵ Program Studi Teknik Informatika, Politeknik Negeri Bengkalis
Jl. Bathin Alam, Desa Sungai Alam, Bengkalis, Riau, Indonesia

Email: mirfaturiq@sttp-yds.ac.id¹, sri.gemawati@lecturer.unri.ac.id², silfiarini77@gmail.com³,
weriono@gmail.com⁴, irimawarni15@gmail.com⁵

Korespondensi penulis : mirfaturiq@sttp-yds.ac.id

Submitted : 17 Desember 2025

Accepted : 28 Januari 2026

Published : 30 Januari 2026

Abstrak

Artikel ini membahas hubungan matriks Pascal P_n dan matriks k -tribonacci $T_n(k)$. Kemudian, dari hubungan dari kedua matriks tersebut diperoleh definisi matriks baru yaitu matriks $V_n(k)$. Sehingga, dengan matriks baru $V_n(k)$ diperoleh faktorisasi dari matriks Pascal melalui matriks k -tribonacci yaitu $P_n = V_n(k) T_n(k)$.

Kata Kunci: Matriks Pascal, Matriks k -tribonacci, faktorisasi matriks.

Abstract

This article discusses the relationship between the Pascal matrix P_n and the k -tribonacci matrix $T_n(k)$. Furthermore, from the relationship between the two matrices a new matrix definition is obtained $V_n(k)$. Also, with the new matrix $V_n(k)$ the factorization of the Pascal matrix P_n is obtained through the k -tribonacci matrix $T_n(k)$ i.e. $P_n = V_n(k) T_n(k)$.

Keywords: Pascal matrix, k -tribonacci matrix, factorization of matrix.

1. Pendahuluan

Barisan Fibonacci baru dikenal matematikawan Eropa pada tahun 1611, atau sekitar 350 tahun setelah barisan Fibonacci diperkenalkan. Kemudian, pada tahun 1960-an barisan Fibonacci mulai dikembangkan dalam bidang matematika modern dan

aplikasinya bidang ilmu pengetahuan dan seni. Aplikasi barisan Fibonacci dalam bidang teori bilangan dan aljabar telah banyak diteliti dalam berbagai artikel dan buku yaitu membahas sifat-sifat dan identitas barisan Fibonacci dan generalisasi barisan Fibonacci[1], hubungan antara bilangan Fibonacci dan segitiga Pascal[2], matriks Fibonacci[3], hubungan antara matriks Fibonacci dan matriks Pascal [4]dan lain sebagainya.

Barisan tribonacci merupakan salah satu generalisasi dari barisan Fibonacci yang setiap suku berikutnya diperoleh dengan menjumlahkan tiga suku sebelumnya yang dimulai dengan suku 0, 0 dan 1 [2]. Kemudian, suku-suku dari barisan tribonacci disebut dengan bilangan tribonacci dan dinotasikan sebagai T_n , $\forall n \in \mathbb{N}$. Feinbreg [2] memberikan bentuk barisan tribonacci sebagai berikut:

$$0, 0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, \dots$$

Barisan tribonacci awalnya dipelajari oleh Feinbreg [2] pada tahun 1963, setelah 760 tahun barisan Fibonacci dikenalkan oleh Leonardo Pisano. Awal tahun 1964 barisan tribonacci belum begitu menarik perhatian beberapa penulis seperti halnya barisan Fibonacci, namun dengan seiring waktu barisan tribonacci mengalami perkembangan, hal tersebut terbukti bahwa beberapa penulis telah banyak mempelajari dan mengembangkan barisan tribonacci dalam konteks yang berbeda dalam berbagai yaitu Lather dan Kumar [5]membahas generalisasi barisan tribonacci, Ramirez [6] hubungan antara bilangan tribonacci dan segitiga Pascal, Kizilaslan [7] memberikan bentuk aljabar dari matriks tribonacci yang digeneralisasikan.

Disisi lain terdapat segitiga Pascal, bilangan-bilangan pada segitiga Pascal merupakan koefisien-koefisien binomial yang tersusun dalam bentuk segitiga. Secara kombinatorial, setiap elemen dari segitiga Pascal merupakan koefisien-koefisien penyederhanaan bentuk perpangkatan dari penjumlahan dua buah bilangan yang dinyatakan sebagai $(x + y)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ [8]. Segitiga Pascal dapat direpresentasikan sebagai matriks persegi, dengan setiap elemennya merupakan bilangan pada segitiga Pascal sehingga matriks ini disebut dengan matriks Pascal. Brawer dan Pirovino [8] memberikan bentuk representasi matriks dari segitiga Pascal dan membahas tentang bentuk aljabar dari matriks Pascal. Kemudian, Call dan Velleman [9] mendefinisikan matriks Pascal sebagai matriks segitiga bawah.

Faktorisasi matriks adalah suatu cara untuk menjadikan suatu matriks menjadi dua atau beberapa perkalian matriks [19]. Beberapa artikel membahas faktorisasi matriks yaitu matriks tribonacci dan matriks Pascal [10], Matriks Pascal dengan matriks tetranacci [11][12], matriks Stirling jenis kedua dengan matriks tribonacci [13], matriks Stirling jenis pertama dengan matriks tetranacci [14], matriks Stirling jenis kedua dengan matriks k -Fibonacci [15] dan hubungan matriks k -tribonacci dan matriks Pascal [16]. Mereka mengkonstruksi matriks baru untuk mengungkapkan faktorisasi matriks-matriks ini.

Tulisan ini merupakan pengembangan hasil tulisan dari Gemawati et al. [16] yang membahas hubungan matriks tribonacci dan matriks Pascal. Berbeda dengan pembahasan dalam penelitian [10-16], dalam artikel ini, peneliti menggunakan matriks k -tribonacci pada [16] untuk mendapatkan faktorisasi dari matriks k -tribonacci dan matriks Pascal. Dengan menggunakan ide yang sama dari penulis tersebut, penulis

membahas hubungan antara matriks tribonacci ke- k dan matriks Pascal. Dari hubungan matriks tribonacci ke- k dan matriks Pascal dengan menggunakan perhitungan aljabar diperoleh definisi matriks baru, yaitu matriks $\mathcal{V}_n(k)$. Selanjutnya dari pendefinisian matriks baru tersebut diperoleh beberapa hubungan yang dinyatakan dalam teorema

2. Metode Penelitian

Berikut ini teori-teori dasar yang digunakan dalam penelitian ini. Definisi 1, Teorema 1, dan teorema 2 mengacu pada [17] yang digunakan untuk membuktikan hasil dalam penelitian ini

Definisi 1. Jika A adalah matriks berorde $n \times n$, dan jika matriks B berukuran sama bisa didapatkan sedemikian sehingga $AB = BA = I$, maka A disebut *Invertible* dan B disebut invers dari A .

Teorema 1. Jika A dan B adalah matriks berorde $n \times n$, maka $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Teorema 2. Matriks A berorde $n \times n$ matriks *Invertible* jika dan hanya jika $\det(A) \neq 0$.

Berikut adalah langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini:

1. Mengkonstruksi dan mendefinisikan matriks k -tribonacci $\mathcal{T}_n(k)$
2. Mengkonstruksi dan mendefinisikan invers matriks k -tribonacci $\mathcal{T}_n^{-1}(k)$
3. Menentukan hasil perkalian matriks Pascal P_n dan matriks invers matriks k -tribonacci $\mathcal{T}_n^{-1}(k)$ sehingga memperoleh matriks baru. kemudian mendefinisikan matriks baru tersebut yaitu matriks $\mathcal{V}_n(k)$.
4. Menunjukkan bahwa matriks Pascal P_n adalah hasil perkalian matriks $\mathcal{V}_n(k)$ dan matriks k -tribonacci $\mathcal{T}_n(k)$.
5. Mengkonstruksi dan mendefinisikan invers matriks matriks $\mathcal{V}_n^{-1}(k)$.
6. Menunjukkan bahwa matriks k -tribonacci $\mathcal{T}_n(k)$ adalah hasil perkalian invers matriks $\mathcal{V}_n^{-1}(k)$ dan matriks Pascal P_n , sehingga diperoleh $\mathcal{T}_n(k) = \mathcal{V}_n^{-1}(k) P_n$

3. Hasil dan Pembahasan

Segitiga Pascal merupakan koefisien-koefisien binomial yang tersusun dalam bentuk segitiga. Koefisien binomial yang ada pada segitiga Pascal merupakan hasil perpangkatan dari penjumlahan dua buah bilangan yaitu $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$ untuk n bilangan bulat positif [8]. Selain itu, dalam bukunya Bona [18] disebutkan bahwa secara kombinatorik setiap elemen pada baris segitiga Pascal dapat dinyatakan sebagai

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Segitiga Pascal dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks persegi yaitu matriks segitiga bawah dengan setiap elemennya merupakan bilangan pada segitiga Pascal, sehingga matriks ini disebut dengan matriks Pascal dan dinyatakan dengan $P_n, \forall n \in \mathbb{N}$ [9]. Secara umum bentuk dari matriks Pascal P_n dapat dinyatakan dalam bentuk matriks berikut,

$$P_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1} & \binom{n-1}{2} & \binom{n-1}{3} & \cdots & \binom{n-1}{n-1} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Kemudian, Call dan Velleman [4] memberikan bentuk umum dari matriks Pascal berorde $n \times n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ dengan setiap elemen dari matriks Pascal $P_n = [p_{ij}]$, $\forall i, j = 1, 2, 3, \dots, n$ dapat dinyatakan dan didefinisikan sebagai

$$p_{ij} = \begin{cases} \binom{i-1}{j-1}, & \text{untuk } i \geq j, \\ 0, & \text{untuk } i < j. \end{cases} \quad (2)$$

Selanjutnya, Falcon [5] memberikan bentuk umum dari invers matriks Pascal berorde $n \times n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ dengan setiap elemen dari invers matriks Pascal $P_n^{-1} = [p'_{ij}]$, $\forall i, j = 1, 2, 3, \dots, n$ dapat dinyatakan dan didefinisikan sebagai

$$p'_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j} \binom{i-1}{j-1}, & \text{untuk } i \geq j, \\ 0, & \text{untuk } i < j. \end{cases} \quad (3)$$

Barisan k – tribonacci merupakan salah satu generalisasi barisan tribonacci. Lather dan Kumar [5] memberikan bentuk rekrusif dari Barisan k – tribonacci dan dinyatakan dengan $T_{k,n}$ sebagai

$$T_{k,n} = \begin{cases} 0, & \text{for } n = 0, 1; \\ 1, & \text{for } n = 2; \\ kT_{k,n-1} + T_{k,n-2} + T_{k,n-3}, & \text{for } n \geq 3. \end{cases} \quad (4)$$

Dengan persamaan (4), berikut diperlihatkan bilangan k – tribonacci pada Tabel 1.

Tabel 1. Bilangan k – tribonacci

n	0	1	2	3	4	5	6
$T_{k,n}$	0	0	1	k	$k^2 + 1$	$k^3 + 2k + 1$	$k^4 + 3k^2 + 2k + 1$
$T_{1,n}$	0	0	1	1	2	4	7
$T_{2,n}$	0	0	1	2	5	13	33
$T_{3,n}$	0	0	1	3	10	34	115
$T_{4,n}$	0	0	1	4	17	73	313
$\vdots$				$\vdots$			$\vdots$

Sama halnya dengan barisan tribonacci, barisan tribonacci ke- k juga dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks persegi [16]. Dengan ide yang sama untuk mendefinisikan matriks tribonacci dengan menelaah ide dari artikel Sabeth et al. [13], barisan tribonacci ke- k direpresentasikan dalam bentuk matriks segitiga bawah dengan setiap elemennya merupakan bilangan tribonacci ke- k dan diagonal utamanya 1, sehingga matriks ini disebut dengan matriks tribonacci ke- k dan dinyatakan dengan $T_n(k)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Secara umum bentuk dari matriks tribonacci ke- k dapat dinyatakan dalam bentuk matriks berikut.

$$\mathcal{T}_n(k) = \begin{bmatrix} T_{k,2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ T_{k,3} & T_{k,2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ T_{k,4} & T_{k,3} & T_{k,2} & 0 & \cdots & 0 \\ T_{k,5} & T_{k,4} & T_{k,3} & T_{k,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{k,n} & T_{k,n-1} & T_{k,n-2} & T_{k,n-3} & \cdots & T_{k,2} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Selanjutnya diperoleh bentuk umum dari matriks tribonacci ke $-k$ berorde $n \times n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ dengan setiap elemen dari matriks tribonacci ke $-k$ $\mathcal{T}_n(k) = [t_{ij}]$, $\forall i, j = 1, 2, 3, \dots, n$ dapat dinyatakan dan didefinisikan sebagai

$$t_{i,j} = \begin{cases} T_{k,i-j+2}, & \text{untuk } i \geq j, \\ 0, & \text{untuk } i < j. \end{cases} \quad (6)$$

Kemudian diperoleh bentuk umum dari invers matriks tribonacci ke $-k$ $n \times n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ dengan setiap elemen dari invers matriks tribonacci ke $-k$ $\mathcal{T}_n^{-1}(k) = [t'_{ij}]$, $\forall i, j = 1, 2, 3, \dots, n$ dapat dinyatakan dan didefinisikan sebagai

$$t'_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{untuk } i = j, \\ -k, & \text{untuk } i - 1 = j, \\ -1, & \text{untuk } i - 3 \leq j \leq i - 2 \\ 0, & \text{lainnya.} \end{cases} \quad (7)$$

Pada pembahasan ini akan dibahas hubungan antara matriks tribonacci $-k$ dengan matriks Pascal. Ide yang sama dari Sabeth et al. [13], Faktorisasi kedua matriks k -tribonacci $\mathcal{T}_n(k)$ dan matriks Pascal P_n . Selanjutnya, dari hubungan kedua matriks tersebut diperoleh matriks baru yaitu matriks $\mathcal{V}_n(k)$ yang didefinisikan sebagai matriks segitiga bawah. Elemen-elemen dari matriks $\mathcal{V}_n(k)$ diperoleh dari perkalian matriks Pascal P_n dan matriks invers matriks k -tribonacci $\mathcal{T}_n^{-1}(k)$ dan untuk $n = 5$, elemen-elemen dari matriks $\mathcal{V}_n(k)$ diperoleh sebagai berikut:

$$P_5 \cdot \mathcal{T}_5^{-1}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -k & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -k & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -k & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-k & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2k & 2-k & 1 & 0 & 0 \\ -3-3k & 2-2k & 3-k & 1 & 0 \\ -9-4k & 1-6k & 5-4k & 4-k & 1 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Dengan demikian, berdasarkan hasil perkalian matriks pada persamaan (8) diperoleh elemen-elemen matriks $\mathcal{V}_5(k)$ yaitu,

$$\mathcal{V}_5(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-k & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2k & 2-k & 1 & 0 & 0 \\ -3-3k & 2-2k & 3-k & 1 & 0 \\ -9-4k & 1-6k & 5-4k & 4-k & 1 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Dengan memperhitungkan setiap elemen matriks (9) untuk $i \geq j$ semua nilai elemen matriks ditunjukkan pada Tabel 2

Tabel 2. Nilai Elemen Untuk Matriks $\mathcal{V}_5(k)$	
Elemen Matriks $\mathcal{V}_5(k)$	Nilai Elemen Matriks $\mathcal{V}_5(k)$
v_{11}	$\begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} (1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
v_{21}	$\begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} (1) + \begin{pmatrix} 2-1 \\ 2-1 \end{pmatrix} (-k) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
v_{22}	$\begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} (0) + \begin{pmatrix} 2-1 \\ 2-1 \end{pmatrix} (1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
v_{31}	$\begin{pmatrix} 3-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} (1) + \begin{pmatrix} 3-1 \\ 2-1 \end{pmatrix} (-k) + \begin{pmatrix} 3-1 \\ 3-1 \end{pmatrix} (1) =$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$
v_{32}	$\begin{pmatrix} 3-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} (0) + \begin{pmatrix} 3-1 \\ 2-1 \end{pmatrix} (1) + \begin{pmatrix} 3-1 \\ 3-1 \end{pmatrix} (-k) =$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$
$\vdots$	$\vdots$
v_{ij}	$\begin{pmatrix} i-1 \\ j-1 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} i-1 \\ j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i-1 \\ j+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i-1 \\ j+2 \end{pmatrix}$

Selanjutnya, dengan memperhatikan masing-masing bentuk aljabar pada Tabel 2 diperoleh bentuk umum matriks $\mathcal{V}_n(k)$ dengan matriks $n \times n$ didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{V}_n(k)$ adalah matriks $n \times n$ dengan setiap elemen $\mathcal{V}_n(k) = [v_{ij}]$, $\forall i, j = 1, 2, 3, \dots, n$ dapat dinyatakan sebagai

$$v_{ij} = \begin{pmatrix} i-1 \\ j-1 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} i-1 \\ j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i-1 \\ j+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i-1 \\ j+2 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

dan $\forall i < j$, $v_{ij} = 0$.

Selanjutnya, dengan menggunakan aplikasi Maple 17 diperoleh invers matriks $\mathcal{V}_4(k)$

$$\mathcal{V}_4^{-1}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1-k & 1 & 0 & 0 \\ k^2-k+2 & -2+k & 1 & 0 \\ k^3-k^2+3k-1 & k^2-2k+4 & -3+k & 1 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Perhatikan setiap elemen pada matriks (11) untuk $i \geq j$ semua nilai elemen matriks ditunjukkan pada Tabel 3.

Tabel 3. Nilai Elemen Untuk Matriks $\mathcal{V}_4^{-1}(k)$	
Elemen Matriks $\mathcal{V}_4^{-1}(k)$	Nilai Elemen Matriks $\mathcal{V}_4^{-1}(k)$
v'_{11}	$T_{k,1-1+2}(-1)^{1+1} \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = T_{k,2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
v'_{21}	$T_{k,2-1+2}(-1)^2 \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} + T_{k,2-2+2}(-1)^3 \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} =$ $T_{k,3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - T_{k,2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
v'_{22}	$T_{k,2-1+2}(-1)^3 \begin{pmatrix} 1-1 \\ 2-1 \end{pmatrix} + T_{k,2-2+2}(-1)^4 \begin{pmatrix} 2-1 \\ 2-1 \end{pmatrix} =$

	$-T_{k,3} \binom{0}{1} + T_{k,2} \binom{1}{1} = T_{k,2} \binom{1}{1}$
v'_{31}	$T_{k,3-1+2}(-1)^2 \binom{1-1}{1-1} + T_{k,3-2+2}(-1)^3 \binom{2-1}{1-1} +$ $T_{k,3-3+2}(-1)^4 \binom{3-1}{1-1} =$ $T_{k,4} \binom{0}{0} - T_{k,3} \binom{1}{0} + T_{k,2} \binom{2}{0}$
$\vdots$	$\vdots$
v'_{ij}	$\sum_{r=j}^i (-1)^{j+r} \binom{r-1}{j-1} T_{k,i-r+2}$

Selanjutnya, dengan memperhatikan masing-masing bentuk aljabar pada Tabel 3 diperoleh bentuk umum matriks $\mathcal{V}_n^{-1}(k)$ berorde $n \times n$ didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 3. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, misalkan $\mathcal{V}_n^{-1}(k)$ adalah invers matriks $\mathcal{V}_n(k)$ dengan setiap elemen $\mathcal{V}_n^{-1}(k) = [v'_{ij}]$, $\forall i, j = 1, 2, 3, \dots, n$ dapat dinyatakan sebagai

$$v'_{ij} = \sum_{r=j}^i (-1)^{j+r} \binom{r-1}{j-1} T_{k,i-r+2}, \quad (12)$$

dan $\forall i < j, v'_{ij} = 0$.

Dari definisi matriks $\mathcal{V}_n(k)$ pada persamaan (10), dapat dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 3. Jika untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan matriks $\mathcal{V}_n(k)$ yang didefinisikan pada persamaan (10), matriks Pascal P_n yang didefinisikan pada persamaan (2) dan matriks tribonacci ke- k $\mathcal{T}_n(k)$ yang didefinisikan pada persamaan (6), maka $P_n = \mathcal{V}_n(k) \mathcal{T}_n(k)$.

Bukti. Karena matriks k -tribonacci $\mathcal{T}_n(k)$ mempunyai invers dan $\det(\mathcal{T}_n(k)) \neq 0$, maka matriks matriks k -tribonacci $\mathcal{T}_n(k)$ adalah matriks *invertible*, akan dibuktikan bahwa

$$\mathcal{V}_n(k) = P_n \mathcal{T}_n^{-1}(k). \quad (13)$$

Perhatikan sisi kiri persamaan (13), untuk $i \geq j$ diperoleh

$$\begin{aligned} v_{ij} &= p_{ir} t'_{rj}, \\ v_{i1} &= p_{ir} t'_{r1}, \\ &= p_{i1} t'_{11} + p_{i2} t'_{21} + p_{i3} t'_{31} + \dots + p_{in} t'_{n1}, \\ &= \sum_{r=1}^i p_{ir} t'_{r1}, \\ &= -\frac{1}{6}(i-2)(i^2+2) - k(i-1). \end{aligned}$$

Selanjutnya, untuk $i \geq 1$ dan $j \geq 2$ diperoleh

$$v_{ij} = p_{ir} t'_{rj},$$

$$\begin{aligned}
&= p_{ij} t'_{jr} + p_{ij+1} t'_{j+1r} + p_{ij+2} t'_{j+2r} + \cdots + p_{in} t'_{nr} , \\
v_{ij} &= \sum_{r=j}^i p_{ir} t'_{rj} , \\
&= \binom{i-1}{j-1} - k \binom{i-1}{j} - \binom{i-1}{j+1} - \binom{i-1}{j+2} .
\end{aligned}$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $= P_n \mathcal{T}_n^{-1}(k)$. Jadi dengan didefinisikan matriks $\mathcal{V}_n(k)$ pada persamaan (10), matriks Pascal P_n pada persamaan (2) dan matriks tribonacci ke- k $\mathcal{T}_n(k)$ pada persamaan (6) dapat dinyatakan sebagai $P_n = \mathcal{V}_n(k) \mathcal{T}_n(k)$.

Selanjutnya, dari Teorema 3, dapat diturunkan akibat berikut.

Akibat 1. Untuk setiap $1 \leq j \leq i$ diperoleh

$$\binom{i-1}{j-1} = \sum_{r=j}^n \left[\binom{i-1}{r-1} - k \binom{i-1}{r} - \binom{i-1}{r+1} - \binom{i-1}{r+2} \right] T_{k,r-j+2}. \quad (14)$$

Bukti. Perhatikan setiap elemen P_n pada perkalian matriks $P_n = \mathcal{V}_n(k) \mathcal{T}_n(k)$ secara aljabar diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
p_{ij} &= v_{ir} t_{rj} , \\
&= v_{ij} t_{jj} + v_{ij+1} t_{j+1j} + v_{ij+2} t_{j+2j} + \cdots + v_{in} t_{nj} , \\
&= v_{ij} T_{k,j-j+2} + v_{ij+1} T_{k,j+1-j+2} + v_{ij+2} T_{k,j+2-j+2} + \cdots + v_{in} T_{k,n-j+2} , \\
&= v_{ij} T_{k,2} + v_{ij+1} T_{k,3} + v_{ij+2} T_{k,4} + \cdots + v_{in} T_{k,n-j+2} , \\
&= \sum_{r=j}^n v_{ir} T_{k,r-j+2} .
\end{aligned} \quad (15)$$

Selanjutnya, dengan menggunakan persamaan (15) diperoleh:

$$\begin{aligned}
p_{ij} &= \sum_{r=j}^n v_{ir} T_{k,r-j+2} , \\
\binom{i-1}{j-1} &= \sum_{r=j}^n \left[\binom{i-1}{r-1} - k \binom{i-1}{r} - \binom{i-1}{r+1} - \binom{i-1}{r+2} \right] T_{k,r-j+2} .
\end{aligned}$$

Jadi dengan menggunakan persamaan (15) dapat diperoleh persamaan (14).

Selanjutnya, dari pendefinisian matriks $\mathcal{V}_n^{-1}(k)$ pada persamaan (12) diperoleh teorema berikut.

Teorema 4. Jika untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan matriks $\mathcal{V}_n^{-1}(k)$ yang didefinisikan pada persamaan (12), matriks Pascal P_n yang didefinisikan pada persamaan (2) dan matriks tribonacci ke- k $\mathcal{T}_n(k)$ yang didefinisikan pada persamaan (6), maka $\mathcal{T}_n(k) = \mathcal{V}_n^{-1}(k) P_n$.

Bukti. Hal ini cukup dengan membuktikan bahwa $\mathcal{T}_n(k) P_n^{-1} = \mathcal{V}_n^{-1}(k)$, seperti pada Teorema 2.

4. Kesimpulan

Dalam artikel ini, didapatkan bentuk umum matriks k -tribonacci dan mendefinisikan matriks baru $\mathcal{V}_n(k)$. Selain itu, dengan menggunakan matriks baru

tersebut diperoleh faktor dari matriks Pascal P_n melalui matriks k -tribonacci $T_n(k)$ dapat dinyatakan sebagai $P_n = V_n(k) T_n(k)$.

Daftar Pustaka

- [1] S. Falcon, "The k -Fibonacci matrix and the Pascal matrix," *Central European Journal of Mathematics*, vol. 9, hal. 1403–1410, 2011.
- [2] M. Feinberg, "Fibonacci – tribonacci," *Fibonacci Quartely*, vol.1, hal. 70–74, 1963.
- [3] T. Koshy, *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, Wiley – Interscience, New York, 2001.
- [4] J. Varnadore, "Pascal's triangle and Fibonacci numbers," *The Mathematics Teacher*, vol. 84, hal. 314–316, 1991.
- [5] R. Lather dan M. Kumar, "Stability of k -tribonacci functional equation in non – Archimedean space," *International Journal of Computer Applications*, Vol. 128, hal. 27–30, 2015.
- [6] J. L. Ramirez, "Incomplete tribonacci number and polynomials," *Journal of Integer Sequences*, vol. 17 2014.
- [7] G. Kizilaslan, "The linear algebra of a generalized tribonacci matrix," *Math. Stat.*, vol. 17, no.1, pp.169-181, 2023.
- [8] R. Brawer dan M. Pirovino, "The linear algebra of the Pascal matrix," *Linear Algebra Applications*, vol.174, hal. 13–23, 1992.
- [9] G. S. Call dan D. J. Velleman, "Pascal's matrices," *The American Mathematical Monthly*, vol. 100, hal.372–376, 1993.
- [10] N. Sabeth, S. Gemawati, dan H. Saleh, "A factorization of the tribonacci matrix and the Pascal matrix," *Applied Mathematical Sciences*, vol. 11, hal. 489–497, 2017.
- [11] Mirfaturiq, S. Gemawati, dan M.D.H. Gamal, "Tetranacci matrix via Pascal's matrix," *Bulletin of Mathematics*, vol. 9, no. 1, hal. 1–7, 2017.
- [12] Mirfaturiq, Nurhasnah, dan M.B. Baheramasyah, "Faktorisasi matriks Pascal dan matriks tetranacci," *Jurnal Sainstek STTPekanbaru*, vol. 11, no. 1, hal. 60–65, 2023.
- [13] F. Rasmi, S. Gemawati, dan M. D.H. Gamal, "Relation between stirling's numbers of the second kind and tribonacci matrix," *Bulletin of Mathematics*, vol. 10, no. 1, hal. 33–39, 2018.
- [14] Mirfaturiq, Weriono, dan F. Palaha, "Hubungan matriks Stirling jenis kedua dengan matriks tetranacci," *Jurnal Sainstek STTPekanbaru*, vol. 11, no. 2, hal. 102–105, 2023.
- [15] Mawaddaturrohman, S. Gemawati, dan M. D. H. Gamal, "Hubungan antara matriks Stirling jenis kedua dan matriks k -Fibonacci," *Prosiding Seminar Nasional STIKIP PGRI Sumatera Barat*, hal. 104-110, 2019.

- [16] S. Gemawati, Musraini, Mirfaturiqa, "The k -tribonacci matrix and the pascal matrix," *Jambura Journal of Mathematics*, vol. 6, no. 1, hal. 125 – 130, 2024.
- [17] H. Anton, *Elementary Linear Algebra*, 7 Edition. Jhon Wiley & Sons, Inc, 1994.
- [18] M. Bona, *A Walk Through Combinatorics*, University of Florida Press, USA, 2006.
- [19] N. Nurmalasari, Yanita, dan I. M. Arwana, "Faktorisasi Matriks," *Jurnal Matematika UNAND*, vol. 8, no. 1, hal. 242 – 248, 2019.