

Pelabelan *Graceful* Titik pada Graf-(7,8)

Gema Hista Medika¹, Arifki Budiman², Septia Tri Yolanda³

^{1,3} Program Studi Pendidikan Matematika, UIN Sjech M. Djamil Djambek Bukittinggi

² Program Studi Bimbingan Konseling, UIN Sjech M. Djamil Djambek Bukittinggi

Jl. Gurun Aur Kubang Putih, Agam, Indonesia

Email: gemahistamedika@uinbukittinggi.ac.id¹, arifkibudiman@gmail.com²,
septiatrilyolanda@gmail.com³

Korespondensi penulis : gemahistamedika@uinbukittinggi.ac.id

Submitted : 26 Mei 2025

Accepted : 25 Juli 2025

Published : 29 Juli 2025

Abstrak

Beberapa kajian terdahulu tentang pelabelan *graceful* titik telah banyak dilakukan. Penelitian ini merupakan lanjutan dari penelitian sebelumnya. Adapun tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan pelabelan *graceful* titik pada graf-(7,8). Graf-(7,8) merupakan graf dengan 7 titik dan 8 sisi. Penelitian ini dibatasi pada graf sederhana terhubung dan berhingga. Jenis penelitian ini adalah penelitian deskriptif kualitatif, teknik yang digunakan dalam penelitian ini adalah penelitian kepustakaan dan teknik analisis data yang dipakai yaitu teknik analisis data non statistik. Dalam kajian ini, akan ditunjukkan bahwa dari 16 graf-(7,8) yang tidak isomorfik, semuanya merupakan pelabelan *graceful* titik dengan rincian pada graf M1 terdapat 48 graf; M2 terdapat 16 graf; M3 terdapat 20 graf; M4 terdapat 20 graf; M5 terdapat 32 graf; M6 terdapat 24 graf; M7 terdapat 28 graf; M8 terdapat 8 graf; M9 terdapat 40 graf; M10 terdapat 48 graf; M11 terdapat 24 graf; M12 terdapat 64 graf; M13 terdapat 32 graf; M14 terdapat 16 graf; M15 terdapat 16 graf; M16 terdapat 20 graf.

Kata Kunci: Graf-(7,8), *graceful* titik, pelabelan.

Abstract

Several previous studies on vertex *graceful* labeling have been conducted. This study is a continuation of previous studies, the purpose of this study is to determine vertex *graceful* labeling on graph-(7,8). Graph-(7,8) is a graph with 7 vertices and 8 edges. This study is limited to simple connected and finite graphs. This type of research is qualitative descriptive research, the technique used in this study is library research and the data analysis technique used is non-statistical data analysis technique. In this study, it will be shown that of the 16 graph-(7,8) that are not isomorphic, all are vertex *graceful* labeling, with details: in graph M1 there are 48 graphs; M2 contains 16 graphs; M3 contains 20 graphs; M4 contains 20 graphs; M5 contains 32 graphs; M6 contains 24 graphs; M7 contains 28 graphs; M8 contains 8 graphs; M9 contains 40 graphs; M10 contains 48 graphs; M11 contains 24 graphs; M12 contains 64 graphs; M13 contains 32 graphs; M14 contains 16 graphs; M15 contains 16 graphs; M16 contains 20 graphs.

Keywords: Labeling, vertex graceful, (7,8)-graph.

1. Pendahuluan

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1936, merupakan seorang matematikawan yang berkebangsaan Swiss. Ketika itu Euler berupaya memecahkan masalah jembatan Königsberg yang berada di Eropa [1]. Salah satu tema dari teori graf yang berkembang pesat yaitu pelabelan graf. Pelabelan graf ini pertama kali diperkenalkan oleh Sadhana pada tahun 1964, dilanjutkan Stewart pada tahun 1966 dan Kotzig Rosa tahun 1970 [2]. Pemanfaatan pelabelan graf dapat diterapkan pada berbagai bidang keilmuan seperti teori pengkodean, radar, desain sirkuit, manajemen basis data, pertukaran pesan rahasia, dan kriptografi [3].

Pelabelan dari graf $G(V, E)$ merupakan suatu fungsi *bijektif* dari $V \cup E$ ke himpunan bilangan asli ($\mathbb{N}$). Dimana domain dari pelabelan merupakan pelabelan titik (atau pelabelan sisi). Jika domain merupakan gabungan dari himpunan titik dan sisi, maka dinamakan pelabelan total [4]. Pelabelan yang sangat terkenal salah satunya adalah pelabelan *graceful*. Terdapat bermacam pelabelan *graceful*, diantaranya yaitu pelabelan *graceful* titik, pelabelan *graceful* sisi, pelabelan super sisi *graceful*, pelabelan *graceful* kuat, dan masih banyak lagi. Suatu graf G dengan banyak p titik dan q sisi merupakan pelabelan *graceful* jika ada fungsi *injektif* $f: V \rightarrow \{0, 1, \dots, p\}$ sehingga $f^*: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, q\}$ yang didefinisikan sebagai $f^*(e_i) = |f(v_j) - f(v_k)|$ dimana $e_i = (v_j, v_k)$; $j, k \in \{1, 2, \dots, p\}$ adalah fungsi *surjektif* [5].

Suatu graf G disebut pelabelan *graceful* titik jika terdapat pelabelan $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p\}$ sedemikian hingga ada pelabelan $f^+: E(G) \rightarrow \mathbb{Z}_q$ yang didefinisikan dari $f^+((v_j, v_k)) = (f(v_j) + f(v_k)) \bmod q$ disebut fungsi *bijektif* [5]. Pada penelitian ini nilai p adalah 7 dan nilai q adalah 8. Penelitian terkait dengan pelabelan *graceful* sudah banyak dilakukan, diantaranya: Pelabelan Super *Graceful* untuk Beberapa Graf Khusus oleh Anjani dkk (2012) [6]; Pelabelan *Vertex-Graceful* pada Beberapa Graf oleh Medika dkk (2019) [7]; Nilai Total Ketakteraturan Titik pada Graf Seri Paralel $sp(m, 1, 3)$ oleh Marzuki dkk (2020) [8]; *Extending of Edge Even Graceful Labeling of Graphs to Strong -Edge Even Graceful Labeling* oleh Zeeneldeem dkk (2021) [9]; Pelabelan *vertex-graceful* pada graf-(6, 8) Oleh Medika dkk (2022) [10]; *Graceful Labeling on Thorny-Snake Graphs* oleh Maryana (2022) [11]; Kemampuan Mahasiswa dalam Membuktikan Teorema pada Pelabelan *Graceful Graph* A-Bintang oleh Sumardi dkk (2022) [12]; Pelabelan *Odd-Graceful* pada Graf Produk Sisir oleh Daniel dkk (2022) [13]; Pelabelan Anggun Graf Berlian Rangkap Berbintang, Beberapa Kelas Graf Pohon dan Graf Corona Khusus oleh Affifah dkk (2023) [14]; Algoritma Pelabelan *Graceful* untuk Graf Bintang Multi-Level oleh Pakpahan dkk (2024) [15]; Pelabelan *Vertex-Graceful* pada Graf-(5, 7) oleh Medika dkk (2024) [16]. Berdasarkan uraian tersebut, peneliti tertarik untuk melanjutkan kajian tentang Pelabelan *Graceful* Titik pada Graf-(7,8). Graf-(7,8) yaitu graf yang mempunyai 7 titik dan 8 sisi

2. Metode Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah penelitian deskriptif. Penelitian deskriptif adalah penelitian yang dimaksudkan untuk menyelidiki keadaan, kondisi atau hal lain yang sudah disebutkan, yang hasilnya dipaparkan dalam bentuk laporan penelitian [17]. Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif. Selain itu, jenis penelitian ini adalah penelitian deskriptif kualitatif. Penelitian deskriptif kualitatif ini dilakukan dengan mengumpulkan kata dan frasa dari individu, buku, dan sumber lain

[18]. Tujuan utama penelitian kualitatif adalah memahami dan mengembangkan fenomena utama yang diteliti untuk mencapai pemahaman lebih dalam dan menemukan keunikannya [19].

Data sekunder merupakan data yang diperoleh atau dikumpulkan oleh peneliti dari berbagai sumber yang telah ada [20]. Subjek penelitian ini yaitu pelabelan *graceful* titik dan juga graf-(7,8). Sumber data primer yaitu buku dan literatur yang berhubungan dengan pelabelan *graceful* titik dan juga graf-(7,8). Sedangkan sumber data sekunder yaitu beberapa buku, beberapa jurnal dan tugas akhir serta literatur ilmiah yang mendukung dan berkaitan dengan pelabelan *graceful* titik pada graf-(7,8) ini.

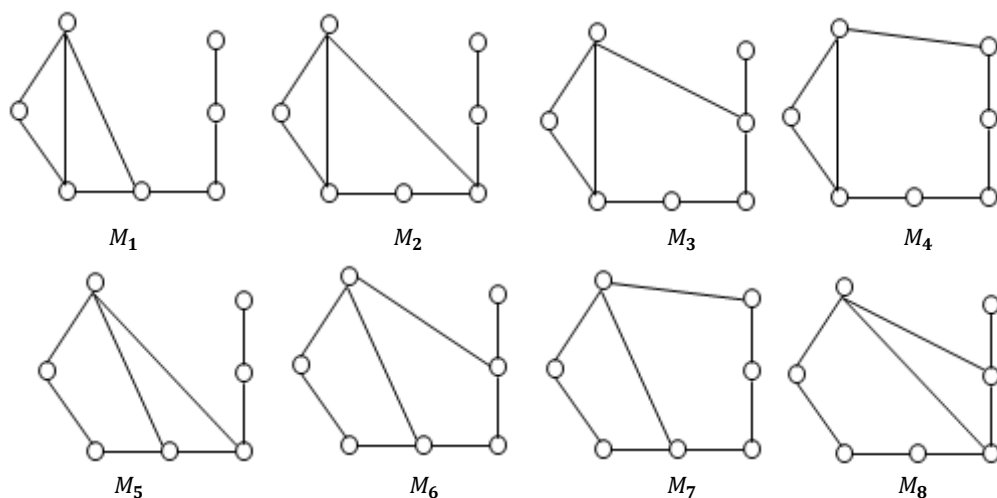
Teknik yang digunakan dalam penelitian ini adalah penelitian kepustakaan (*study literature*), merupakan proses mencari, membaca, memahami dan menganalisis berbagai literatur yang berkaitan dengan hasil penelitian atau penelitian yang relevan dengan penelitian yang dilakukan [18]. Studi pustaka merupakan teknik pengumpulan data dengan mengadakan studi penelaah terhadap buku-buku, literatur-literatur, catatan-catatan, dan laporan-laporan yang ada hubungannya dengan masalah yang dipecahkan [21].

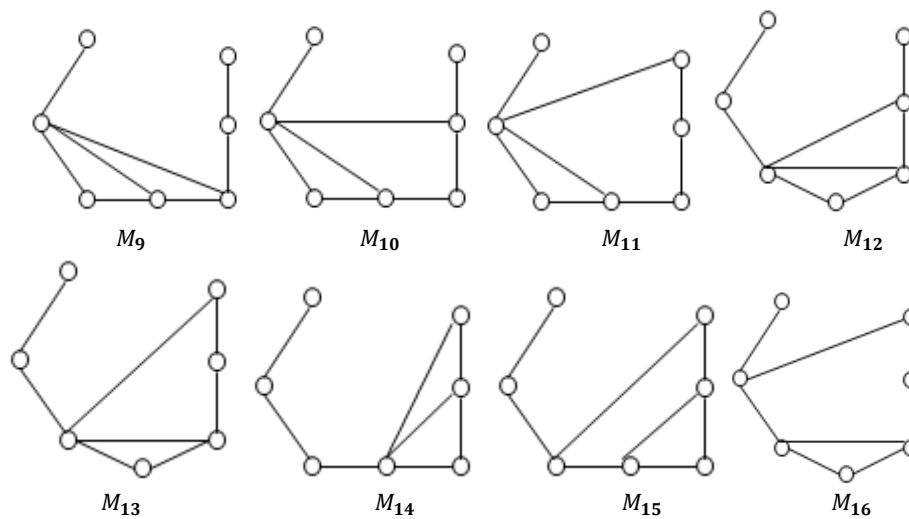
Teknik analisis data yang dipakai yaitu teknik analisis data *non statistic*, dimana teknik ini dilakukan dengan cara dipaparkan, ditabulasi serta ditafsirkan/ disimpulkan. Adapun langkah-langkah yang digunakan dalam menganalisis data pada penelitian ini yaitu: 1. Mendefinisikan graf-(7,8); 2. Menetapkan jumlah graf-(7,8) berbeda yang tidak isomorf; 3. Menerapkan operasi graf sesuai dengan definisi pelabelan *graceful* titik; 4. Melabeli semua titik dan sisi yang ada pada semua graf-(7,8) yang telah ditetapkan; 5. Menentukan graf-(7,8) yang merupakan pelabelan *graceful* titik; 6. Melaporkan hasil.

Adapun definisi dari graf-(7,8) adalah graf dengan 7 titik dan 8 sisi, selanjutnya peneliti menetapkan jumlah graf-(7,8) berbeda yang tidak isomorf yaitu sebanyak 16 graf, selanjutnya akan diterapkan pelabelan *graceful* titik pada masing-masing graf tersebut, dilabeli dan ditentukan graf-(7,8) yang merupakan pelabelan *graceful* titik

3. Hasil dan Pembahasan

Teorema 3.1 Dari 16 graf-(7,8) seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1 semuanya memuat pelabelan *graceful* titik.

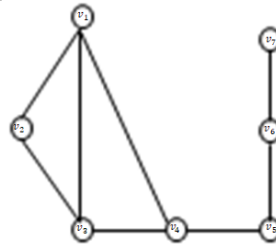




Gambar 1. Graf-(7,8)

Bukti. Pada masing-masing graf $M_1, M_2, \dots, M_{16}$, karena memiliki 7 titik (7 angka) maka terdapat 7 faktorial yaitu 5040 kemungkinan susunan angka.

a) Untuk graf M_1 (ada 5040 kemungkinan). Misalkan $V(M_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$

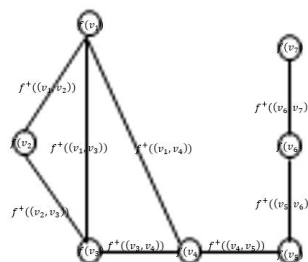


Gambar 2. Ilustrasi $V(M_1)$

- Kemungkinan pertama, definisikan $f: V(M_1) \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

$v_1 \mapsto 1, v_2 \mapsto 2, v_3 \mapsto 3, v_4 \mapsto 4, v_5 \mapsto 5, v_6 \mapsto 6, v_7 \mapsto 7$ dan $f^+: E(M_1) \rightarrow \mathbb{Z}_q$ dimana $q = 8$,
 $(v_j, v_k) \mapsto (f(v_j) + f(v_k)) \bmod 8, \quad j \neq k$ dan $f^+(\neg \bmod): E(M_1) \rightarrow \{\min\{f(v_j) + f(v_k)\}, \dots, \max\{f(v_j) + f(v_k)\}\}; (v_j, v_k) \mapsto f(v_j) + f(v_k), \quad j \neq k$

Akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan *graceful* titik.



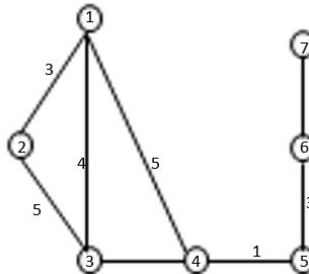
Gambar 3. Ilustrasi Pelabelan *Graceful* Titik Graf $M_1(1)$

Dari definisi fungsi diperoleh

$$\begin{aligned} f^+((v_1, v_2)) &= (f(v_1) + f(v_2)) \bmod 8 = (1 + 2) \bmod 8 = 3 \\ f^+((v_1, v_3)) &= (f(v_1) + f(v_3)) \bmod 8 = (1 + 3) \bmod 8 = 4 \\ f^+((v_1, v_4)) &= (f(v_1) + f(v_4)) \bmod 8 = (1 + 4) \bmod 8 = 5 \\ f^+((v_2, v_3)) &= (f(v_2) + f(v_3)) \bmod 8 = (2 + 3) \bmod 8 = 5 \\ f^+((v_3, v_4)) &= (f(v_3) + f(v_4)) \bmod 8 = (3 + 4) \bmod 8 = 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f^+((v_4, v_5)) &= (f(v_4) + f(v_5)) \bmod 8 = (4 + 5) \bmod 8 = 1 \\
 f^+((v_5, v_6)) &= (f(v_5) + f(v_6)) \bmod 8 = (5 + 6) \bmod 8 = 3 \\
 f^+((v_6, v_7)) &= (f(v_6) + f(v_7)) \bmod 8 = (6 + 7) \bmod 8 = 5
 \end{aligned}$$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 4. Pelabelan Graceful Titik Graf M_1 yang sudah dilabeli (I)

Karena ada beberapa sisi yang mempunyai label yang sama maka pelabelan di atas bukanlah pelabelan *graceful* titik. Pelabelan graf di atas dapat ditulis dalam bentuk tabel, seperti tampak pada Tabel 1 sebagai berikut:

Tabel 1. Pelabelan Graceful Titik Graf $M_1(I)$

f							f^+							Ket	
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	(v_1, v_2)	(v_1, v_3)	(v_1, v_4)	(v_2, v_3)	(v_3, v_4)	(v_4, v_5)	(v_5, v_6)	(v_6, v_7)	
1	2	3	4	5	6	7	3	4	5	5	7	1	3	5	Tidak

Keterangan:

“Tidak” berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan titik *graceful* karena ada beberapa sisi yang mempunyai label yang sama.

Dengan cara sama seperti cara di atas (kemungkinan pertama), untuk kemungkinan kedua sampai kemungkinan ke-5040 agar lebih detil digunakan tabel untuk memeriksa apakah suatu graf tersebut *graceful* atau tidak. Dari 5040 kemungkinan pada graf M_1 hanya 48 susunan angka yang merupakan pelabelan *graceful* titik.

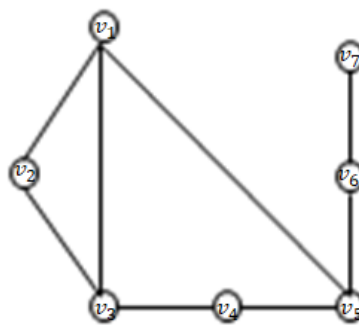
Tabel 2. Pelabelan Graceful Titik Graf M_1

No	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_1, v_2	v_1, v_3	v_1, v_4	v_2, v_3	v_3, v_4	v_4, v_5	v_5, v_6	v_6, v_7
37	1	2	4	6	3	5	7	5	1	2	4	6	3	5	7
174	1	3	5	2	7	6	4	6	1	3	5	2	7	6	4
240	1	3	7	6	5	4	2	0	1	3	7	6	5	4	2
254	1	4	2	6	3	7	5	6	1	4	2	6	3	7	5
457	1	5	7	2	3	4	6	1	1	5	7	2	3	4	6
490	1	6	2	4	5	7	3	2	1	6	2	4	5	7	3
534	1	6	4	2	7	5	3	6	1	6	4	2	7	5	3
674	1	7	5	2	3	6	4	2	1	7	5	2	3	6	4
974	2	4	1	6	3	7	5	6	2	4	1	6	3	7	5
1026	2	4	5	6	7	3	1	2	2	4	5	6	7	3	1
1210	2	6	1	4	5	7	3	2	2	6	1	4	5	7	3
1285	2	6	5	4	1	3	7	5	2	6	5	4	1	3	7
1493	3	1	5	2	7	4	6	5	3	1	5	2	7	4	6

1559	3	1	7	6	5	2	4	7	3	1	7	6	5	2	4
1600	3	2	4	6	5	7	1	0	3	2	4	6	5	7	1
1644	3	2	6	4	7	5	1	4	3	2	6	4	7	5	1
1759	3	4	6	2	1	5	7	7	3	4	6	2	1	5	7
1915	3	5	7	6	1	2	4	3	3	5	7	6	1	2	4
1976	3	6	4	2	1	7	5	0	3	6	4	2	1	7	5
2132	3	7	5	6	1	4	2	4	3	7	5	6	1	4	2
2293	4	2	1	6	3	5	7	5	4	2	1	6	3	5	7
2320	4	2	3	6	5	7	1	0	4	2	3	6	5	7	1
2345	4	2	5	6	7	1	3	1	4	2	5	6	7	1	3
2395	4	2	7	6	1	3	5	3	4	2	7	6	1	3	5
2646	4	6	1	2	7	5	3	6	4	6	1	2	7	5	3
2696	4	6	3	2	1	7	5	0	4	6	3	2	1	7	5
2721	4	6	5	2	3	1	7	1	4	6	5	2	3	1	7
2748	4	6	7	2	5	3	1	4	4	6	7	2	5	3	1
2909	5	1	3	2	7	4	6	5	5	1	3	2	7	4	6
3065	5	2	4	6	7	1	3	1	5	2	4	6	7	1	3
3126	5	3	1	2	7	6	4	6	5	3	1	2	7	6	4
3282	5	4	2	6	7	3	1	2	5	4	2	6	7	3	1
3397	5	6	2	4	1	3	7	5	5	6	2	4	1	3	7
3441	5	6	4	2	3	1	7	1	5	6	4	2	3	1	7
3482	5	7	1	2	3	6	4	2	5	7	1	2	3	6	4
3548	5	7	3	6	1	4	2	4	5	7	3	6	1	4	2
3756	6	2	3	4	7	5	1	4	6	2	3	4	7	5	1
3831	6	2	7	4	3	1	5	7	6	2	7	4	3	1	5
4015	6	4	3	2	1	5	7	7	6	4	3	2	1	5	7
4067	6	4	7	2	5	1	3	3	6	4	7	2	5	1	3
4367	7	1	3	6	5	2	4	7	7	1	3	6	5	2	4
4507	7	2	4	6	1	3	5	3	7	2	4	6	1	3	5
4551	7	2	6	4	3	1	5	7	7	2	6	4	3	1	5
4584	7	3	1	6	5	4	2	0	7	3	1	6	5	4	2
4787	7	4	6	2	5	1	3	3	7	4	6	2	5	1	3
4801	7	5	1	2	3	4	6	1	7	5	1	2	3	4	6
4867	7	5	3	6	1	2	4	3	7	5	3	6	1	2	4
5004	7	6	4	2	5	3	1	4	7	6	4	2	5	3	1

Dari Tabel 2 dapat dilihat bahwa pada graf M_1 terdapat 48 pelabelan *graceful* titik. Jadi, graf M_1 merupakan pelabelan *graceful* titik.

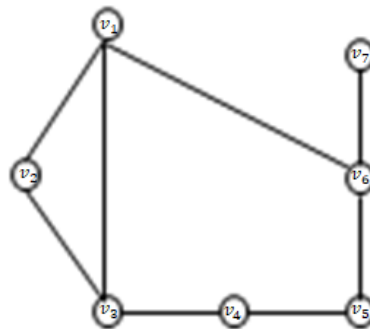
b) Untuk graf M_2 (ada 5040 kemungkinan). Misalkan $V(M_2) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$



Gambar 5. Ilustrasi $V(M_2)$

Dengan cara sama seperti cara di atas diperoleh tabel untuk memeriksa apakah suatu graf tersebut pelabelan *graceful* titik atau tidak. Dari 5040 kemungkinan hanya 16 yang merupakan pelabelan *graceful* titik.

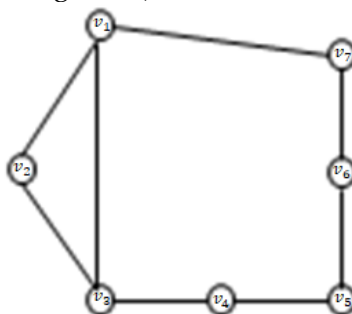
c) Untuk graf M_3 (ada 5040 kemungkinan). Misalkan $V(M_3) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$



Gambar 6. Ilustrasi $V(M_3)$

Dengan cara sama seperti cara di atas diperoleh tabel untuk memeriksa apakah suatu graf tersebut pelabelan *graceful* titik atau tidak. Dari 5040 kemungkinan hanya 20 yang merupakan pelabelan *graceful* titik.

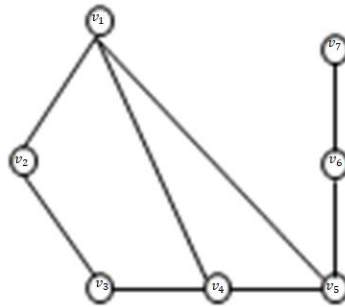
d) Untuk graf M_4 (ada 5040 kemungkinan). Misalkan $V(M_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$



Gambar 7. Ilustrasi $V(M_4)$

Dengan cara sama seperti cara di atas diperoleh tabel untuk memeriksa apakah suatu graf tersebut pelabelan *graceful* titik atau tidak. Dari 5040 kemungkinan hanya 20 yang merupakan pelabelan *graceful* titik.

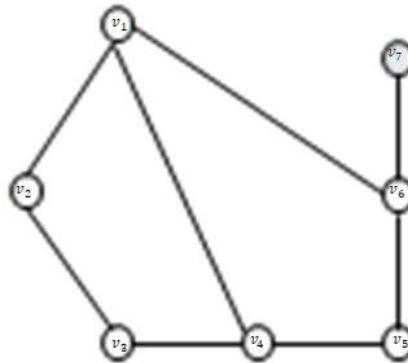
e) Untuk graf M_5 (ada 5040 kemungkinan). Misalkan $V(M_5) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$



Gambar 8. Ilustrasi $V(M_5)$

Dengan cara sama seperti cara sebelumnya diperoleh tabel untuk memeriksa apakah suatu graf tersebut pelabelan *graceful* titik atau tidak. Dari 5040 kemungkinan hanya 32 yang merupakan pelabelan *graceful* titik.

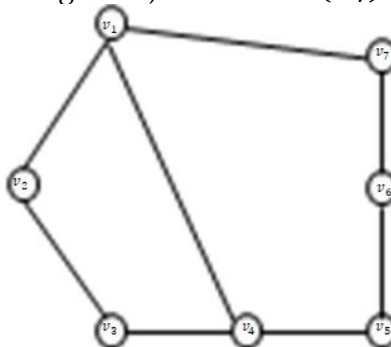
f) Untuk graf M_6 (ada 5040 kemungkinan). Misalkan $V(M_6) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$



Gambar 9. Ilustrasi $V(M_6)$

Dengan cara sama seperti cara sebelumnya diperoleh tabel untuk memeriksa apakah suatu graf tersebut pelabelan *graceful* titik atau tidak. Dari 5040 kemungkinan hanya 24 yang merupakan pelabelan *graceful* titik.

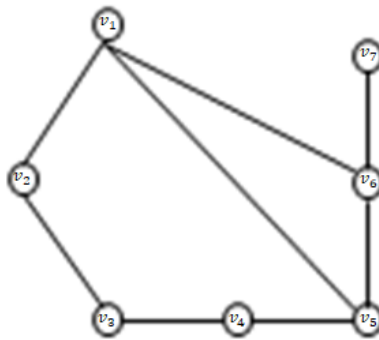
g) Untuk graf M_7 (ada 5040 kemungkinan). Misalkan $V(M_7) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$



Gambar 10. Ilustrasi $V(M_7)$

Dengan cara sama seperti cara sebelumnya diperoleh tabel untuk memeriksa apakah suatu graf tersebut pelabelan *graceful* titik atau tidak. Dari 5040 kemungkinan hanya 28 yang merupakan pelabelan *graceful* titik.

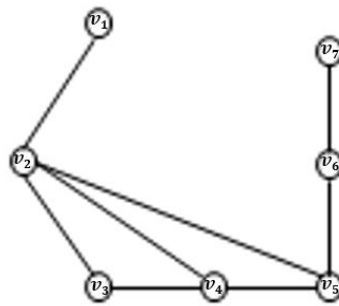
h) Untuk graf M_8 (ada 5040 kemungkinan). Misalkan $V(M_8) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$



Gambar 11. Ilustrasi $V(M_8)$

Dengan cara sama seperti cara sebelumnya diperoleh tabel untuk memeriksa apakah suatu graf tersebut pelabelan *graceful* titik atau tidak. Dari 5040 kemungkinan hanya 8 yang merupakan pelabelan *graceful* titik.

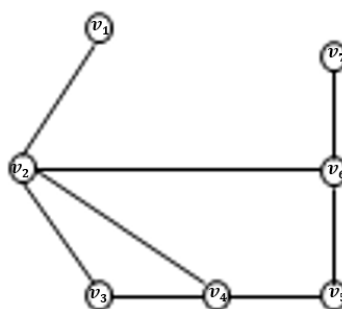
- i) Untuk graf M_9 (ada 5040 kemungkinan). Misalkan $V(M_9) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$



Gambar 12. Ilustrasi $V(M_9)$

Dengan cara sama seperti cara sebelumnya diperoleh tabel untuk memeriksa apakah suatu graf tersebut pelabelan *graceful* titik atau tidak. Dari 5040 kemungkinan hanya 40 yang merupakan pelabelan *graceful* titik

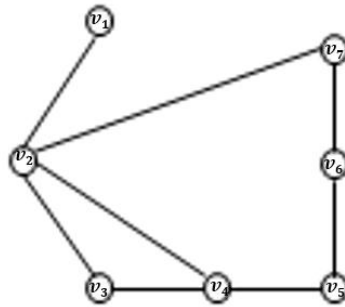
- j) Untuk graf M_{10} (ada 5040 kemungkinan). Misalkan $V(M_{10}) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$



Gambar 13. Ilustrasi $V(M_{10})$

Dengan cara sama seperti cara sebelumnya diperoleh tabel untuk memeriksa apakah suatu graf tersebut pelabelan *graceful* titik atau tidak. Dari 5040 kemungkinan hanya 48 yang merupakan pelabelan *graceful* titik.

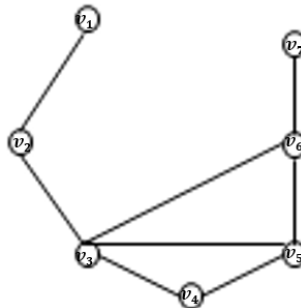
- k) Untuk graf M_{11} (ada 5040 kemungkinan). Misalkan $V(M_{11}) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$



Gambar 14. Ilustrasi $V(M_{11})$

Dengan cara sama seperti cara sebelumnya diperoleh tabel untuk memeriksa apakah suatu graf tersebut pelabelan *graceful* titik atau tidak. Dari 5040 kemungkinan hanya 24 yang merupakan pelabelan *graceful* titik.

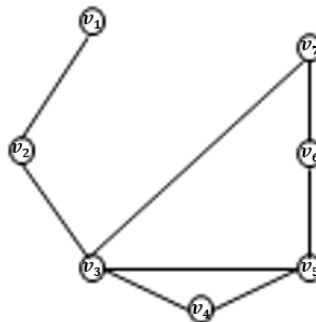
- l) Untuk graf M_{12} (ada 5040 kemungkinan). Misalkan $V(M_{12}) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$



Gambar 15. Ilustrasi $V(M_{12})$

Dengan cara sama seperti cara sebelumnya diperoleh tabel untuk memeriksa apakah suatu graf tersebut pelabelan *graceful* titik atau tidak. Dari 5040 kemungkinan hanya 64 yang merupakan pelabelan *graceful* titik.

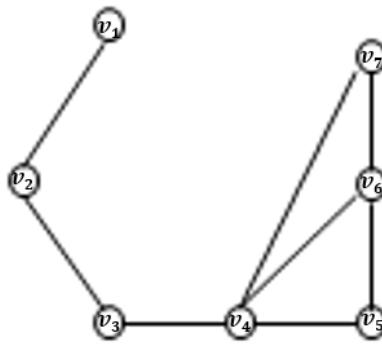
- m) Untuk graf M_{13} (ada 5040 kemungkinan). Misalkan $V(M_{13}) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$



Gambar 16. Ilustrasi $V(M_{13})$

Dengan cara sama seperti cara sebelumnya diperoleh tabel untuk memeriksa apakah suatu graf tersebut pelabelan *graceful* titik atau tidak. Dari 5040 kemungkinan hanya 32 yang merupakan pelabelan *graceful* titik.

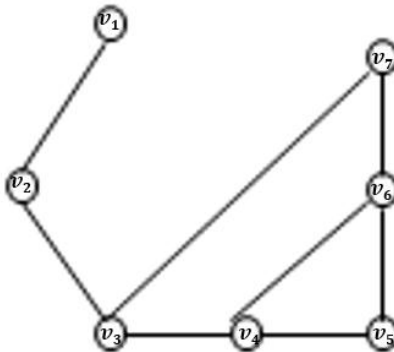
- n) Untuk graf M_{14} (ada 5040 kemungkinan). Misalkan $V(M_{14}) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$



Gambar 17. Ilustrasi $V(M_{14})$

Dengan cara sama seperti cara sebelumnya diperoleh tabel untuk memeriksa apakah suatu graf tersebut pelabelan *graceful* titik atau tidak. Dari 5040 kemungkinan hanya 16 yang merupakan pelabelan *graceful* titik.

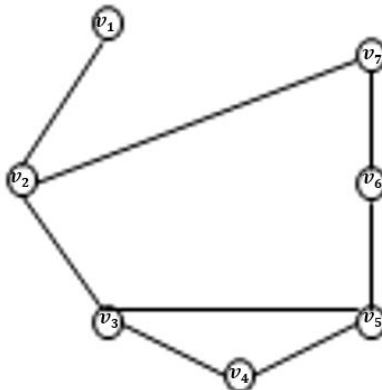
- o) Untuk graf M_{15} (ada 5040 kemungkinan). Misalkan $V(M_{15}) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$



Gambar 18. Ilustrasi $V(M_{15})$

Dengan cara sama seperti cara sebelumnya diperoleh tabel untuk memeriksa apakah suatu graf tersebut pelabelan *graceful* titik atau tidak. Dari 5040 kemungkinan hanya 16 yang merupakan pelabelan *graceful* titik.

- p) Untuk graf M_{16} (ada 5040 kemungkinan). Misalkan $V(M_{16}) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$



Gambar 19. Ilustrasi $V(M_{16})$

Dengan cara sama seperti cara sebelumnya diperoleh tabel untuk memeriksa apakah suatu graf tersebut pelabelan *graceful* titik atau tidak. Dari 5040 kemungkinan

hanya 20 yang merupakan pelabelan *graceful* titik. Jadi, dari 16 graf-(7,8) seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1 semuanya merupakan pelabelan *graceful* titik.

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan, dapat disimpulkan bahwa pada graf-(7,8) terdapat 16 graf yang tidak isomorfik, yang mana semua grafnya merupakan pelabelan *graceful* titik, dengan rincian: Pada Graf M1 hanya 48 graf yang merupakan pelabelan *graceful* titik; Pada Graf M2 hanya 16 graf ; Pada Graf M3 hanya 20 graf; Pada Graf M4 hanya 20 graf; Pada Graf M5 hanya 32 graf; Pada Graf M6 hanya 24 graf; Pada Graf M7 hanya 28 graf; Pada Graf M8 hanya 8 graf; Pada Graf M9 hanya 40 graf; Pada Graf M10 hanya 48 graf; Pada Graf M11 hanya 24 graf; Pada Graf M12 hanya 64 graf; Pada Graf M13 hanya 32 graf; Pada Graf M14 hanya 16 graf; Pada Graf M15 hanya 16 graf; Pada Graf M16 hanya 20 graf yang memuat pelabelan *graceful* titik.

Ucapan Terima Kasih

Ucapan terimakasih disampaikan kepada semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaian penelitian yang berjudul "Pelabelan *Graceful* Titik pada Graf-(7,8)", khususnya Litapdimas Kemenag dan UIN Sjech M. Djamil Djabat Bukittinggi yang telah memberikan hibah penelitian kepada peneliti tahun 2024, sehingga penelitian ini dapat terlaksana dengan baik dan dapat dituangkan dalam bentuk artikel. Semoga artikel ini bisa dijadikan sebagai referensi pada penelitian-penelitian selanjutnya.

Daftar Pustaka

- [1] D. Cunningham, "Vertex Magic," *Electron. Electronic Journal of Undergraduate Mathematics.*, vol. 9, pp. 1–20, 2004, [Online]. Available: <https://www.cs.uwaterloo.ca/journals/EJUM/v9.html>
- [2] M. Bača, M. Miller, J. Ryan, and A. Semaničová-Feňovčíková, "Edge-Magic Total Labelings," *Developments in Mathematics.*, vol. 60, no. January 2000, pp. 117–157, 2000, doi: 10.1007/978-3-030-24582-5_4.
- [3] I. H. Agustin, L. Susilowati, Dafik, I. N. Cangul, and N. Mohanapriya, "On the Vertex Irregular Reflexive Labeling of Several Regular and Regular-Like Graphs," *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography.*, vol. 25, no. 5, pp. 1457–1473, 2022, doi: 10.1080/09720529.2022.2063543.
- [4] M. Miller, "Open Problems in Graph Theory : Labeling and Extremal Graph," 2000.
- [5] S.-M. Lee, Y.C.Pan, and M.-C. Tsai, "On vertex-graceful $(p,p+1)$ -graphs," 2005, p. 172.
- [6] B. Anjani, Primas Tri Anjar, Heri, Robertus, & Surarso, "Pelabelan Super Graceful untuk Beberapa Graf Khusus," pp. 183–203, 2012, [Online]. Available: <https://ejournal3.undip.ac.id/index.php/matematika/article/view/1238>
- [7] G. H. Medika, "Pelabelan Vertex-Graceful pada Beberapa Graf," in *Prosiding Seminar Nasional STKIP PGRI Sumatera Barat*, 2019, pp. 54–65. [Online]. Available: <http://econference.stkip-pgri-sumbar.ac.id/index.php/matematika/IPME/paper/view/761>

- [8] C. C. Marzuki, L. Laraza, and F. Aryani, "Nilai Total Ketakteraturan Titik pada Graf Seri Paralel $sp(m,1,3)$," *Jurnal Sains Matematika dan Statistika.*, vol. 6, no. 2, p. 113, 2020, doi: 10.24014/jsms.v6i2.10559.
- [9] M. R. Zeen El Deen and N. A. Omar, "Extending of Edge even Graceful Labeling of Graphs to Strong r -Edge even Graceful Labeling," *Journal of Mathematics.*, vol. 2021, 2021, doi: 10.1155/2021/6643173.
- [10] G. H. Medika and Z. B. Tomi, "Pelabelan Vertex-Graceful pada Graf-(6,8)," *Journal Math Educa*, vol. 6, no. 1, pp. 63–70, 2022, [Online]. Available: <https://ejournal.uinib.ac.id/jurnal/index.php/matheduca/article/view/3479>
- [11] Maryana and K. A. Sugeng, "Graceful Labeling on Thorny-Snake Graphs," *THETA: Jurnal Pendidikan Matematika*, vol. 3, no. 2, pp. 55–58, 2022, doi: <https://doi.org/10.35747/t.v3i2.137>.
- [12] H. Sumardi, A. Susanta, and T. Alfira Siagian, "Kemampuan Mahasiswa dalam Membuktikan Teorema pada Pelabelan Graceful Graph A-Bintang," *JPMR: Jurnal Pendidikan Matematika Raflesia*, vol. 07, no. 01, pp. 35–43, 2022, [Online]. Available: <https://ejournal.unib.ac.id/index.php/jpmr>
- [13] J. Daniel, Z. Zidane Barack, P. Setya Ilham, and K. Ariyanti Sugeng, "Pelabelan Odd-Graceful pada Graf Produk Sisir (Odd Graceful Labelling on Comb Product Graph)," *Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika.*, vol. 22, no. 1, pp. 30–42, 2022, [Online]. Available: <https://jurnal.unej.ac.id/index.php/MIMS/index>
- [14] L. Affifah and I. K. Budayasa, "Pelabelan Anggun Graf Berlian Rangkap Berbintang, Beberapa Kelas Graf Pohon, dan Graf Corona Khusus," *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika.*, vol. 11, no. 3, pp. 368–382, 2023.
- [15] R. N. Pakpahan and M. Y. Manuel, "Graceful Labeling Algorithm for Multi-Level Star Graph," vol. 7, no. 1, pp. 2–7, 2024.
- [16] G. H. Medika, Z. B. Tomi, M. F. Akbar, F. F. Janeva, and Nuryanuwar, "Pelabelan Vertex-Graceful pada Graf-(5,7)," *Lattice: Jurnal Pendidikan Matematika*, vol. 4, no. 1, pp. 90–101, 2024, [Online]. Available: <https://ejournal.uinbukittinggi.ac.id/index.php/lattice/article/view/8670>
- [17] S. Arikunto, *Prosedur Penelitian Suatu Pendekatan Praktik*. Jakarta: PT Rineka Cipta, 2016.
- [18] N. Martono, *Metode Penelitian Kuantitatif: Analisis Isi dan Analisis Data Sekunder*. Jakarta: Rajawali Pers, 2014.
- [19] Sugiyono, *Metode Penelitian Kualitatif: (untuk Penelitian yang Bersifat : Eksploratif, Enterpretif, Interaktif dan Konstruktif)*. Bandung: Alfabeta, 2020.
- [20] W. Ode, N. Mbay, M. Anggo, and A. Sani, "Efektivitas Model Pembelajaran Kooperatif Tipe Jigsaw dan Model Pembelajaran Problem Based Learning terhadap Kemampuan Berpikir Kritis dan Komunikasi Matematik Siswa Sekolah Menengah Pertama (SMP)," *J. Pendidik. Mat.*, vol. 8, no. 1, pp. 57–66, 2017.
- [21] M. Nazir, *Metode Penelitian*. Bogor: Ghalia Indonesia, 2014.