Jurnal Sains Matematika dan Statistika
p-ISSN: 2460-4542
e-ISSN: 2615-8663

Pemodelan dan Aplikasi *Single Depot* mTSP Berbasis *Fuzzy* untuk Efisiensi *Deposit Carrying*

Rahmawati[1], Novi Hidayah[2], Mohammad Soleh[3], Aldi Suprianto[4]

[1,2] Program Studi Matematika, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Jl. HR Soebrantas KM 12,5, Kampus Bina Widya Simpang Baru, Pekanbaru, 28293
Email: rahmawati@uin-suska.ac.id[1], 12050426198@students.uin-suska.ac.id[2], msoleh@uin-suska.ac.id[3], affanaldi7@gmail.com
Korespondensi penulis : rahmawati@uin-suska.ac.id

Abstrak

Penelitian ini membahas permasalahan *Multiple Traveling Salesman Problem* (mTSP) dengan pendekatan *single depot* berbasis penugasan, dengan biaya perjalanan antar node dinyatakan sebagai bilangan *fuzzy trapezoid*. Tujuan utama penelitian ini adalah meminimalkan biaya perjalanan dalam pengambilan deposit (*Deposit Carrying*) dari kantor pusat ke cabang-cabang Bank Mandiri di Pekanbaru. Formulasi yang disusun mencakup penyesuaian bobot biaya menjadi bilangan *fuzzy trapezoid*, yang kemudian dikonversi menjadi nilai *crisp* menggunakan *Ranking Score Method* (RSM). Kasus ini melibatkan 21 node (1 kantor pusat dan 20 cabang), dengan batas atas dan bawah kunjungan per node untuk memastikan efisiensi penjadwalan kru. Hasil optimasi menunjukkan bahwa biaya minimum yang diperlukan untuk menjangkau seluruh cabang adalah sebesar Rp192.943,5 menggunakan kendaraan operasional berbahan bakar pertamax. Penelitian ini menunjukkan efektivitas model mTSP berbasis *fuzzy* dalam meminimalkan biaya perjalanan dan memberikan solusi yang relevan bagi industri perbankan, khususnya dalam pengelolaan operasional yang melibatkan ketidakpastian biaya.

Kata Kunci: mTSP, fuzzy trapezoid, Ranking Score Method, Deposit carrying

Abstract

This study examines the Multiple Traveling Salesman Problem (mTSP) using a single-depot assignment-based approach, where travel costs between nodes are represented as trapezoidal fuzzy numbers. The primary objective is to minimize travel costs for deposit collection (Deposit

Carrying) from the main office to the branches of Bank Mandiri in Pekanbaru. The proposed formulation incorporates the adjustment of cost weights into trapezoidal fuzzy numbers, which are subsequently converted into crisp values using the Ranking Score Method (RSM). *The case involves 21 nodes (1 main office and 20 branches), with upper and lower bounds on node visits to ensure efficient crew scheduling. Optimization results reveal that the minimum cost required to serve all branches is Rp 192,943.5, utilizing operational vehicles fueled with Pertamax. This study highlights the effectiveness of the fuzzy-based mTSP model in reducing travel costs and offers a practical solution for the banking sector, particularly in managing operations with uncertain costs.*

Keywords: *mTSP, trapezoidal fuzzy number, Ranking Score Method, Deposit Carrying*

1. Pendahuluan

Permasalahan mTSP memiliki banyak variasi, salah satunya adalah formulasi *single depot* mTSP berbasis penugasan yang dibahas oleh Kara dan Bektas pada [1] tahun 2005. Tujuan dari formulasi *single depot* mTSP berbasis penugasan dalam penelitian ini adalah meminimalkan jarak/biaya perjalanan yang ditempuh oleh para *salesman* sehingga dapat meminimalkan pengeluaran perusahaan. Salah satu penerapan dari formulasi *single* depot mTSP berbasis penugasan adalah pada kasus *Deposit Carrying*. Pada tahun 2016, [2] membahas formulasi *single* depot mTSP pada *Deposit Carrying* dalam dunia perbankan. Di tahun 2017, [3] juga mengembangkan sebuah algoritma *heuristic* baru yang dilandaskan kepada algoritma lintasan terpendek. Kemudian tahun 2018, [4] membahas penentuan solusi mTSP dengan *Permutation Invariant Pooling Network* yang menggabungkan elemen-elemen desain baru dalam suatu himpunan *graph network.* Pada tahun 2019, [5] membahas solusi dari masalah *single* depot mTSP dengan variansi baru *Open Close Multiple Traveling Salesman Problem* (OCMTSP) dengan seluruh *salesman* dikategorikan secara internal dalam hal ini disebut *permanent* dan eksternal dalam hal ini disebut *outsourhcing* yang diposisikan pada satu depot.

Pengembangan *single depot* mTSP dibahas oleh [6] mengenai algoritma eksak untuk menyelesaikan mTSP dengan satu depot ditahun 2020. Pendekatan ini memastikan solusi optimal ditemukan untuk masalah tersebut. Selanjutnya, [7] membahas pengembangan penggunaan algoritma *Firefly* berbasis preferensi untuk menyelesaikan masalah mTSP dengan satu depot di tahun 2023. Pendekatan ini bertujuan untuk meningkatkan efisiensi dalam menemukan solusi optimal untuk mTSP. Di tahun 2024, [8] memperkenalkan varian baru dari mTSP yang disebut "*fair-MTSP*", dengan fokus pada distribusi beban kerja yang adil di antara para salesman. Pendekatan ini diformulasikan sebagai *Mixed-Integer Second Order Cone Program (*MISOCP) dan *Mixed Integer Linear Program* (MILP).

Dalam penelitian ini, peneliti tertarik untuk mengembangkan formulasi *single depot* mTSP berbasis penugasan tersebut dengan mengembangkan teori bahwa koefisien-koefisien dari fungsi tujuan dalam hal ini biaya perjalanan akan dinyatakan sebagai bilangan *fuzzy Trapezoid* (*Trapezoidal Fuzzy Number*). Ini berarti, biaya perjalanan yang awalnya *fixed* pada satu titik dinyatakan dalam interval empat titik. Hal ini dikarenakan bahwa dalam fenomena kehidupan, biaya perjalanan dapat dipengaruhi oleh beberapa faktor seperti kondisi jalan, arus lalu lintas, kecepatan kendaraan, kondisi konsumsi bahan bakar, dan kondisi ban kendaraan. Biaya perjalanan yang dinyatakan sebagai bilangan *fuzzy* trapezoid tersebut akan dikontruksi ke bilangan *crisp* dengan *Ranking*

Score Method (RSM). Selanjutnya, penelitian ini akan melahirkan model *single depot* mTSP terbaru dengan koefisien-koefisien variabel pada fungsi objektif berupa *Trapezoidal Fuzzy Number*. Selanjutnya, model diterapkan dalam studi kasus *Deposit Carrying* yang dilakukan pada Bank Mandiri Pekanbaru dengan menetapkan kantor pusat sebagai *single* depot (node asal) dan beberapa kantor-kantor cabang Bank Mandiri Pekanbaru lainnya dinyatakan sebagai node *intermediate* yang akan dikunjungi oleh para karyawan (*salesman*). Bank Mandiri Pekanbaru digunakan sebagai objek penelitian, dikarenakan memiliki beberapa kantor cabang yang tersebar merata di Pekanbaru dibandingkan dengan Bank-bank lain yang ada di Pekanbaru.

2. Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian studi literatur yang mengembangkan teori yang ada pada formulasi *single depot* mTSP berbasis penugasan yang dibahas Kara dan Bektas (2006) menjadi suatu teori baru yang menghasilkan sebuah formulasi *single depot* mTSP berbasis penugasan dengan biaya perjalanan *fuzzy* dengan langkah-langkah berikut:

1. Mengadaptasi formulasi *single depot* mTSP berbasis penugasan dari Kara dan Bektas [1] .
2. Mengganti bobot biaya perjalanan antar node menjadi bilangan *fuzzy trapezoid*.
3. Menyusun formulasi *single depot* mTSP dengan biaya perjalanan *fuzzy*.
4. Menggunakan *Ranking Score Method* (RSM) untuk mengkonversi bilangan fuzzy menjadi nilai *crisp* dengan Pemrograman Matlab.
5. Menerapkan formulasi pada kasus nyata *Deposit Carrying* di Bank Mandiri Pekanbaru:
   i. Mengumpulkan data biaya perjalanan dari kantor pusat ke cabang.
   ii. Menggunakan software LINDO untuk menentukan solusi optimal.
6. Memodelkan dan menyelesaikan masalah dengan batas bawah dan atas kunjungan node setiap *salesman*.

Beberapa teori pendukung dalam penelitian ini diuraikan sebagai berikut:

2.1 Masalah Penugasan (*Assignment Problem*)

Taha [9] menjelaskan bahwa masalah penugasan (*assignment problem*) merupakan suatu masalah menentukan seseorang yang tepat untuk suatu pekerjaan tertentu. Masalah penugasan berhubungan dengan penugasan optimal dari bermacam-macam sumber yang produktif (seperti karyawan, mesin, alat transportasi, atau sumber daya lainnya) dari suatu perusahaan yang mempunyai tingkat efisiensi yang berbeda-beda untuk tugas-tugas yang berbeda-beda pula. Masalah penugasan juga dikatakan sebagai masalah transportasi yang seimbang yang mana semua persediaan dan permintaan sama dengan 1. Secara umum, masalah penugasan dengan n pekerja yang ditugaskan untuk n tugas dapat direpresentasikan sebagai model LP berikut. Misalkan c_{ij} adalah biaya penugasan pekerja ke-i untuk pekerjaan ke-j dan definisikan:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika pekerja ke - } i \text{ ditugaskan untuk tugas ke} - j \\ 0, & \text{jika lainnya} \end{cases}$$

Model LP untuk masalah penugasan adalah sebagai berikut:

Min $\qquad z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$

dengan kendala :

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_{ij} = 0 \text{ atau } 1, \qquad \forall\, i, j \;.$$

2.2 Teori Graf dan *Network*

Dalam menyelesaikan masalah jaringan, dapat direpresentasikan dengan teori graf yang dijelaskan pada Liu dan Kao (2004) [10]. Graf terdiri dari simpul-simpul (*vertices* atau node) yang dihubungkan dengan sisi (*edge*). Biasanya graf digambarkan sebagai sekumpulan titik (melambangkan simpul) yang dihubungkan oleh ruas garis (melambangkan sisi). Dalam penelitian ini graf yang digunakan adalah graf lengkap dengan setiap nodenya mempunyai sisi ke semua node lainnya disebut graf lengkap (*complete graph*).

2.3. Formulasi *Single Depot* mTSP Berbasis Penugasan

Persoalan mTSP merupakan generalisasi dari persoalan TSP. Pada mTSP harus terdapat $m \geq 2$ *salesman* yang mengunjungi n kota (tempat) secara bebas ke seluruh kota (tempat) tersebut. Formulasi *single* depot mTSP berbasis penugasan dirujuk pada Kara dan Bektas [1], serta graf berarah (*directed graph*) oleh [11] yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.1. Masalah *single depot* mTSP didefinisikan pada graf berarah lengkap *(complete digraph)* $G = (V, A)$ dengan $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ merupakan himpunan *n*-node, dan himpunan busur (*arcs*) dinyatakan dengan $A = \{(i, j) | i, j \in V, i \neq j\}, i \neq j$ dan $C = c_{ij}$ merupakan matriks jarak yang berhubungan dengan setiap $(i, j) \in A$. Matriks biaya C dapat simetris, asimetris, ataupun euclidean. Misalkan terdapat *m-salesman* yang berada di satu depot kemudian akan dicari perjalanan (tur) sedemikian sehingga semua salesman berawal dan berakhir di depot, setiap node yang lain tepat dikunjungi sekali dalam satu tur, jumlah node yang dikunjungi oleh *salesman* telah ditentukan dalam suatu interval, dan biaya keseluruhan mengunjungi node diminimalkan.

Menurut [1], untuk menentukan batas atas node batas bawah K suatu pekerjaan atau minimal node yang harus dikunjungi oleh pekerja (*salesman*) dengan formula $2 \leq K \leq \lfloor (n-1)/m \rfloor$ dan batas atas L suatu pekerjaan atau maksimal node yang boleh dikunjungi oleh *salesman* (pekerja) yakni $L \geq K$ dan kaitannya dengan jumlah node yang harus dikunjungi *saleman* diberikan oleh definisi berikut.

Definisi 2.2. x_{ij} suatu variabel biner yang bernilai 1 jika $(i, j) \in A$ solusi optimal dan bernilai 0 jika lainnya. Untuk sebarang tur, u_i adalah jumlah node yang dikunjungi pada lintasan pengunjung dari node asal ke node-i, L adalah jumlah maksimum node yang boleh dikunjungi oleh *salesman*, sehingga $1 \le u_i \le L$ untuk $i \ge 2$. Selanjutnya, misalkan terdapat K yaitu jumlah minimum node yang harus dikunjungi oleh *salesman*, jika $x_{i1} = 1$ maka syarat $K \le u_i \le L$ harus dipenuhi.

Proposisi 2.1. Dua kendala batas (*bounding constraints)* yang dinyatakan sebagai

$$u_i + (L-2)x_{1i} - x_{i1} \le L-1, \qquad i = 2,3,\dots,n$$

merupakan ketaksamaan yang berlaku untuk mTSP untuk $K \ge 2$.

2.4 *Trapezoidal Fuzzy Number*

Definisi mengenai bilangan *fuzzy trapezoid* dibahas oleh Pandian dan Natarajan [12] dan Thorani [13] dan [14].

Definisi 2.3 Bilangan *fuzzy* $\tilde{A}$ dikatakan bilangan *fuzzy trapezoid* ditulis (a_1, a_2, a_3, a_4) dengan a_1, a_2, a_3, dan a_4 adalah bilangan real dan fungsi keanggotaan $\mu_{\tilde{A}}(x)$ diberikan oleh :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0, & untuk \quad x \le a_1 \\ \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1}, & untuk \quad a_1 \le x \le a_2 \\ 1, & untuk \quad a_2 \le x \le a_3 \\ \dfrac{a_4 - x}{a_4 - a_3}, & untuk \quad a_3 \le x \le a_4 \\ 0, & untuk \quad x \ge a_4 \end{cases}$$

Definisi 2.4 Bilangan *fuzzy trapezoid* $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ dikatakan bilangan *fuzzy trapezoid* non-negatif artinya $\tilde{A} \ge 0$ jika dan hanya jika $a_1 \ge 0$. Bilangan *fuzzy trapezoid* $\tilde{A}$ dikatakan bilangan *fuzzy trapezoid* positif artinya $\tilde{A} > 0$ jika dan hanya jika $a_1 > 0$. Bilangan *fuzzy trapezoid* $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ dikatakan bilangan *fuzzy trapezoid* non-positif artinya $\tilde{A} \le 0$ jika dan hanya jika $a_3 \le 0$. Bilangan *fuzzy trapezoid* $\tilde{A}$ dikatakan bilangan *fuzzy trapezoid* negatif artinya $\tilde{A} < 0$ jika dan hanya jika $a_3 < 0$.

2.5 *Ranking Score Method* (RSM)

Ranking Score Method (RSM) adalah suatu metode yang digunakan untuk menentukan *ranking* dari suatu bilangan *fuzzy* melalui suatu nilai yang disebut *score*. *Score* suatu bilangan *fuzzy* merupakan interpretasi bilangan *fuzzy* tersebut dalam bilangan bilangan *crisp* yang didefinisikan sebagai berikut [15].

Definisi 2.14 *Score* dari bilangan *fuzzy* $\tilde{A}_i$ didefinisikan sebagai berikut.

$$Score\ \tilde{A}_i = S_i * e^{U_i} * h_i * a$$

$$S_i = \frac{\sum_{k=1}^{r} \int_{a_1}^{a_4} x_i\ f_{ki}\, dx}{\sum_{k=1}^{r} \int_{a_1}^{a_4} f_{ki}\, dx}; \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n. \qquad (1)$$

$$T_i = \frac{\sum_{k=1}^{r} \int_{a_1}^{a_4} f_{ki}\,(x_i - S_i)^2\, dx}{\sum_{k=1}^{r} \int_{a_1}^{a_4} f_{ki}\, dx}; \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n. \qquad (2)$$

$$U_i = 1 - T_i\, e^{(-S_i)}; \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Dengan k adalah indeks dari polynomial yang berbeda yang mendefinisikan fungsi keanggotaan pada interval $[a_1, a_4]$, h_i adalah *height* dari bilangan *fuzzy* $\tilde{A}_i$, dan $\alpha \in (0,1]$. Bilangan *fuzzy* dengan *score* yang lebih tinggi akan memiliki ranking lebih tinggi.

Diberikan bilangan *fuzzy* $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \ldots, \tilde{A}_n$ pada X dengan fungsi keanggotaan kontinu sepotong-sepotong $f_{\tilde{A}_i} : X \to [0,1]$ yang didefinisikan sebagai :

$$f_{\tilde{A}_i} = \begin{cases} f_{\tilde{k}l}(t), & a \le t \le a' \\ 1, & a' \le t \le b' \\ f_{\tilde{k}r}(t), & b' \le t \le b \end{cases}$$

Menentukan *ranking* bilangan *fuzzy* $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \ldots, \tilde{A}_n$ dengan RSM dilakukan dengan tahapan sebagai berikut.

Tahap 1. Menghitung h_i, yaitu *height* dari masing-masing bilangan *fuzzy* $\tilde{A}_i$.

Tahap 2. Menghitung parameter rata-rata S_i pada Persamaan (1) untuk masing-masing bilangan *fuzzy* $\tilde{A}_i$.

Tahap 3. Jika $S_i \neq 0$, maka dilanjutkan ke tahap 4, selain itu jika $S_i = 0$ untuk suatu i, maka tanpa mengurangi keumuman dihitung $S_i^* = S_i + 1$ untuk setiap i, dan S_i diganti dengan S_i^*.

Tahap 4. Menghitung sebaran bilangan *fuzzy* $\tilde{A}_i$, yaitu T_i yang dihitung melalui persamaan pada Persamaan (2).

Penelitian ini menggunakan pendekatan studi literatur untuk mengembangkan formulasi *single depot* mTSP berbasis penugasan, dengan langkah-langkah berikut:

7. Mengadaptasi formulasi *single depot* mTSP berbasis penugasan dari Kara dan Bektas [1] .
8. Mengganti bobot biaya perjalanan antar node menjadi bilangan *fuzzy trapezoid*.
9. Menyusun formulasi *single depot* mTSP dengan biaya perjalanan *fuzzy*.
10. Menggunakan *Ranking Score Method* (RSM) untuk mengkonversi bilangan fuzzy menjadi nilai *crisp* dengan Pemrograman Matlab.
11. Menerapkan formulasi pada kasus nyata *Deposit Carrying* di Bank Mandiri Pekanbaru:
    i. Mengumpulkan data biaya perjalanan dari kantor pusat ke cabang.

ii. Menggunakan software LINDO untuk menentukan solusi optimal.
12. Memodelkan dan menyelesaikan masalah dengan batas bawah dan atas kunjungan node setiap salesman.

4. Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini disusun mengenai formulasi *single depot* mTSP berbasis penugasan yang diadaptasi dari formulasi *single depot* mTSP yang disusun oleh Kara dan Bektas. Dengan mengganti fungsi tujuan c_{ij} dengan bilangan *fuzzy trapezoid* $\tilde{c}_{ij}$ yang sehingga diperoleh Model formulasi *single depot* mTSP dengan fungsi tujuan bilangan *fuzzy* sebagai berikut :

Minimumkan $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \widetilde{c_{ij}}\, x_{ij}$ $\quad i \neq j, (i, j) \in A$

dengan kendala

$$\sum_{j=2}^{n} x_{ij} = m,$$

$$\sum_{j=2}^{n} x_{j1} = m,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = m, \qquad j = 2,\ldots,n$$

$$\sum_{j=i}^{n} x_{ij} = m, \qquad i = 2,\ldots,n$$

$$u_i + (L-2)x_{1i} - x_{i1} \leq L-1, \qquad i = 2,\ldots,n \quad i = 2,\ldots,n$$

$$u_i + x_{1i} + (2-K)x_{i1} \geq 2, \qquad i = 2,\ldots,n \quad i = 2,\ldots,n$$

$$x_{1i} + x_{i1} \leq 1, \qquad i = 2,\ldots,n \quad i = 2,\ldots,n$$

$$u_i - u_j + Lx_{ij} + (L-2)x_{ji} \leq L-1, \qquad 2 \leq i \neq j \leq n \quad i = 2,\ldots,n$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \qquad \forall (i, j) \in A.$$

dengan $\widetilde{c_{ij}}$: bobot perjalanan *fuzzy* dari node-*i* ke node-*j*.
m : banyaknya salesman
u_i : jumlah node yang dikunjungi pada lintasan pengunjung dari node asal ke node-*i*.
u_j : jumlah node yang dikunjungi pada lintasan pengunjung dari node asal ke node-*j*.
L : Batas atas suatu pekerjaan/maksimal node yang harus dikunjungi
K : Batas bawah suatu pekerjaan/minimal node yang harus dikunjungi.

Selanjutnya formulasi yang terbentuk diterapkan pada kasus *Deposit Cayying* pada Bank Mandiri Pekanbaru.

Dalam dunia perbankan terdapat banyak produk dan jenis pelayanan jasa yang diberikan pihak bank kepada nasabah. Tujuan dari pemberian jasa-jasa bank adalah untuk mendukung dan memperlancar kegiatan usaha menghimpun dana dan menyalurkan dana dari dan kepada masyarakat. Dana-dana nasabah yang terkumpul di setiap kantor cabang bank harus dihimpun dan dilakukan proses pengelolaannya di kantor pusat bank tersebut. Langkah yang dilakukan untuk dapat menghimpun dana nasabah di kantor bank pusat adalah dengan mengatur penjadwalan kru/pekerja yang akan ditugaskan dari kantor bank pusat untuk mengambil deposit yang dalam hal ini disebut dengan *Deposit Carrying* ke berbagai kantor cabangnya. Perencanaan penjadwalan kru yang efisien untuk mengambil deposit merupakan langkah penting dalam proses perencanaan operasional perusahaan bank tersebut. Penjadwalan kru yang mengunjungi kantor kantor cabang bank diharapkan dapat mengambil lintasan-lintasan perjalanan yang tepat sehingga dapat meminimalkan biaya perjalanan yang dikeluarkan pernsahaan bank tersebut. Pembahasan ini melibatkan beberapa kru yang ditugaskan dari kantor pusat Bank Mandiri Pekanbaru ke berbagai kantor cabangnya. Dalam hal ini terdapat 21 kantor Bank Mandiri dengan rincian 1 kantor pusat dan 20 kantor cabang. Selanjutnya peta node-node kantor Bank Mandiri Pekanbaru diambil melalui *Google Satelit* atau *Google Maps*.

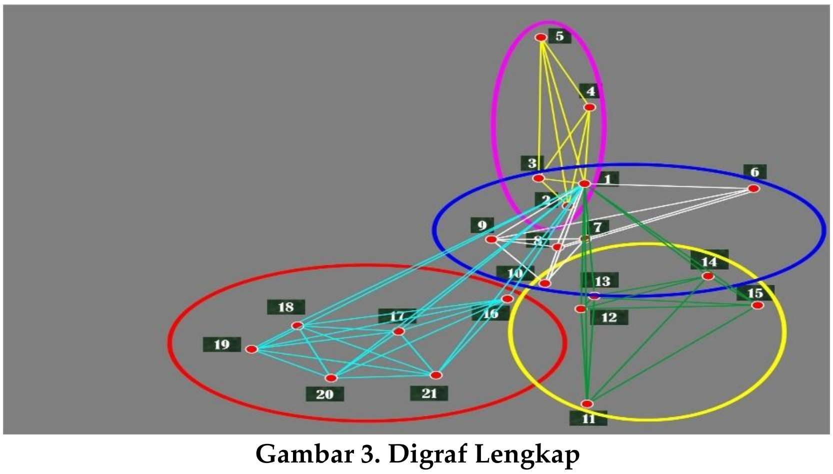
Gambar 1. Persebaran bank-bank Mandiri Pekanbaru.

Himpunan node V (berisi sejumlah n-node tertentu) yang dalam hal ini berupa sebuah kantor pusat beserta kantor-kantor cabangnya dan himpunan busur A yang berisi busur-busur yang menghubungkan dua buah node yakni dua buah kantor yang berbeda dengan masing-masing memiliki bobot jarak pada tiap sisinya. Node-node dalam himpunan V terlebih dahulu diberi nomor dari 1 hingga n, dengan $n \in N$. Dalam kasus ini kantor-kantor Bank mandiri Pekanbaru dinyatakan sebagai $V = \{1, 2, 3, \dots, 21\}$ dengan $n = 1, 2, \dots, 21 \in N$. Node pusat atau depot ditetapkan KC SB (Node 1).Sedangkan kantor-kantor cabangnya (*node intermediate)* diberi nomor dengan node 1, node 2 hingga node 21. Dalam hal ini ditetapkan $m = 4$, dan ditetapkan $2 < K < 5$. Pilih $K = 4$ artinya node minimal yang harus dikunjungi kru adalah minimal 4 node. Tetapkan batas atas L suatu pekerjaan atau maksimal node yang boleh dikunjungi kru yakni $L \geq K$, dalam hal ini

$L = 6$. Selanjutnya *Cover* node-node dengan membagi node-node *intermediate* sesuai batas atas an batas bawah node yang boleh dikunjungi salesman seperti terlihat pada Gambar 2 berikut.

Gambar 2. Node-node tercluster.

Selanjutnya bentuk digraf setiap cluster yang terbentuk dan susun formulasi *single depot* mTSP dengan bilangan fuzzy dalam hal ini menyatakan biaya yang diasumsikan dalam bilangan *fuzzy trapezoid*. Dalam hal ini, diasumsikan para karyawan dari bank Mandiri Pekanbaru menggunakan mobil Xenia 1000cc yang dapat menempuh jarak 15km/liter dan mobil tersebut menggunakan bahan bakar Pertamax (Rp. 9000,/liter), maka besar biaya yang dikeluarkan oleh perusahaan Bank Mandiri Pekanbaru untuk mengunjungi semua kantor cabangnya yang merupakan bobot node-node *intermediate* yang dikunjungi diasumsikan sebagai bilangan *fuzzy trapezoid* dan selanjutnya setiap bobot biaya perjalanan tersebut score biaya perjalanan menggunakan metode RSM untuk tiap cluster dengan rincian data pada cluster-1 sebanyak 20 data, cluster-2 sebanyak 30 data, cluster-3 sebanyak 30 data dan cluster-4 sebanyak 42 data) sehingga pada penelitian ini dilakukan dengan menggunakan Program Matlab. Untuk digraf lengkap dengan Matriks C simetris dari persoalan ini disajikan pada gambar berikut.



Gambar 3. Digraf Lengkap

Tahap selanjutnya diberikan nilai variabel u_i yaitu jumlah node yang dikunjungi pada lintasan pengunjung dari node asal ke node i sebagai berikut:
$u_{02} = 4, u_{03} = 3, u_{04} = 2, u_{05} = 1, u_{06} = 5, u_{07} = 4, u_{08} = 3, u_{09} = 2, u_{10} = 1,$
$u_{11} = 1, u_{12} = 4, u_{13} = 2, u_{14} = 3, u_{15} = 5, u_{16} = 6, u_{17} = 2, u_{18} = 4, u_{19} = 5,$
$u_{20} = 3, u_{21} = 1.$
Model matematika *single depot* mTSP berbasis penugasan dengan biaya perjalanan fuzzy dimodelkan sebagai berikut:

Didefinisikan : $x_{ij} = \begin{cases} 1, & arc(i,j)\text{solusi optimal} \\ 0 & \text{jika lainnya} \end{cases}$

Minimumkan

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{21}\sum_{j=1}^{21} c_{ij}\, x_{ij} = {} & 1794{,}07x_{01,02} + 2120{,}26x_{01,03} + 8154{,}85x_{01,04} + 13700{,}10x_{01,05} \\
& + 3914{,}33x_{01,06} + 2446{,}45x_{01,07} + 2935{,}47x_{01,08} + 6523{,}88x_{01,09} \\
& + 6034{,}59x_{01,10} + 13210{,}8x_{01,11} + 11090{,}60x_{01,12} + 7013{,}17x_{01,13} \\
& + 10438{,}20x_{01,14} + 11906{,}10x_{01,15} + 831794x_{01,16} + 9785{,}81x_{01,17} \\
& + 20224x_{01,18} + 21691{,}90x_{01,19} + 23322{,}90x_{01,20} + 17940{,}70x_{01,21} \\
& + 1630{,}97x_{02,01} + 2283{,}36x_{02,03} + 7828{,}65x_{02,04} + 13700{,}10x_{02,05} \\
& + 4077{,}42x_{03,01} + 2446{,}45x_{03,02} + 6360{,}78x_{03,04} + 11743x_{03,05} \\
& + 9948{,}91x_{04,01} + 8481{,}04x_{04,02} + 6686{,}94x_{04,03} + 4403{,}62x_{04,05} \\
& + 15168x_{05,01} + 13863{,}20x_{05,02} + 11906{,}10x_{05,03} + 4403{,}62x_{05,04} \\
& + 3914{,}33x_{06,01} + 4729{,}81x_{06,07} + 4892{,}91x_{06,08} + 8644{,}14x_{06,09} \\
& + 7828{,}65x_{06,10} + 2446{,}45x_{07,01} + 4729{,}81x_{07,06} + 652{,}29x_{07,08} \\
& + 44566{,}71x_{07,09} + 3588{,}13x_{07,10} + 2935{,}74x_{08,01} + 5708{,}39x_{08,06} \\
& + 652{,}39x_{08,07} + 4077{,}42x_{08,09} + 3098{,}84x_{08,10} + 6686{,}97x_{09,01} \\
& + 9785{,}81x_{09,06} + 4892{,}91x_{09,07} + 4403{,}62x_{09,08} + 5708{,}39x_{09,10} \\
& +6850{,}07x_{10,01} + 7828{,}65x_{10,06} + 4566{,}71x_{10,07} + 4077{,}42x_{10,08} \\
& + 5219{,}10x_{10,09} + 15004{,}90x_{11,01} + 7828{,}65x_{11,12} + 6523{,}88x_{11,13} \\
& + 12558{,}50x_{11,14} + 12069{,}20x_{11,15} + 7176{,}26x_{12,01} + 7339{,}36x_{12,11} \\
& + 29{,}35x_{12,13} + 6034{,}59x_{12,14} + 6034{,}59x_{12,15} + 7828{,}65x_{13,01} \\
& + 6523{,}88x_{13,11} + 29{,}35x_{13,12} + 8644{,}14x_{13,14} + 6034{,}59x_{13,15} \\
& + 10438{,}20x_{14,01} + 10601{,}30x_{14,11} + 10112x_{14,12} + 8644{,}14x_{14,13} \\
& + 1467{,}87x_{14,15} + 11906{,}10x_{15,01} + 12069{,}20x_{15,11} + 10112x_{15,12} \\
& + 6034{,}59x_{15,13} + 1467{,}87x_{15,14} + 8317{,}94x_{16,01} + 2935{,}47x_{16,17} \\
& + 15820{,}40x_{16,18} + 19408{,}50x_{16,19} + 19082{,}30x_{16,20} + 11570{,}90x_{16,21} \\
& + 8317{,}94x_{17,01} + 1794{,}07x_{17,16} + 12884{,}70x_{17,18} + 16635{,}90x_{17,19} \\
& + 13373{,}90x_{17,20} + 13863{,}20x_{17,21} + 20224x_{18,01} + 15657{,}30x_{18,16} \\
& + 14189{,}40x_{18,17} + 3751{,}23x_{18,19} + 7502{,}46x_{18,20} + 12232{,}30x_{18,21} \\
& + 21691{,}90x_{19,01} + 18756{,}10x_{19,16} + 17451{,}40x_{19,17} + 3914{,}33x_{19,18} \\
& + 7013{,}17x_{19,20} + 11743x_{19,21} + 26095{,}50x_{20,01} + 19082{,}30x_{20,16} \\
& + 19245{,}40x_{20,17} + 6686{,}97x_{20,18} + 6360{,}78x_{20,19} + 4892{,}91x_{20,21} \\
& + 20387{,}10x_{21,01} + 13700{,}10x_{21,16} + 13863{,}20x_{21,17} + 10438{,}20x_{21,18} \\
& + 10601{,}30x_{21,19} + 4892{,}91x_{21,20}\end{aligned}$$

dengan kendala

$$\sum_{j=2}^{21} x_{1j} = 4$$
$$\sum_{j=2}^{21} x_{j1} = 4$$
$$\sum_{i=1}^{21} x_{ij} = 1\,, \qquad j = 2, \dots ,21$$
$$\sum_{j=1}^{21} x_{ij} = 1, \qquad i = 2, \dots ,21$$
$$u_i + (L-2)x_{1i} - x_{i1} \le L-1, \qquad L = 5, \quad i = 2, \dots ,21$$
$$u_i + x_{1i} - (2-K)x_{i1} \ge 2, \qquad K = 4, \quad i = 2, \dots ,21$$
$$x_{1i} + x_{i1} \le 1, \qquad i = 2, \dots ,21$$
$$u_i - u_j + Lx_{ij} + (L-2)x_{ji} \le L-1, \qquad L = 6, \quad 2 \le i \ne j \le 21$$
$$x_{ij} \in \{0,1\}, \qquad \forall (i,j) \in A.$$

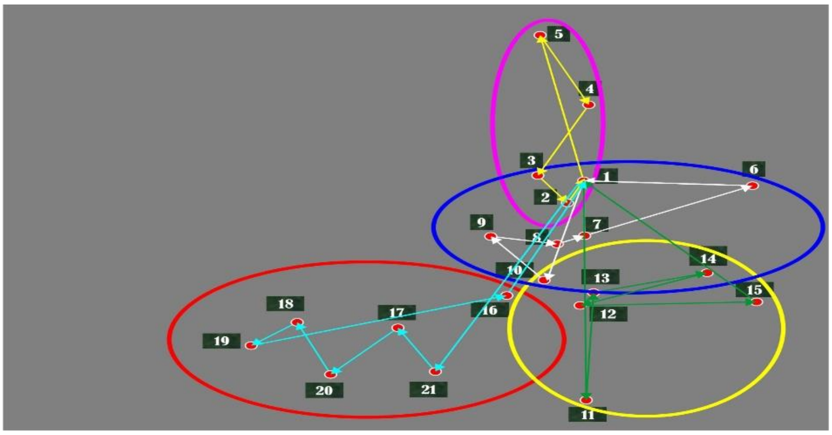
Dengan menggunakan *software* LINDO diperoleh penyelesaian optimal dari formulasi tersebut dengan fungsi tujuan sebesar Rp192.943,5- dengan

$$\begin{aligned} x_{01,05} &= x_{01,10} = x_{01,11} = x_{01,21} = x_{02,01} = x_{03,02} = x_{04,03} = x_{05,04} = x_{06,01} = x_{07,06} = x_{08,07} = x_{09,08} \\ &= x_{10,09} = x_{11,13} = x_{12,15} = x_{13,14} = x_{14,12} = x_{15,01} = x_{16,01} = x_{17,20} = x_{18,19} = x_{19,16} \\ &= x_{20,18} = x_{21,17} = 1. \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} x_{01,02} &= x_{01,03} = x_{01,04} = x_{01,06} = x_{01,07} = x_{01,08} = x_{01,09} = x_{01,12} = x_{01,13} = x_{01,14} = x_{01,15} = x_{01,16} \\ &= x_{01,17} = x_{01,18} = x_{01,19} = x_{01,20} = x_{02,03} = x_{02,04} = x_{02,05} = x_{03,01} = x_{03,04} = x_{03,05} \\ &= x_{04,01} = x_{04,02} = x_{04,05} = x_{05,01} = x_{05,02} = x_{05,03} = x_{06,07} = x_{06,08} = x_{06,09} = x_{06,10} \\ &= x_{07,01} = x_{07,08} = x_{07,09} = x_{07,010} = x_{08,01} = x_{08,06} = x_{08,09} = x_{08,10} = x_{09,01} = x_{09,06} \\ &= x_{09,07} = x_{09,10} = x_{10,01} = x_{10,06} = x_{10,07} = x_{10,08} = x_{11,01} = x_{11,12} = x_{11,14} = x_{11,15} \\ &= x_{12,01} = x_{12,11} = x_{12,13} = x_{12,14} = x_{13,01} = x_{13,11} = x_{13,12} = x_{13,15} = x_{14,01} = x_{14,11} \\ &= x_{14,13} = x_{14,15} = x_{15,11} = x_{15,12} = x_{15,13} = x_{15,14} = x_{16,17} = x_{16,18} = x_{16,19} = x_{16,20} \\ &= x_{16,21} = x_{17,01} = x_{17,16} = x_{17,18} = x_{17,19} = x_{17,21} = x_{18,01} = x_{18,16} = x_{18,17} = x_{18,20} \\ &= x_{18,21} = x_{19,01} = x_{19,17} = x_{19,18} = x_{19,20} = x_{19,21} = x_{20,01} = x_{20,16} = x_{20,17} = x_{20,19} \\ &= x_{20,21} = x_{21,01} = x_{21,16} = x_{21,18} = x_{21,19} = x_{21,20} = 0 \end{aligned}$$

Digraf solusi dari persoalan ini disajikan sebagai berikut



Gambar 4. Digraf Solusi

5. Kesimpulan

Pada penelitian ini diberikan Model formulasi *single* depot mTSP berbasis penugasan biaya perjalanan fuzzy yang telah diterapkan untuk aplikasi *deposit carrying* pada Kantor pusat Bank Mandiri Pekanbaru ke kantor-kantor cabangnya (sebanyak 20 kantor cabang) dengan mengambil $L = 5$ dan $K = 4$. Hasil optimasi menunjukkan bahwa biaya minimum yang diperlukan untuk menjangkau seluruh cabang adalah sebesar Rp 192.943,5. Penelitian ini menunjukkan efektivitas model mTSP berbasis fuzzy dalam meminimalkan biaya perjalanan dan memberikan solusi yang relevan bagi industri perbankan, khususnya dalam pengelolaan operasional yang melibatkan ketidakpastian biaya.

Daftar Pustaka

[1] I. Kara and T. Bektas, “Integer linear programming formulations of multiple salesman problems and its variations,” *European Journal of Operational Research*, vol. 174, no. 3, pp. 1449–1458, 2006, doi: 10.1016/j.ejor.2005.03.008.

[2] Rahmawati and Indrayanto A., I. M. Society, *Prosiding Konferensi Nasional Matematika XVIII Diterbitkan oleh Indonesian Mathematical Society (IndoMS)*, 2016.

[3] F. Nuriyeva and G. Kizilates, “a New Heuristic Algorithm for Multiple Traveling Salesman Problem,” *Twms Journal of Applied and Engineering Mathematics*, vol. 7, no. 1, pp. 101–109, 2017.

[4] Y. Kaempfer and L. Wolf, “Learning the Multiple Traveling Salesmen Problem with Permutation Invariant Pooling Networks,” no. i, pp. 1–22, 2018, [Online]. Available: http://arxiv.org/abs/1803.09621

[5] J. K. Thenepalle and P. Singamsetty, “An open close multiple travelling salesman problem with single depot,” *Decision Science Letters*, vol. 8, no. 2, pp. 121–136, 2019, doi: 10.5267/j.dsl.2018.8.002.

[6] Z. H. Ahmed, “An exact algorithm for the clustered travelling salesman problem,” *Opsearch*, vol. 50, no. 2, pp. 215–228, 2013, doi: 10.1007/s12597-012-0107-0.

[7] R. Nand, K. Chaudhary, and B. Sharma, “Single Depot Multiple Travelling Salesman Problem Solved With Preference-Based Stepping Ahead Firefly Algorithm,” *IEEE Access*, vol. 12, no. February, pp. 26655–26666, 2024, doi:

10.1109/ACCESS.2024.3366183.

[8] A. S. Bhadoriya, D. Deka, and K. Sundar, "Equitable Routing -- Rethinking the Multiple Traveling Salesman Problem," no. March, pp. 1–10, 2024, [Online]. Available: http://arxiv.org/abs/2404.08157

[9] Taha, H.A. *Operation Research: An Introduction*, *Eight Editions*, *Pearson Education*, *Inc.* United States of America. 2007.

[10] S. Liu and C. Kao, "Network Flow Peoblems With Fuzzy Arc Lengths," vol. 34, no. 1, pp. 765–769, 2004.

[11] A. V. Aho, M. R. Garey, and J. D. Ullman, "The Transitive Reduction of a Directed Graph," *SIAM Journal on Computing*, vol. 1, no. 2, pp. 131–137, 1972, doi: 10.1137/0201008.

[12] P. Pandian and G. Natarajan, "A new algorithm for finding a fuzzy optimal solution for fuzzy transportation problems," *Applied Mathematical Sciences*, vol. 4, no. 1–4, pp. 79–90, 2010.

[13] Y. L. P. Thorani, P. Phani, B. Rao, and N. R. Shankar, "Ordering Generalized Trapezoidal Fuzzy Numbers," *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, vol. 7, no. 12, pp. 555–573, 2012.

[14] Y. J. Wang, "Ranking triangle and trapezoidal fuzzy numbers based on the relative preference relation," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 39, no. 2, pp. 586–599, 2015, doi: 10.1016/j.apm.2014.06.011.

[15] S. Chandran and G. Kandaswamy, "A fuzzy approach to transport optimization problem," *Optimization and Engineering*, vol. 17, no. 4, pp. 965–980, 2016, doi: 10.1007/s11081-012-9202-6.