Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 2 No. 2 Juli 2016
ISSN 2460-4542

Metode Iterasi Tiga Langkah dengan Orde Konvergensi Enam untuk Menyelesaikan Persamaan Nonlinear

M. Arif [1] dan M. M. Nizam [2]
[1,2] Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: alhaqqa99@gmail.com, nizam_ys86@yahoo.com

ABSTRAK

Penelitian ini membahas tentang metode double-Newton yang dimodifikasi dengan menambahkan langkah ketiga untuk menyelesaikan persamaan nonlinear. Turunan yang ada pada metode iterasi tersebut diaproksimasi menggunakan penyetaraan metode yang berorde empat. Secara analitik ditunjukkan bahwa metode yang dihasilkan mempunyai orde konvergensi enam dengan empat evaluasi fungsi. Berdasarkan indeks efisiensi dan komputasi numerik, metode yang dihasilkan terlihat lebih unggul dari metode lain yang didiskusikan.

Katakunci: Indeks efisiensi, metode double-Newton, metode iterasi, orde konvergensi.

ABSTRACT

This research discusses the Double-Newton method is modified by adding a third step to solving nonlinear equations. Derivatives existed at the iteration method is approximated using equivallency method of order four. Analytically shown the methods are generated in the order of convergence is six with four evaluation functions. Based on efficiency index and numerical computation, the resulting method shows more superior than the other methods discussed.

Keywords: *Efficiency index, double-Newton method, iteration method, order of convergence*.

Pendahuluan

Salah satu topik yang hangat diperbincangkan dalam ilmu matematika adalah teknik untuk mendapatkan solusi persamaan nonlinear dalam bentuk

$$f(x) = 0. \tag{1}$$

Permasalah yang sering muncul ketika menyelesaikan persamaan (1) adalah tidak dapat digunakannya metode analitik dalam menyelesaikannya. Untuk itu, digunakanlah metode numerik dengan hitungan komputasi yang bersifat perulangn atau yang sering dikenal dengan metode iterasi. Metode iterasi yang sangat populer digunakan untuk menyelesaikan (1) adalah metode Newton dengan bentuk iterasinya diberikan oleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad f'(x_n) \neq 0,\ n = 0,1,2,\ldots, \tag{2}$$

yang memiliki orde konvergensi dua [5, h.83]. Selanjutnya, dengan menambahkan langkah kedua untuk persamaan (2), Traub [7, h.160] memperoleh metode iterasi baru dengan bentuk iterasinya yaitu:

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{3}$$

$$x_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}, \tag{4}$$

memiliki orde konvergensi empat [7, h.160]. Potra-Ptak mengembangkan sebuah metode iterasi baru dengan memodifikasi (2) dengan penambahan langkah, sehingga diperoleh metode iterasi dengan bentuk

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) + f(y_n)}{f'(x_n)}, \tag{5}$$

dengan y_n pada persamaan (3) maka persamaan (5) memiliki orde konvergensi tiga [1,6]. Pada artikel ini akan dibahas metode yang dikembangkan oleh Traub [7, h.160] yang dikenal dengan nama metode iterasi doble-Newton dengan menjadikan metode itersi tiga langkah. Selanjutnya, akan ditunjukkan orde konvergensi metode yang dikemukakan dan dilanjutkan dengan melakukan komputasi numerik untuk beberapa fungsi yang ditentukan.

Bahan dan Metode Penelitian

Pada bagian ini akan disajikan beberapa defenisi penting yang digunakan dalam penelitian yang dilakukan ini.

Definisi 1 (**Orde Konvergensi**) Sebuah barisan iterasi $\{x_n \mid n \geq 0\}$ dikatakan konvergen orde $p \geq 1$ ke α jika

$$|\alpha - x_{n+1}| \leq c|\alpha - x_n|^p,\ n \geq 0, \tag{6}$$

Untuk suatu konstanta $c > 0$. Jika $p = 1$, maka barisan disebut konvergen linear ke α .

Definisi 2 (*COC*) Misalkan α adalah akar persamaan nonlinear $f(x)$, dan x_{n-1}, x_n, x_{n+1} adalah tiga iterasi berturut-turut yang cuku dekat ke α . Maka *Computational Order of Convergence* (*COC*) dapat diaproksimasi menggunakan rumus

$$COC \approx \frac{\ln|(x_{n+1} - \alpha)/(x_n - \alpha)|}{\ln|(x_n - \alpha)/(x_{n-1} - \alpha)|}, \tag{7}$$

dengan $n \in N$.

Defenisi 3 (Indek Efisiensi) Misalkan q adalah banyak evaluasi fungsi yang dibutuhkan oleh suatu metode iterasi. Efisiensi dari metode tersebut dihitung dengan indeks efisiensi yang sebagai

$$p^{\frac{1}{q}} \tag{8}$$

dengan p adalah orde konvergensi dari metode tersebut.

Penilitian ini dilakukan dengan studi literatur dari berbagai sumber yang relevan dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Mendefenisikan kembali metode double-Newton pada persamaan (3) - (4) dan ditambahkan langkah ketiga menggunakan metode Potra-Ptak pada persamaan (5).
2. Selanjutnya, $f'(y_n)$ yang ada pada langkah ke-2 dan ke-3 akan ditaksir menggunakan metode penyetaraan seperti yang dilakukan oleh Chun dalam [4] sehingga diperoleh metode iterasi baru tiga langkah.

Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 2 No. 2 Juli 2016
ISSN 2460-4542

3. Menentukan orde konvergensi dan indeks efisiensi untuk metode iterasi yang diperoleh serta melakukan simulasi numerik menggunakan program Maple 13.

Hasil dan Pembahasan

Metode pada persamaan (3) – (4) memiliki indeks efesiensi $4^{\frac{1}{4}} \approx 1{,}4241$.Untuk memperoleh indeks efesiensi yang lebih tinggi maka dilakukan penambahan langkah ketiga dengan menggunakan metode Potra-Ptak sehingga diperoleh metode iterasi berikut:

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{9}$$

$$z_n = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}, \tag{10}$$

$$x_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n) + f(z_n)}{f'(y_n)}. \tag{11}$$

Bentuk $f'(y_n)$ pada persamaan (10) – (11) ditaksir dengan penyetaraan persamaan (3) – (4) yang menggunakan persamaan seperti yang digunakan oleh Chun dalam [3], yaitu

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \left(1 + 2\frac{f(y_n)}{f(x_n)} + \frac{f^2(y_n)}{f^2(x_n)}\right)\frac{f(y_n)}{f'(x_n)}. \tag{12}$$

Sehingga diperoleh

$$f'(y_n) \approx \frac{f'(x_n) f^2(x_n)}{f^2(x_n) + 2f(x_n)f(y_n) + f^2(y_n)}. \tag{13}$$

Selanjutnya, substitusikan persamaan (13) ke persamaan (10) dan (11) maka akan diperoleh metode iterasi berikut:

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{14}$$

$$z_n = y_n - \frac{f(y_n)}{Nx}, \tag{15}$$

$$x_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n) + f(z_n)}{Nx}, \tag{16}$$

dengan

$$Nx \approx \frac{f'(x_n) f^2(x_n)}{f^2(x_n) + 2f(x_n)f(y_n) + f^2(y_n)}. \tag{17}$$

Untuk melihat orde konvergensi metode iterasi (14) – (16) berikut ini akan ditunjukkan sebagaimana yang disajikan oleh Teorema 4.

Teorema 4. Misalkan $f: C \to C$ adalah fungsi yang mempunyai turunan secukupnya pada interval terbuka *D*. Selanjutnya, asumsikan bahwa α adalah akar sederhana dari persamaan $f(x) = 0$. Misalkan diberikan tebakan awal x_0 cukup dekat ke α, maka metode iterasi (14) – (16) mempunyai orde konvergensi enam dan memenuhi persamaaan *error*

$$e_{n+1} = \left(c_2 c_3^2 - 9c_3 c_2^3 + 20c_2^5\right)e_n^6 + O\left(e_n^7\right)$$

untuk $e_n = x_n - \alpha$.

Bukti. Misalkan α adalah akar sederhana dari persamaan $f(x) = 0$, maka $f'(\alpha) \neq 0$. Selanjutnya dengan melakukan ekspansi Taylor untuk $f(x_n)$ disekitar $x_n = \alpha$ maka diperoleh

$$f(x_n) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{f^{(2)}(\alpha)}{2!}(x_n - \alpha)^2 + \cdots + O(x_n - \alpha)^7. \tag{18}$$

Persamaan (15) dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$f(x_n) = f'(\alpha)\left(e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + \cdots + O(e_n^7)\right), \tag{19}$$

dengan $c_j = \dfrac{f^{(j)}(\alpha)}{j!\, f'(\alpha)}$, j = 2, 3, ..., 6.

Selanjutnya, dengan cara yang sama lakukan ekspansi Taylor untuk $f'(x_n)$ disekitar $x_n = \alpha$ sehingga diperoleh

$$f'(x_n) = f'(\alpha)\left(1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + \cdots + O(e_n^6)\right). \tag{20}$$

Pembagian persamaan (19) dengan (20) akan diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - c_2 e_n^2 + \left(2c_2^2 - 2c_3\right)e_n^3 + \cdots + O(e_n^7). \tag{21}$$

Substitusikan persamaan (21) ke persamaan (14) diperoleh

$$y_n = \alpha + c_2 e_n^2 + \left(2c_2^2 - 2c_3\right)e_n^3 + \cdots + O(e_n^7). \tag{22}$$

Kemudian, ekspansi Taylor untuk $f(y_n)$ disekitar $y_n = \alpha$ sehingga diperoleh

$$f(y_n) = f'(\alpha)\left(c_2 e_n^2 + (2c_3 - 2c_2^2)e_n^3 + \cdots + O(e_n^7)\right). \tag{23}$$

Berdasarkan persamaan (19), (20), dan (21) maka diperoleh

$$Nx = f'(\alpha)\left(1 + (5c_2^2 - c_3)e_n^2 + \cdots + O(e_n^5)\right). \tag{24}$$

Pembagian persamaan (23) dengan (24) menghasilkan

$$\frac{f(y_n)}{Nx} = c_2 e_n^2 + (2c_3 - 2c_2^2)e_n^3 + (3c_4 - 6c_2 c_3)e_n^4 + \cdots + O(e_n^7). \tag{25}$$

Substitusikan persamaan (25) ke persamaan (15) diperoleh

$$z_n = \alpha + (4c_2^3 - c_2 c_3)e_n^4 + \cdots + O(e_n^7). \tag{26}$$

Selanjutnya, gunakan kembali ekspansi Taylor untuk $f(z_n)$ disekitar $z_n = \alpha$ sehingga diperoleh

$$f(z_n) = f'(\alpha)\left((4c_2^3 - c_2c_3)e_n^4 + \cdots + O(e_n^7)\right). \tag{27}$$

Berdasarkan persamaaan (23), (24), dan (27) maka diperoleh

$$\frac{f(y_n) + f(z_n)}{Nx} = c_2e_n^2 + (2c_3 - 2c_2^2) + \cdots + O(e_n^7). \tag{28}$$

Substitusikan persamaan (28) ke (16) diperoleh

$$x_{n+1} = \alpha + (c_2c_3^2 - 9c_3c_2^3 + 20c_2^5)e_n^6 + O(e_n^7) \tag{29}$$

Oleh karena $e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha$, maka persamaan (29) menjadi

$$e_{n+1} = (c_2c_3^2 - 9c_3c_2^3 + 20c_2^5)e_n^6 + O(e_n^7) \qquad \blacksquare$$

Berdasarkan Defenisi 1 maka metode iterasi persamaan (14) – (16) memiliki orde konvergensi enam dan memiliki empat evaluasi fungsi, sehingga dengan menggunakan defenisi 3 metode ini memiliki indeks efisiensi $6^{\frac{1}{4}} \approx 1{,}5651$.

Selanjutnya, akan dilakukan simulasi numerik untuk membandingkan banyak iterasi dan *COC* (*Computational Order of Convergence*) dari metode Newton (MN), metode doble-Newton (MDN), metode Potra-Ptak (MPP), dan metode yang dibahas pada persamaan (11) – (13) (MTL) dalam menemukan akar persamaan nonlinear. Simulasi dilakukan menggunakan program Maple 13 dengan kriteria pemberhentian program jika $|f(x_{n+1})| \le \varepsilon$ atau $|x_{n+1} - x_n| \le \varepsilon$. Sedangkan toleransi yang digunakan adalah $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-15}$. Dalam melakukan perbandingan ini ada beberapa persamaan nonlinear yang digunakan yaitu sebagai berikut:

$$f_1(x) = (x-1)^3 - 1 \qquad \alpha = 2{,}000000000000000$$

$$f_2(x) = x^5 + x^4 + 4x^2 - 15 \qquad \alpha = 1{,}347428098968305$$

$$f_4(x) = \sqrt{x} - x \qquad \alpha = 1{,}000000000000000$$

$$f_4(x) = xe^{-x} - 0{,}1 \qquad \alpha = 0{,}111832559158963$$

Hasil uji komputasi untuk ke empat persamaan nonlinear di atas diberikan pada Tabel 1 – Tabel 4 berikut:

Tabel 1. Perbandingan Komputasi Beberapa Metode untuk Fungsi $f_1(x) = (x-1)^3 - 1$.

x_0	*n*	Metode	*COC*	$\lvert f(x_{n+1})\rvert$	$\lvert x_{n+1} - x_n\rvert$
1,8	5	MN	2,0000	9,27262e-21	5,55956e-11
	3	MDN	3,9996	2,86605e-41	5,55956e-11
	4	MPP	3,0000	3,94637e-35	1,87362e-12
	3	MTL	5,9982	4,56578e-73	4,55183e-13
2,2	5	MN	2,0000	1,99794e-24	8,16076e-13
	3	MDN	3,9999	1,33059e-48	8,16076e-13
	3	MPP	2,9996	1,57657e-17	1,37992e-06
	2	MTL	5,7841	1,59795e-20	2,60420e-04
2,6	6	MN	2,0000	1,28586e-24	6,54691e-13
	3	MDN	3,9923	1,28586e-24	8,09130e-07
	4	MPP	2,9996	3,68296e-24	8,49862e-09
	3	MTL	5,9903	1,78255e-52	1,23057e-09

Tabel 2. Perbandingan Komputasi Beberapa Metode untuk Fungsi $f_2(x) = x^5 + x^4 + 4x^2 - 15$.

x_0	n	Metode	COC	$\lvert f(x_{n+1})\rvert$	$\lvert x_{n+1} - x_n\rvert$
1,2	5	MN	2,0000	4,74839e-24	3,47347e-13
	3	MDN	3,9999	6,46588e-49	3,47347e-13
	4	MPP	3,0000	3,33975e-47	7,36426e-17
	2	MTL	6,1614	1,58908e-17	5,24647e-04
1,9	6	MN	2,0000	1,29305e-21	5,73189e-12
	3	MDN	3,9927	1,29305e-21	2,32280e-06
	4	MPP	2,9993	8,86949e-21	4,73359e-08
	3	MTL	5,9885	1,79663e-46	7,85565e-09
2,2	7	MN	2,0000	3,61553e-28	3,03093e-15
	3	MDN	4,0000	3,74868e-57	3,03093e-15
	5	MPP	3,0000	2,14869e-38	6,35745e-14
	3	MTL	5,9252	1,10726e-26	1,56130e-05

Tabel 3. Perbandingan Komputasi Beberapa Metode untuk Fungsi $f_3(x) = \sqrt{x} - x$.

x_0	n	Metode	COC	$\lvert f(x_{n+1})\rvert$	$\lvert x_{n+1} - x_n\rvert$
0,5	5	MN	2,0000	5,56642e-22	6,67318e-11
	3	MDN	3,9987	1,54925e-43	6,67318e-11
	4	MPP	3,0002	5,71003e-32	9,70330e-11
	3	MTL	5,9730	1,27265e-52	4,28678e-09
0,8	4	MN	2,0000	4,45502e-20	5,96994e-10
	2	MDN	4,0806	4,45502e-20	4,88687e-05
	3	MPP	3,0004	4,99266e-29	9,27863e-10
	2	MTL	6,1488	4,17957e-32	1,12601e-05
1,9	5	MN	2,0000	6,89752e-28	7,42834e-14
	3	MDN	3,9998	2,37879e-55	7,42834e-14
	3	MPP	2,9955	8,64274e-21	5,17119e-07
	2	MTL	5,4917	2,01294e-22	4,62947e-04

Tabel 4. Perbandingan Komputasi Beberapa Metode untuk Fungsi $f_4(x) = xe^{-x} - 0.1$.

x_0	n	Metode	COC	$\lvert f(x_{n+1})\rvert$	$\lvert x_{n+1} - x_n\rvert$
-0,1	5	MN	2,0000	3,51956e-23	6,45688e-12
	3	MDN	3,9998	1,65792e-45	6,45688e-12
	3	MPP	2,9954	1,23702e-16	4,10013e-06
	2	MTL	5,7715	2,21173e-19	4,84537e-04
0,0	4	MN	2,0000	4,44057e-16	2,29350e-08
	2	MDN	3,9630	4,44057e-16	1,46902e-04
	3	MPP	2,9994	3,89307e-23	2,78891e-08
	2	MTL	5,9118	1,00370e-27	1,97046e-05
0,2	4	MN	2,0000	5,78166e-17	8,27571e-09
	2	MDN	4,0183	5,78166e-17	8,82401e-05
	3	MPP	3,0005	1,37791e-23	1,97278e-08
	2	MTL	6,0752	8,37971e-28	1,91208e-05

Berdasarkan Tabel 1 – 4 dapat dilihat bahwa keempat metode memberikan hasil jumlah yang sebanding, tidak terdapat perbedan jumlah iterasi yang signifikan. Pada Tabel 1 – 4 kolom pertama merupakan variasi nilai awal, kolom kedua merupakan jumlah iterasi, kolom ketiga merupakan metode yang dibandingkan, kolom kempat merupakan orde konvergensi secara numerik, kolom kelima merupakan nilai fungsi yang dihasilkan, dan kolom enam merupakan *error*. Berdasarkan nilai fungsi yang ada pada Tabel 1 – 4 terlihat bahwa MTL dibeberapa nilai awal yang dipilih memiliki nilai fungsi yang lebih kecil dibandingkan dengan metode lainnya.

Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan maka metode iterasi baru (MTL) yang didiskusikan memiliki orde konvergensi enam dengan melibatkan empat evaluasi fungsi yaitu $f(x_n), f(y_n), f(z_n)$ dan $f'(x_n)$. Dengan demikian, metode ini memiliki indeks efisiensi $6^{\frac{1}{4}} \approx 1{,}5651$ lebih baik jika dibandingan metode Newton $2^{\frac{1}{2}} \approx 1{,}4142$, metode double-Newton $4^{\frac{1}{4}} \approx 1{,}4142$ dan metode Potra-Ptak $3^{\frac{1}{3}} \approx 1{,}4422$. Hal ini menunjukkan bahwa metode iterasi baru lebih efektif dalam menyelesaikan persamaan nonlinear.

Daftar Pustaka

[1] E. Azadegandan E. Reza, "*A simple iterative method with fifth-orderconvergence by using Potra and Ptak's method"*, Mathematical Sciences, 2 (2009), 191-200.

[2] D. Betounesdan M. Redfern, *Mahtematical Computing An Introduction to Programming Using Maple*, Spring-Verlag, New York, 2002.

[3] C. Chun, *Some fourth-order iterative methods for solving nonlinear equations*, Applied Mathematics and Computation, 195 (2008), 454-459.

[4] C. Chun dan Y. Ham, *Some fourth-order modification of Newton's methods*, Applied Mathematics and Computation, 197 (2010), 454 – 459.

[5] R.V. Dukkipati, *Numerical Methods*, New Age International Limited, New Delhi, 2010.

[6] M. Graudan M. Nouguera, *A Variant of Cauchy's method with accelerated fifth-orde convergence*, Applied Mathematics Letters, 17(2004), 509-517.

[7] J. F. Traub, *Iterative Methods for the Solution of Equations*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1964.